18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY
University of
MICHIGAN

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

REGIERUNG ZU POTSDAM

Sieben und vierzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1854.

Bei Georg Reimer.

Et se trouve à PARIS chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des sieben und vierzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
4.	Nouvelles recherches sur les Covariants. Par Mr. *A. Cayley* à Londres.	II.	109
5.	Das elliptische Potenzial. Von Herrn Dr. *M. G. von Paucker,* b. Secr. der kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst, corr. Mitgliede der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg.	II.	125
7.	Über den ersten der von *Gaufs* gegebenen Beweise des Reciprocitätsgesetzes in der Theorie der quadratischen Reste. Von Herrn *G. Lejeune Dirichlet* zu Berlin.	II.	139
8.	Über ein die Division betreffendes Problem. Von Herrn Professor *G. Lejeune Dirichlet* zu Berlin. (Aus dem Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jan. 1851.)	II.	151
9.	De formarum binariarum secundi gradus compositione. Auct. *G. Lejeune Dirichlet.* (Commentatio mense Majo an. MDCCCLI ad actum quendam academicum in univ. litt. reg. Berol. celebrandum typis expressa et distributa.)	II.	155
11.	Über eine Sammlung von bestimmten Integralen. Von Hrn. *Bierens de Haan,* Oberlehrer der Math. am Gymnasio zu Deventer, math. mag. phil. nat. Doctor.	III.	222
13.	Lösung der Aufgaben *C.* und *D.* in Nr. 21. Band 45 dieses Journals S. 284. Von Dr. phil. *Lottner,* Lehrer der Mathematik und Physik an der höhern Bürgerschule zu Lippstadt.	III.	233
16.	Méthode du calcul des fonctions elliptiques de troisième espèce. Par Mr. *J. Somoff,* Professeur à l'Université de St. Petersbourg.	III.	269
17.	Zur Theorie der *Abel*schen Functionen. Von Dr. *C. Weierstrafs,* Lehrer der Mathematik am Gymnasio zu Braunsberg in Ostpreufsen.	IV.	289
18.	Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies. Par M. *Hermite* à Paris.	IV.	307
19.	Sur la théorie des formes quadratiques. Premier mémoire. Par le même.	IV.	313
20.	Sur la théorie des formes quadratiques. Second mémoire. Par le même.	IV.	343
21.	Intégration des équations aux différences partielles simultanées d'une certaine classe. Par M. l'abbé *Aoust,* Professeur de mathématiques pures à la Faculté des sciences de Besançon.	IV.	369

2. Geometrie.

Nr. der Abhandlung.		Heft. Seite.
1.	Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven. Vom Herrn Professor *J. Steiner* zu Berlin. (Abgedruckt aus dem Monatsbericht der hiesigen Akademie der Wissenschaften vom August 1848.)	I. 1
2.	Über solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunct haben, und über darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Curven, so wie über geradlinige Transversalen der letztern. (Theils Auszug, theils Erweiterung eines am 26. Mai 1851 in der Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vortrags.) Von Demselben.	I. 7
3.	Aufgaben und Sätze, bezüglich auf die vorstehende Abhandlung. Von Demselben.	I. 106
5.	Das elliptische Potenzial. Von Herrn Dr. *M. G. von Paucker,* b. Secr. der kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst, corr. Mitgliede der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg.	II. 125
6.	Sopra un Teorema di Poligonometria. Nota di *P. Tardy,* Professore di Matematiche in Genova. (Estratta dagli Annali di scienze matematiche e fisiche pubblicati in Roma Marzo 1852.)	II. 133
12.	Two lettres of the Geometrical correspondence between M. *Donkin* and M. *Spottiswoode.*	III. 225

3. Mechanik.

14.	Theorie der Dreh- und Flieh-momente der parallelen Seitenkräfte, in welche Kräfte im Raume zerlegt werden können. Vom Herrn geh. Rathe und Professor Dr. *Schweins* in Heidelberg.	III. 238
15.	Theorie der Mittelpunkte der parallelen Seitenkräfte. Von Demselben. . .	III. 246

II. Angewandte Mathematik.

10.	An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism. By the late *George Green,* fellow of Gonville- and Cains-Colleges at Cambridge. (End of No. 10 tome 39 and No. 22 tome 44.)	II. 161 III. 195
	Druckfehlerverzeichnifs.	IV. 376

1.

Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven.

(Vom Herrn Professor *J. Steiner* zu Berlin.)

(Abgedruckt aus dem Monatsbericht der hiesigen Akad. der Wissens. vom August 1848.)*)

In der Gesammtsitzung der Akademie am 10. August 1848 wurde von Herrn ***Steiner*** eine Abhandlung über „allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven" vorgelegt.

Diese Curven werden darin nach Grad und Classe aufgefafst; das Wesen der Doppel- und Rückkehrpuncte, der Doppel- und Wendetangenten wird erläutert und die gegenseitige Abhängigkeit dieser Elemente und des Grads und der Classe wird nachgewiesen. Bezeichnen g und k beziehlich den Grad und die Classe einer Curve, $K^g = \mathfrak{K}^k$, ferner d und r die Zahl ihrer Doppel- und Rückkehrpuncte, so wie t und w die Zahl ihrer Doppel- und Wendetangenten, so hat man die drei Gleichungen

$$(1.) \quad g(g-1) = k+2d+3r,$$
$$(2.) \quad k(k-1) = g+2t+3w,$$
$$(3.) \quad 3g(g-1) = 6d+8r+w,$$

aus denen, wenn von den darin enthaltenen 6 Gröfsen irgend drei gegeben sind, die drei übrigen gefunden werden; was somit auf 60 Formeln führt.

Bei Bestimmung der Curven durch gegebene Puncte ergiebt sich der folgende bekannte Satz als

Erster Fundamentalsatz:

„Durch beliebige gegebene $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ Puncte a_1 geht eine unzählige Schaar Curven n^{ten} Grads, A^n, und alle diese Curven gehen nebstdem nothwendig noch durch andere $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ bestimmte Puncte a_0, so dafs sie ein Curvenbüschel $B(A^n)$ mit n^2 gemeinschaftlichen Schnittpuncten a bilden." Die Puncte a_1 heifsen die ***bestimmenden,*** die Puncte a_0 die ***nothwendigen,*** und beide insgesammt, die n^2 Puncte a heifsen die ***Grundpuncte*** des Büschels $B(A^n)$.

*) Dieser Monatsbericht wird vornehmlich aus dem Grunde hier abgedruckt, weil auf die darin enthaltenen Erklärungen und Sätze in der nachher folgenden Abhandlung vielfach verwiesen wird.

Dieser Satz ist für die Betrachtung der Curven einer der wesentlichsten und fruchtbarsten, indem er zahlreiche Folgerungen gewährt. Dahin gehört unter andern die Erzeugung der Curven durch Curvenbüschel niedrigen Grades, ganz analog, wie die Kegelschnitte durch projectivische Strahlbüschel erzeugt werden. Ferner eine grofse Reihe von Sätzen über gegenseitige Berührung der Curven, wobei sich insbesondere verschiedene merkwürdige Eigenschaften der 28 Doppeltangenten der Curven 4ten Grads ergeben.

Über die Polaren werden einige neue weiter gehende Gesichtspuncte aufgestellt, die zu einer Menge neuer Resultate führen.

Werden aus einem beliebigen Puncte P an eine gegebene Curve A^n (die Basis) Tangenten gelegt, so liegen die $n(n-1)$ Berührungspuncte in einer Curve A^{n-1}; und werden aus demselben Punct P an diese neue Curve Tangenten gelegt, so liegen die $(n-1)(n-2)$ Berührungspuncte eben so in einer Curve A^{n-2}; und wird so fortgefahren, so erhält man die aufeinander folgenden Curven A^{n-1}, A^{n-2}, A^{n-3}, ... A^2, A^1, welche ***die successiven Polaren*** des Puncts P in Bezug auf die Basis A^n, und zwar nach der Reihe die 1te, 2te, 3te, ..., $(n-2)^{te}$, $(n-1)^{te}$ Polare genannt, und die in Zeichen wie folgt, dargestellt werden

$$(P)_1 : A^n = A^{n-1}; \quad (P)_2 : A^n = A^{n-2}; \quad (P)_x : A^n = A^{n-x}; \quad (P)_{n-2} : A^n = A^2;$$
$$(P)_{n-1} : A^n = A^1,$$

wobei also z. B. $(P)_x : A^n = A^{n-x}$ heifst: die x^{te} Polare des Puncts P in Bezug auf die Basis A^n ist eine Curve vom $(n-x)^{ten}$ Grad, $= A^{n-x}$. Die $(n-2)^{te}$ Polare A^2 ist ein Kegelschnitt und die $(n-1)^{te}$ Polare A^1 ist eine Gerade.

Bewegt sich der Pol P in irgend einer Linie L (Directrix), so wird jede seiner Polaren, wie etwa die x^{te}, eine continuirliche Schaar Curven A^{n-x}, oder $S(A^{n-x})$, durchlaufen, die irgend eine Curve umhüllen, welche die x^{te} ***Polar-Enveloppe E_x des bewegten Pols P, oder schlechthin die x^{te} Polare der Leitlinie L in Bezug auf die Basis A^n*** genannt wird. In Zeichen wird dies wie folgt ausgedrückt:

$$(4.) \qquad (L)_x : A^n = S(A^{n-x}) = E_x.$$

Ist die Directrix L eine gegebene Curve, etwa vom r^{ten} Grad, $= D^r$, so ist auch der Grad jeder ihrer Polaren E_1, E_2, ... E_{n-1} bestimmt, nämlich es ist allgemein

$$(5.) \qquad (D^r)_x : A^n = E_x^{r(r+2x-3)(n-x)};$$

d. h.: *„Die x^{te} Polare der Curve D^r in Bezug auf die Basis A^n ist eine Curve E_x vom $r(r+2x-3)(n-x)^{ten}$ Grad;"* oder: *„Bewegt sich der Pol P in der Curve D^r, so ist seine x^{te} Polar-Enveloppe E_x eine Curve vom genannten Grade."*

Für die erste und letzte Polare, also für $x=1$ und $x=n-1$ hat man insbesondere

$$(6.) \qquad (D^r)_1 : A^n = E_1^{r(r-1)(n-1)};$$

und

$$(7.) \qquad (D^r)_{n-1} : A^n = E_{n-1}^{r(r+2n-5)};$$

ist dagegen $r=1$, also die Directrix eine Gerade D^1, so hat man (5.):

$$(8.) \qquad (D^1)_x : A^n = E_x^{2(x-1)(n-x)},$$

und für $x=1$ und $x=n-1$ kommt

$$(9.) \qquad (D^1)_1 : A^n = E_1^0;$$

und

$$(10.) \qquad (D^1)_{n-1} : A^n = E_{n-1}^{2(n-2)} = \mathfrak{C}^{n-1},$$

d. h. *„Bewegt sich der Pol P auf einer Geraden D^1* (9.), *so ist seine erste Polar-Enveloppe vom Nullten Grad, E_1^0, was anzeigt, dafs die $S(A^{n-1})$ sich in $(n-1)^2$ Puncten a schneiden, auf welche sich die Enveloppe reducirt, oder dafs die Schaar Polaren A^{n-1} in ein Büschel $B(A^{n-1})$ übergehen;"* und (10.) *„die $(n-1)^{te}$ Polare einer Geraden D^1 in Bezug auf die Basis A^n ist eine Curve vom $2(n-2)^{ten}$ Grad und von der $(n-1)^{ten}$ Classe $\mathfrak{C}^{n-1}$."*

Für die Betrachtung der Polaren dient der folgende, allgemein bekannte, Satz als

Zweiter Fundamentalsatz:

„Nimmt man, in Bezug auf dieselbe Basis A^n, von zwei beliebigen Puncten P und Q die ersten Polaren, seien diese P^{n-1} und Q^{n-1}, und nimmt sodann verwechselt die erste Polare von P in Bezug auf die Curve Q^{n-1} und die erste Polare von Q in Bezug auf P^{n-1}, so sind diese beiden Polaren eine und dieselbe Curve R^{n-2}; oder in Zeichen:

$$(11.) \qquad (Q)_1 : [(P)_1 : A^n] = (P)_1 : [(Q)_1 : A^n] = R^{n-2}."$$

Dieser Satz ist ebenso folgenreich, wie der obige. Durch wiederholte Anwendung desselben folgt zunächst, dafs

$$(12.) \qquad (Q)_y : [(P)_x : A^n] = (P)_x : [(Q)_y : A^n] = R^{n-x-y}.$$

Eine andere Folgerung ist:

„*Liegt der Punct Q in der x^{ten} Polare von P, also in P^{n-x}, so geht die $(n-x)^{te}$ Polare von Q, also Q^x, durch den Punct P.*" Ebenso folgt daraus der schöne Reciprocitätssatz:

„*Hat die x^{te} Polare eines Puncts P, also P^{n-x}, einen Doppelpunct Q, so hat auch umgekehrt die $(n-x-1)^{te}$ Polare des letztern, d. i. Q^{x+1}, jenen Punct P zum Doppelpunct.*"

Die Doppelpuncte der Polaren spielen eine wesentliche Rolle, wie aus dem folgenden Beispiel zu ersehen ist.

„*Der Ort desjenigen Puncts P, dessen erste Polare, P^{n-1}, einen Doppelpunct Q hat, ist eine Curve vom $3(n-2)(n-2)^{ten}$ Grad*

$$= P_0^{3(n-2)^2}$$

und der Ort des Doppelpuncts Q ist eine Curve vom $3(n-2)^{ten}$ Grad

$$= Q_0^{3(n-2)};$$"

diese letztere Curve Q_0 ist also zugleich auch der Ort desjenigen Puncts Q, dessen $(n-2)^{te}$ Polare, Q^2, einen Doppelpunct P hat, und jene erste Curve P_0 ist der Ort dieses Doppelpuncts. Die Polare Q^2 ist somit ein Kegelschnitt, der aus zwei Geraden besteht, die sich in P schneiden. Die Curven P_0 und Q_0 werden, nebst andern, *conjugirte Kern-Curven* der Basis A^n genannt. Sie haben unter andern folgende Eigenschaften:

„*Die Curve Q_0 geht durch die $3n(n-2)$ Wendepuncte der Basis A^n, wogegen die Curve P_0 alle Wendetangenten derselben berührt.*" — „*Die Curve P_0 ist von der $3(n-1)(n-2)^{ten}$ Classe; und von gleicher Classe ist, im Allgemeinen, diejenige Curve R_0, welche von der Geraden PQ umhüllt wird; diese Curve R_0 berührt ebenfalls die Wendetangenten der Basis A^n;*" etc. — „*Die $(n-1)^{te}$ Polare von jeder beliebigen Curve D^r, d. i. $D^{r(r+2n-5)}$ (7.), berührt die Kerncurve P_0 in $3r(n-2)$ Puncten;*" etc. — „*Die Kerncurve P_0 hat*

$3(n-2)(4n-9)$ *Wendetangenten,*

$\frac{3}{2}(n-2)[(3n^2+1)(n-4)+28]$ *Doppeltangenten,*

$12(n-2)(n-3)$ *Rückkehrpuncte, und*

$\frac{3}{2}(n-2)[3(n-2)^3-14(n-2)+11]$ *Doppelpuncte.*"

„*Sind P_1 und P_2 irgend zwei solche Puncte, deren erste Polaren P_1^{n-1} und P_2^{n-1} einander in irgend einem Puncte X berühren sollen, so mufs die Gerade P_1P_2 allemal die Curve P_0 in irgend einem Puncte P berühren, und so ist der Punct X der zu P reciproke Pol Q und die Gerade PQ ist die gemeinsame Tangente jener Polaren im Puncte $X = Q$.*

Also können alle ersten Polaren P_1^{n-1}, P_2^{n-1}, ... ***einander nur in solchen Puncten*** Q ***berühren, welche in der Kerncurve*** Q_0 ***liegen, und somit zugleich Doppelpuncte von einzelnen derselben sind. Jeder Tangente*** PP_1 ***der Curve*** P_0 ***entspricht ein Büschel erste Polaren*** (9.), $B(P_1^{n-1})$, ***die sich in einem und demselben Puncte*** Q ***berühren, welcher der reciproke Pol zum Berührungspunct*** P ***der Tangente ist. Ist*** PP_1 ***insbesondere eine Wendetangente der Kerncurve*** P_0, ***so osculiren sich ihre Polaren*** $B(P_1^{n-1})$ ***in*** Q; ***und ist*** PP_1 ***eine Doppeltangente von*** P_0, ***so berühren sich die Polaren*** $B(P_1^{n-1})$ ***in zwei verschiedenen Puncten*** Q. ***Ist ferner insbesondere*** P ***ein Doppelpunct der Curve*** P_0, ***so hat seine erste Polare*** P^{n-1} ***zwei Doppelpuncte*** Q, ***und somit giebt es eben so viele erste Polaren, welche zwei Doppelpuncte haben, als die Kerncurve*** P_0 ***Doppelpuncte hat;***" u. s. w.

Die gesammten ersten Polaren P^{n-1}, P_1^{n-1}, P_2^{n-1}, ... bilden ein sogenanntes Netz, welches durch irgend drei derselben (die nicht zu einem Büschel gehören) bestimmt ist, und wodurch dann auch die Basis A^n bestimmt wird. Haben die drei gegebenen Curven gemeinschaftliche Puncte [1, 2, 3, ... bis höchstens $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-2$], so sind dieselben Doppelpuncte der Kerncurve Q_0. ***Daher ist z. B. der Ort der Doppelpuncte (oder der Berührungspuncte) aller Curven*** P^x, ***welche durch dieselben gegebenen*** $\frac{1}{2}x(x+3)-2$ ***Puncte*** d ***gehen, eine Curve*** $Q^{3(x-1)}$, ***welche die Puncte*** d ***zu Doppelpuncten hat. Sollen die Curven*** P^x ***durch*** $\frac{1}{2}x(x+3)-1$ ***Puncte*** d ***gehen, so bilden sie ein Büschel*** $B(P^x)$ ***und dann haben sie zusammen*** $3(x-1)^2$ ***Doppelpuncte.***

Über die obigen Polaren (Polar-Enveloppen) wird bemerkt, dafs wenn man eine derselben zur Directrix annimmt, ihr ebenfalls eine Reihe Polarcurven entsprechen, von denen die eine vorzugsweise ihre ***reciproke Polare*** genannt wird. Nämlich wird von der x^{ten} Polare einer Curve D^r, also von (5.)

$$E_x^{r(r+2x-3)(n-x)},$$

die $(n-x)^{\text{te}}$, d. i. die reciproke Polare genommen, so müfste diese die gegebene Curve D^r sein; nach der allgemeinen Formel (5.) ist sie aber, wenn $r(r+2x-3)(n-x)=s$ gesetzt wird, eine Curve vom $s[s+2(n-x)-3]x^{\text{ten}}$ Grad. Hier ist also der scheinbare Widerspruch noch auffallender, als bei der gewöhnlichen Polarität, wo die Basis nur ein Kegelschnitt, und für welchen Fall er durch ***Poncelet*** aufgeklärt worden. Hier wird das Paradoxon wie folgt erklärt.

Die erste Polare von D^r, in Bezug auf die Basis A^n, ist $E_1^{r(r-1)(n-1)}$, und für die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare von dieser giebt die Formel (7.)

$$E_{n-1}^{r(r-1)(n-1)[r(r-1)(n-1)+2n-5]}$$

statt dafs sie, vermöge der Reciprocität, blofs die ursprüngliche Curve D^r geben sollte. Dieses Wundersame klärt sich nun dadurch auf: dafs die Curve E_{n-1}

1) aus $(n-1)^2$ Mal der Curve D^r nebst deren $3r(r-2)$ Wendetangenten und $\frac{1}{2}r(r-2)(r^2-9)$ Doppeltangenten, wobei noch jede Wendetangente als eine 3fache und jede Doppeltangente als eine 2fache Gerade zu zählen ist, also aus $(n-1)^2 \times (D^r + 2d + 3w)$, und
2) aus den $3r(r-1)(n-1)(n-2)$ gemeinschaftlichen Tangenten der Curve D^r und der Kerncurve P_0

besteht.

Eine gegebene Curve Q^q kann von den Curven eines in derselben Ebene gegebenen Büschels $B(P^p)$ in $q(q+2p-3)$ Puncten R berührt werden, welche allemal mit den $3(p-1)^2$ Doppelpuncten des Büschels $B(P^p)$ zusammen in einer Curve R^{q+2p-3} liegen. — Sind in derselben Ebene irgend zwei Curvenbüschel $B(P^p)$ und $B(Q^q)$ gegeben, so ist der Ort des Puncts R, in welchem sich je zwei Curven beider Büschel berühren, eine Curve vom $(2p+2q-3)^{\text{ten}}$ Grad; und die Anzahl derjenigen Puncte R_1, in welchen sich zwei Curven P^p und Q^q beider Büschel osculiren, ist

$$= 3[(p+q)(p+q-6)+2pq+5].$$

Sind in einer Ebene drei beliebige Curven-Büschel $B(P^p)$, $B(Q^q)$ und $B(R^r)$ gegeben, so ist die Zahl derjenigen Puncte, in welchen je drei dieser Curven einander berühren, im Allgemeinen

$$= 4(pq+pr+qr)-6(p+q+r-1).$$

Für die Curven 3ten und 4ten Grads insbesondere ergeben sich aus der obigen allgemeinen Betrachtung viele, zum Theil ganz neue interessante Eigenschaften, wie leicht zu ermessen. Namentlich treten hier wiederum eigenthümliche Relationen der 28 Doppeltangenten der Curve 4ten Grads hervor, ein Gegenstand, über welchen bisherige Bemühungen noch wenig ermittelt haben. Über die Curve 3ten Grads bieten sich noch mehr specielle Fälle dar; dabei wird nachgewiesen, dafs das eigentliche Wesen vieler ihrer Eigenschaften vornehmlich auf der sogenannten ***Involution*** beruht.

Durch verschiedene Correlationssysteme werden theils analoge Resultate, wie durch die Polarität, theils aber auch neue Sätze über Curven gewonnen.

2.

Über solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunct haben, und über darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Curven, so wie über geradlinige Transversalen der letztern.

(Theils Auszug, theils Erweiterung eines am 26. Mai 1851 in der Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vortrags.)

(Vom Herrn Professor *J. Steiner*, zu Berlin.)

---

§. 1.

Die Curven zweiten Grads haben schon an sich Mittelpuncte, es ist eine ihnen inwohnende Eigenschaft. Anders verhält es sich mit den Curven höherer Ordnung. Wohl besitzen noch die Curven dritten Grads die Eigenschaft, dafs sie sich durch Projection in solche umwandeln lassen, welche Mittelpuncte haben; wogegen alle höheren Curven gewisse Beschränkungen zu erleiden haben, wenn ihnen die Eigenschaft eines Mittelpuncts zukommen soll.

Unter „***Mittelpunct***" einer Curve m^{ten} Grads, C^m, wird ein solcher in ihrer Ebene liegender Punct $\mathfrak{M}$ verstanden, welcher die Eigenschaft hat, dafs jede durch ihn gezogene unbegrenzte Gerade S, die Curve in solchen m Puncten schneidet, welche paarweise gleichweit von ihm abstehen, so dafs also die Schnittpuncte auf beiden Seiten von jenem Puncte $\mathfrak{M}$ gleich vertheilt sind, und jedem Punct p auf der einen Seite ein anderer p_1 auf der entgegengesetzten Seite, in gleichem Abstande von $\mathfrak{M}$, entsprechen mufs und sein „***Gegenpunct***" genannt wird. Hiernach möchte es scheinen, als könne eine Curve C^m nur dann einen Mittelpunct $\mathfrak{M}$ haben, wenn ihr Gradexponent m eine gerade Zahl ist, etwa $m = 2\mu$, weil nur dann in jeder Transversalen S zu beiden Seiten von $\mathfrak{M}$ gleichviel Schnitte liegen können, was dagegen, wenn m ungerade, $m = 2\nu - 1$, nicht möglich ist. Indessen wird dieser scheinbare Einwand dadurch beseitigt, dafs im letztern Falle ein einzelner Schnittpunct im Mittelpuncte $\mathfrak{M}$ selbst liegt, somit ein Zweig der Curve $C^{2\nu-1}$ durch ihren Mittelpunct selbst geht, wobei alsdann auf jeder Seite von diesem noch $\nu - 1$ Schnitte liegen, die sich paarweise als Gegenpuncte entsprechen; jener besondere Punct aber mufs nothwendig ein Wendepunct der Curve $C^{2\nu-1}$ sein.

In besondern Fällen kann die Curve C^m auch öfter durch ihren eigenen Mittelpunct $\mathfrak{M}$ gehen, und zwar verhält es sich damit, wie folgt. Ist $m = 2\mu$, so können insbesondere gleichzeitig 2, oder 4, oder 6, etc. Zweige der Curve $C^{2\mu}$ durch $\mathfrak{M}$ gehen, d. h. sie kann ihren Mittelpunct $\mathfrak{M}$ zugleich zum vielfachen Puncte haben, jedoch nur zum 2, 4, 6, ..., $2(\mu-1)$fachen. Und ist $m = 2\nu-1$, so mufs nothwendig *ein* Zweig der Curve $C^{2\nu-1}$ durch ihren Mittelpunct $\mathfrak{M}$ gehen, aber es können insbesondere auch 3, 5, 7, ... Zweige durch denselben gehen, wo er dann ein ebenso vielfacher Punct von ihr ist. In beiden Fällen sind die Tangenten im Mittelpuncte $\mathfrak{M}$ höherer Art, nämlich sie sind zugleich Wendetangenten der respectiven Zweige, und haben somit, wenn x Zweige durch $\mathfrak{M}$ gehen, daselbst $x+2$ Puncte mit der Curve gemein, was als eine $(x+2)$punctige Berührung anzusehen ist.

§. 2.

Zur Bestimmung solcher Curven C^m, welche Mittelpuncte haben, durch gegebene Puncte, kann entweder 1) der Mittelpunct $\mathfrak{M}$ selbst gegeben werden und nebstdem noch eine genügende Anzahl andere Puncte p, durch welche die Curve gehen soll; oder es können 2) blos solche beliebige Puncte p, durch welche die Curve gehen soll, gegeben und dazu verlangt werden, dafs dieselbe einen Mittelpunct $\mathfrak{M}$ haben müsse, dessen Lage dann durch jene Puncte erst bedingt wird. Bei dieser Bestimmung, so wie schon vorhin (§. 1.) und auch in der Folge, macht sich der Umstand geltend, ob der Gradexponent m eine *gerade* oder eine *ungerade* Zahl, also ob $\alpha)$ $m = 2\mu$, oder $\beta)$ $m = 2\nu-1$ ist; denn danach scheiden sich die Sätze folgendermafsen:

„Ist der Mittelpunct $\mathfrak{M}$ gegeben, so ist

$\alpha)$ *Die Curve $C^{2\mu}$ bestimmt durch* $(\mu+1)^2-1 = \frac{1}{4}m(m+4)$,

$\beta)$ *Die Curve $C^{2\nu-1}$ bestimmt durch* $\nu(\nu+1) = \frac{1}{4}[m(m+4)-1]$

beliebige andere gegebene Puncte p, durch welche sie gehen soll." *)

---

*) Zur Bestimmung der Curven, welche Mittelpuncte haben, bietet die Gleichung derselben ein anschauliches und bequemes Mittel dar. Wenn nämlich die in beliebig schiefwinkligen Coordinaten, nach den Dimensionen der Veränderlichen (x und y) geordnete Gleichung einer Curve C^m, von der höchsten Dimension abwärts nur die abwechselnden Dimensionen enthält, alle übrigen gleich Null sind, wenn somit die Gleichung von der Form

$$D^m + D^{m-2} + D^{m-4} + \ldots + D^{m-2\alpha+2} + \ldots = 0$$

ist, so hat die Curve allemal den Anfangspunct zugleich zu ihrem Mittelpuncte $\mathfrak{M}$. Werden

Da im Allgemeinen eine Curve m^{ten} Grads durch

$$\gamma) \quad \tfrac{1}{2}m(m+3)$$

Puncte p bestimmt wird, so sieht man, wieviele bestimmende Puncte p durch den gegebenen Mittelpunct vertreten werden, nämlich

„*Der Mittelpunct* $\mathfrak{M}$ *vertritt*

α^0) bei $C^{2\mu}$: $\quad \mu(\nu+1) = \tfrac{1}{4}m(m+2)$,

β^0) bei $C^{2\nu-1}$: $\quad \nu^2 = \tfrac{1}{4}[m(m+2)+1]$

bestimmende Puncte p."

Aber der gegebene Mittelpunct bedingt noch mehr; denn mit ihm sind auch zugleich alle Gegenpuncte p_1 zu den gegebenen Puncten p bestimmt oder als gegeben anzusehen, durch welche die Curve nothwendig ebenfalls geht, so dafs also zusammen beziehlich (α und β)

$$\tfrac{1}{2}m(m+2) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}[m(m+2)+1]$$

Puncte p und p_1 gegeben sind, somit mehr, als die Bestimmung der Curve im Allgemeinen erheischt oder zuläfst (γ), und zwar sind

für $C^{2\mu}$: $\quad \mu = \tfrac{1}{2}m$,

für $C^{2\nu-1}$: $\quad \nu - 1 = \tfrac{1}{2}(m-1)$

Puncte mehr gegeben, ohne dafs dadurch die Curve überbestimmt wird. Den obigen Satz kann man danach auch so aussprechen:

„*Sind* $\mu(\mu+2)(=\tfrac{1}{4}m(m+4))$, *oder* $\nu(\nu+1)-1(=\tfrac{1}{4}[m(m+4)-1])$ *beliebige begrenzte Gerade oder Sehnen* pp_1 *gegeben, die alle durch den-*

---

die zwei Zahlformen von m unterschieden, so hat man folgende zwei Gleichungen:

I. $\quad D^{2\mu} + D^{2\mu-2} + D^{2\mu-4} + \ldots + D^2 + D^0 = 0$; für $C^{2\mu}$,

II. $\quad D^{2\nu-1} + D^{2\nu-3} + D^{2\mu-5} + \ldots + D^3 + D^1 = 0$; für $C^{2\nu-1}$.

Je nachdem also der Gradexponent *gerad* oder *ungerad* ist, enthält die Mittelpuncts-Gleichung der Curve C^m auch nur die Glieder von *gerader* oder *ungerader* Dimension, indem alle übrigen $= 0$ sein müssen. In (I.) bezeichnet D^0 das constante Glied. Dafs die Curve $C^{2\nu-1}$ nothwendig durch ihren eigenen Mittelpunct geht, ist aus (II.) ersichtlich.

Da jede Dimension ein Glied mehr umfafst, als ihr Exponent anzeigt, z. B. da D^α die $\alpha+1$ Glieder

$$y^\alpha,\ y^{\alpha-1}x,\ y^{\alpha-2}x^2,\ \ldots\ yx^{\alpha-1},\ x^\alpha,$$

abgesehen von den Coëfficienten, umfafst, so ist die Zahl aller Glieder in den beiden Gleichungen

in (I.): $\quad = (\mu+1)^2 = \tfrac{1}{4}(m+2)^2$,

in (II.): $\quad = \nu(\nu+1) = \tfrac{1}{4}(m+1)(m+3)$.

Daraus ist zu entnehmen, durch wieviele gegebene Puncte p eine Curve C^m bestimmt wird, wenn sie durch dieselben gehen und einen andern gegebenen Punct $\mathfrak{M}$ zum Mittelpunct haben soll.

selben Punct $\mathfrak{M}$ *gehälftet werden, so liegen ihre* $2\mu(\mu+2)$ *oder* $2\nu(\nu+1)-2$ *Endpuncte* p *und* p_1 *allemal in einer durch sie bestimmten Curve* $C^{2\mu}$ *oder* $C^{2\nu-1}$, *welche den Punct* $\mathfrak{M}$ *zum Mittelpunct hat.*"

§. 3.

Läfst man von den genannten Sehnen pp_1 eine weg, so ist die Curve durch die Endpuncte der übrigen nicht mehr bestimmt, aber durch jeden Punct p^0, den man frei annimmt und durch den sie gehen soll, wird sie bestimmt (weil dann nebst $\mathfrak{M}$ wieder eben soviele p gegeben sind, wie vorhin), so dafs also unendlich viele Curven C^m durch diese übrigen Endpuncte möglich sind, die $\mathfrak{M}$ zum Mittelpunct haben. Aber alle diese Curven schneiden einander, aufser den Endpuncten der Sehnen, noch in anderen bestimmten Puncten q und q_1, deren Zahl beziehlich $2(\mu-1)^2$ und $2(\nu-1)(\nu-2)+1$ ist, so dafs sie ein Curvenbüschel $B(C^m)$ mit m^2 Grundpuncten bilden (s. den obigen Monatsbericht). Die neuen Puncte sind eben so paarweise die Endpuncte von Sehnen qq_1, welche ihre Mitten in $\mathfrak{M}$ haben; und im zweiten Falle, wo $m=2\nu-1$, liegt der ungerade oder einzelne Punct, etwa q_0, in $\mathfrak{M}$ selbst. Also:

„*Sind* $\mu(\mu+2)-1$ *oder* $\nu(\nu+1)-2$ *beliebige Sehnen* pp_1 *gegeben, die alle durch denselben Punct* $\mathfrak{M}$ *gehälftet werden, so gehen durch ihre Endpuncte ein Curvenbüschel* $B(C^{2\mu})$ *oder* $B(C^{2\nu-1})$, *welche alle den Punct* $\mathfrak{M}$ *zum Mittelpunct haben, und deren übrige* $2(\mu-1)^2$ *oder* $2(\nu-1)(\nu-2)+1$ *gemeinschaftliche Schnittpuncte* (q *und* q_1) *ebenfalls paarweise die Endpuncte solcher Sehnen* qq_1 *sind, die ihre Mitten in* $\mathfrak{M}$ *haben. Im zweiten Falle liegt der einzelne Punct* q_0 *im Mittelpuncte* $\mathfrak{M}$ *selbst, so dafs alle Curven des Büschels* $B(C^{2\nu-1})$ *durch ihren gemeinsamen Mittelpunct gehen, der zugleich ein Wendepunct von jeder ist.*"

So gehen also z. B. durch die vier Endpuncte zweier Sehnen pp_1 ein Kegelschnitt-Büschel $B(C^2)$, welche alle $\mathfrak{M}$ zum Mittelpunct, die beiden Sehnen zu Durchmessern, aber weiter keinen Punct gemein haben, weil $2(\mu-1)^2=0$, wenn $\mu=1$ ist. Durch die 8 Endpuncte von 4 Sehnen pp_1 gehen ein $B(C^3)$, die noch einen 9ten Punct q_0 gemein haben müssen, welcher der Mittelpunct $\mathfrak{M}$ selbst und zugleich Wendepunct von jeder ist. Durch die 14 Endpuncte von 7 Sehnen pp_1 gehen ein $B(C^4)$, welche $\mathfrak{M}$ zum Mittelpunct haben und sich noch in den Endpuncten einer neuen Sehne qq_1 schneiden, die gleichfalls ihre Mitte in $\mathfrak{M}$ hat; u. s. w.

Einige andere Eigenschaften der obigen Curvenbüschel treten weiter unten gelegentlich hervor.

§. 4.

Zum Behuf späterer Betrachtungen mag hier bemerkt werden, dafs eine Curve C^m, welche einen Mittelpunct hat, auch in solcher specieller Form erscheinen kann, wo sie aus verschiedenen Theilen besteht. So kann z. B. der Kegelschnitt C^2

1) *Durch zwei sich schneidende Gerade A und B vertreten werden, deren Schnittpunct als Mittelpunct* $\mathfrak{M}$ *anzusehen ist;* oder

2) *Durch zwei parallele Gerade,* $A \# B$, *wo dann der Mittelpunct unbestimmt bleibt, nämlich jeder Punct sein kann, welcher von A und B gleichweit absteht, also eine dritte Gerade C zum Ort hat, die mit A und B parallel und in der Mitte zwischen ihnen liegt.*

Gleicherweise kann eine Curve C^3, welche einen Mittelpunct haben soll, insbesondere durch folgende Elemente vertreten werden.

1) *Durch einen Kegelschnitt* C^2 *und irgend eine durch seinen Mittelpunct gehende Gerade* C^1, *wobei der Mittelpunct* $\mathfrak{M}$ *von* C^2 *auch zugleich als Mittelpunct von* C^3 $(= C^2 + C^1)$ *anzusehen ist.* (Gilt also auch, wenn C^2 eine Parabel und C^1 irgend ein Durchmesser derselben ist.)

2) *Durch drei Gerade und zwar* a) *durch drei sich in einem Punct schneidende Gerade, wo dann dieser Punct selbst der Mittelpunct ist* (hierin sind auch die zwei besondern Zustände inbegriffen, wo die drei Geraden parallel, oder zwei parallel und die dritte im Unendlichen); oder b) *durch zwei parallele und eine sie schneidende Gerade, wobei die Mitte des von jenen beiden auf der letztern begrenzten Stücks der Mittelpunct ist; oder endlich* c) *durch drei parallele Gerade, wenn die eine gleich weit von den beiden andern absteht, wobei dann jeder Punct in der mittlern Geraden als Mittelpunct anzusehen ist.*

Analogerweise kann die Curve C^4 in Theile zerfallen; u. s. w.

§. 5.

Die obige zweite Frage (§. 2.) verlangt zu wissen: „*Wieviele beliebige Puncte p dürfen höchstens gegeben werden, wenn durch dieselben eine Curve* C^m *gehen soll, welche einen Mittelpunct hat, der aber nicht gegeben ist.*"

Man überzeugt sich leicht, dafs unter dieser Bedingung nur zwei Puncte p mehr gegeben werden dürfen, als im obigen Falle (§. 2.), wo der Mittelpunct $\mathfrak{M}$ selbst mit gegeben war. Denn sobald nur *ein* Punct, etwa q, mehr

gegeben, so kann $\mathfrak{M}$ schon nicht mehr beliebig liegen, sondern mufs sich auf einen Ort beschränken, der irgend eine Curve $\mathfrak{M}^x$ sein wird; und wenn man statt q einen andern beliebigen Punct r als gegeben annimmt, so wird der Mittelpunct $\mathfrak{M}$ der Curve C^m einen andern Ort, etwa $\mathfrak{M}_1^x$, haben; und soll nun eine Curve C^m durch beide Puncte q und r gehen, so kann ihr Mittelpunct $\mathfrak{M}$ nur in einem den Ortscurven $\mathfrak{M}^x$ und $\mathfrak{M}_1^x$ gemeinsamen Puncte liegen. Da diese Ortscurven sich aber in mehreren Puncten schneiden, so wird die Curve C^m nicht absolut bestimmt sein, sondern die gestellten Bedingungen werden mehrere Lösungen gestatten. Also:

„Soll eine Curve C^m einen Mittelpunct haben, so ist sie

α) als $C^{2\mu}$ durch $\mu(\mu+2)+2 = \frac{1}{4}[m(m+4)+8]$,

β) als $C^{2\nu-1}$ durch $\nu(\nu+1)+1 = \frac{1}{4}[m(m+4)+7]$

beliebig gegebene Puncte p bestimmt, jedoch nicht absolut bestimmt, sondern es finden im Allgemeinen mehrere Lösungen statt.“

Wie es sich damit näher verhält, ist aus den nachfolgenden zwei einfachsten Beispielen zu ersehen.

§. 6.

Erstes Beispiel. Soll ein Kegelschnitt C^2 durch 4 gegebene Puncte $3p$ und q gehen, so ist der Ort seines Mittelpuncts $\mathfrak{M}$ ein bestimmter anderer Kegelschnitt $\mathfrak{M}^2$; und soll C^2 durch die $3p$ und einen anderen gegebenen Punct r gehen, so ist der Ort seines Mittelpuncts ein neuer Kegelschnitt $\mathfrak{M}_1^2$. Nun schneiden sich die beiden Örter $\mathfrak{M}^2$ und $\mathfrak{M}_1^2$ zwar in 4 Puncten: aber von diesen 4 Puncten besitzt nur einer die Eigenschaft, dafs er der Mittelpunct $\mathfrak{M}$ eines Kegelschnitts C^2 ist, welcher durch die 5 Puncte $3p$, q und r geht; die drei übrigen haben diese Eigenschaft nicht, denn sie sind die Mitten der Seiten desjenigen Dreiecks, dessen Ecken die $3p$ sind, und hängen somit von diesen $3p$ allein ab. Nämlich bezeichnet man die $3p$ durch a, b, c, so geht bekanntlich der genannte Kegelschnitt $\mathfrak{M}^2$ durch die Mitten der 6 Seiten des vollständigen Vierecks $abcq$; und eben so geht $\mathfrak{M}_1^2$ durch die Mitten der 6 Seiten des vollständigen Vierecks $abcr$: somit gehen beide durch die Mitten der 3 Seiten des Dreiecks abc, aber jede dieser 3 Mitten ist Mittelpunct zweier verschiedener Kegelschnitte C^2, wovon der eine dem Viereck $abcq$, der andere dem Viereck $abcr$ umschrieben ist.

§. 7.

Zweites Beispiel. I. Die Curve C^3 ist durch den gegebenen Mittelpunct $\mathfrak{M}$ und durch 5 Puncte p, durch welche sie gehen soll, bestimmt; ist

nun die Lage von $\mathfrak{M}$ nicht gegeben, aber dagegen noch ein 6ter Punct q, durch welchen C^3 gehen soll, so findet folgender Satz statt:

„Soll eine Curve dritten Grads, C^3, durch gegebene 6 Puncte $5p$ und q gehen, und einen Mittelpunct $\mathfrak{M}$ haben, so ist der Ort des letztern eine Curve 5ten Grads, $= \mathfrak{M}^5$."

Von dieser Ortscurve $\mathfrak{M}^5$ sind nachstehende 57 Puncte theils unmittelbar gegeben, theils leicht zu construiren, indem sie die Mittelpuncte specieller Curven C^3 sind. Nämlich die Curve $\mathfrak{M}^5$ geht:

1) *Durch die gegebenen 6 Puncte selbst;* denn jeden derselben kann man als $\mathfrak{M}$ annehmen und verlangen, die Curve C^3 soll durch die 5 übrigen gehen (§. 2.).

2) *Durch die Mitten μ der 15 Geraden G, welche die gegebenen 6 Puncte paarweise verbinden;* denn man kann die Mitte μ einer solchen Geraden G als $\mathfrak{M}$ annehmen und verlangen, die C^3 soll durch den einen Endpunct von G und durch die 4 übrigen gegebenen Puncte gehen; so geht sie auch zugleich durch den andern Endpunct von G.

3) *Durch die Mittelpuncte m der 6 Kegelschnitte C^2, welche einzeln durch je 5 der gegebenen 6 Puncte gehen.* Denn ein solcher C^2 und sein durch den 6ten Punct gehender Durchmesser sind zusammen eine specielle C^3, welche mit C^2 den Mittelpunct gemein hat (§. 4.).

4) *Durch die Mittelpuncte m_1 der 30 Kegelschnitte C_1^2, wovon jeder einzeln durch 4 der gegebenen 6 Puncte geht und seinen Mittelpunct in der die 2 übrigen verbindenden Geraden G hat.* Denn ein solcher C_1^2 und die zugehörige G sind zusammen eine C^3, welche durch alle 6 Puncte geht und mit C_1^2 denselben Mittelpunct hat. In jeder Geraden G liegen 2 Mittelpuncte m_1.

Dies sind zusammen 57 Puncte: 1) $5p+q$; 2) 15μ; 3) $6m$; und 4) $30m_1$.

In jeder der 15 Geraden G kennt man demnach alle ihre 5 Schnitte mit der Curve $\mathfrak{M}^5$: nämlich ihre zwei Endpuncte ($2p$, oder p und q), ihre Mitte μ und die in ihr liegenden $2m_1$.

Um die Bestimmung der 30 Mittelpuncte m_1 deutlicher zu machen, bezeichne man die $5p$ durch a, b, c, d, e. Je 4 der gegebenen 6 Puncte, etwa a, b, c und d, bestimmen $6G$, deren Mitten, 6μ, in einem Kegelschnitte $\mathfrak{M}^2$ liegen, welcher der Ort der Mittelpuncte aller durch a, b, c und d gehenden Kegelschnitte (C_1^2) ist (§. 6.), und welcher somit die durch e und q

gehende G in den genannten $2m_1$ schneidet; ferner geht $\mathfrak{M}^2$ auch durch die Mittelpuncte, $2m$, der beiden Kegelschnitte C^2, welche beziehlich durch die 5 Puncte *abcde* und *abcdq* bestimmt werden (3); folglich kennt man auch alle Schnitte des Kegelschnitts $\mathfrak{M}^2$ mit der Curve $\mathfrak{M}^5$, nämlich die genannten 6μ, $2m_1$ und $2m$, zusammen $= 10$ Schnitte. Es giebt im Ganzen 15 solche Kegelschnitte $\mathfrak{M}^2$.

II. Durch das Vorstehende (I.) läfst sich nunmehr auch leicht entscheiden, wieviele Curven C^3, welche Mittelpuncte haben, durch 7 gegebene Puncte $5p$, q und r gehen. Denn soll die C^3 nur durch die 6 Puncte $5p$ und r gehen, so ist gleicherweise, wie vorhin (I.), der Ort ihres Mittelpuncts $\mathfrak{M}$ eine neue Curve $\mathfrak{M}_1^5$; und soll also C^3 durch alle 7 Puncte zumal gehen, so mufs ihr Mittelpunct in beiden Ortscurven $\mathfrak{M}^5$ und $\mathfrak{M}_1^5$ zugleich liegen, d. h. er mufs einer ihrer gegenseitigen Schnitte sein. Nun ist die Zahl dieser Schnitte $= 25$; allein nach der obigen Auseinandersetzung befinden sich darunter 16 solche, welche der Forderung nicht genügen können, weil sie von den $5p$ allein abhängen, nämlich dieselben sind 1) die $5p$ selbst, 2) 10μ, d. h. die Mitten der durch die $5p$ bestimmten 10 Geraden G, und 3) ein m, der Mittelpunct des durch die $5p$ gehenden Kegelschnitts C^2; denn durch diese 16 Puncte gehen beide Ortscurven; daher bleiben für die Lage des Mittelpuncts $\mathfrak{M}$ der Curve C^3 nur 9 Schnittpuncte übrig. Dies begründet den folgenden Satz:

„Durch 7 gegebene Puncte in einer Ebene gehen, im Allgemeinen, nur 9 solche Curven dritten Grads, welche Mittelpuncte haben."

Daraus schliefst man: *a) Dafs unter den unendlich vielen Curven dritten Grads A^3, welche durch beliebig gegebene 8 Puncte gehen, und somit einen Curvenbüschel $B(A^3)$ mit 9 gemeinschaftlichen Puncten bilden, sich im Allgemeinen keine befindet, welche einen Mittelpunct hat. b) Hat aber insbesondere eine der Curven einen Mittelpunct, so braucht deshalb von den übrigen keine einen Mittelpunct zu haben. c) Befinden sich insbesondere zwei darunter, welche Mittelpuncte haben, aber nicht concentrisch sind, so kann von den übrigen keine einen Mittelpunct haben, d. h. „durch die Schnittpuncte zweier Curven A^3, welche Mittelpuncte haben, aber nicht concentrisch sind, kann keine dritte gehen, welche ebenfalls einen Mittelpunct hat." d) Weifs man von drei Curven A^3, dafs sie 8 Puncte gemein haben und dafs jede einen Mittelpunct hat: so folgt, dafs sie concentrisch sein müssen, und dafs alle zu ihrem Büschel ge-*

hörigen Curven ebenfalls Mittelpuncte haben und mit ihnen concentrisch sind, und dafs jene 8 (oder 9) Puncte die oben (§. 3.) *beschriebene besondere Lage haben müssen.* — Analoges findet bei den höheren Curven statt.

§. 8.

In Betracht der Ortscurve $\mathfrak{M}^5$ (§. 7. I.) sind durch besondere Wahl der gegebenen 6 Puncte, $5p$ und q, oder a, b, c, d, e und q, zahlreiche specielle Fälle möglich, von denen einige hier kurz angedeutet werden sollen.

I. *Wenn die gegebenen 6 Puncte in einem Kegelschnitte C_0^2 liegen, dessen Mittelpunct $\mathfrak{M}_0$ heifsen mag:* so vereinigen sich die dort genannten 6 Kegelschnitte C^2 (§. 7. I. 3.) alle in C_0^2 und ihre sechs Mittelpuncte m in $\mathfrak{M}_0$. Da C_0^2 mit jedem seiner Durchmesser C_0^1 zusammen eine C^3 vorstellt, welche durch die 6 Puncte geht und $\mathfrak{M}_0$ zum Mittelpunct hat: *so folgt dafs $\mathfrak{M}_0$ ein vielfacher Punct der Curve $\mathfrak{M}^5$ sein mufs.* — Oder, wenn der durch die 5 Puncte a, b, c, d, e gehende Kegelschnitt C^2 den 6ten Punct q zum Mittelpunct hat, so folgt eben so, *dafs dann die Curve $\mathfrak{M}^5$ den Punct q zum Doppelpunct haben mufs.*

II. *Liegen von den 6 Puncten drei, etwa d, e und q, in einer Geraden B: so mufs $\mathfrak{M}^5$ in diese Gerade und in eine Curve $\mathfrak{M}^4$ zerfallen, so dafs* $\mathfrak{M}^5 = B + \mathfrak{M}^4$. Denn jeder beliebige Punct $\mathfrak{N}$ in der Geraden B ist Mittelpunct eines Kegelschnitts $\mathfrak{N}^2$ der durch die 3 Puncte a, b, c geht, und der also mit B zusammen eine Curve C^3 repräsentirt, welche durch die 6 Puncte geht und ihren Mittelpunct $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{N}$ hat; so dafs folglich B zum Ort der Mittelpuncte $\mathfrak{M}$ gehört. — Die Curve $\mathfrak{M}^4$ geht durch folgende leicht angebbare 39 Puncte. 1) Durch a, b und c; 2) durch die Mitten μ sowohl der $3G$, welche die Puncte a, b, c unter sich, als der $9G$, welche a, b, c mit d, e, q verbinden, also durch 12μ; 3) durch die Mittelpuncte m der $3C^2$, welche beziehlich durch die dreimal 5 Puncte $abcde$, $abcdq$, $abceq$ gehen; 4) durch 18 Puncte m_1, in welchen die vorgenannten $9G$ von den ihnen (wie oben §. 7. I.) entsprechenden Kegelschnitten $\mathfrak{M}^2$ geschnitten werden; und ferner durch 3 Puncte m_1, in welchen die vorgenannten $3G$, d. i. ab, ac, bc beziehlich von 3 Geraden C_1, B_1, A_1 geschnitten werden, die so bestimmt sind, dafs z. B. C_1 durch die Mitten μ der 3 Geraden cd, ce und cq geht und die ab in m_1 trifft. Demnach kennt man die 4 Schnitte von jeder der 15 Geraden $3G$, $9G$, A_1, B_1 und C_1 mit der Curve $\mathfrak{M}^4$; eben so die 8 Schnitte von jedem der 9 Kegelschnitte $\mathfrak{M}^2$ mit $\mathfrak{M}^4$.

III. *Liegen die 6 Puncte zu 3 und 3 in zwei Geraden, etwa a, b, c in A, und d, e, q in B: so muſs die Ortscurve* $\mathfrak{M}^5$ *aus diesen Geraden und aus einer Curve* $\mathfrak{M}^3$ *bestehen, so daſs* $\mathfrak{M}^5 = A + B + \mathfrak{M}^3$. Die Curve $\mathfrak{M}^3$ geht durch folgende, leicht construirbare, 27 Puncte. 1) Durch 9μ, die Mitten der $9G$, welche die Puncte in A mit denen in B verbinden; 2) durch die $18m_1$, in welchen die $9G$ von den zugehörigen $9\mathfrak{M}^2$ geschnitten werden. Somit kennt man die 3 Schnitte jeder der $9G$ mit $\mathfrak{M}^3$. Jene 9μ liegen auch zu 3 und 3 in 6 Geraden, $3A_1$ und $3B_1$, wovon die $3A_1$ mit A, und die $3B_1$ mit B parallel sind.

IV. Gehen von den 15 G, welche die 6 Puncte paarweise verbinden, irgend 3 G, die zusammen alle 6 Puncte enthalten, etwa die 3 Geraden ab, cd und eq, durch irgend einen Punct N, so vertreten sie eine C^3, deren Mittelpunct $\mathfrak{M}$ in N liegt (§. 4.). Sind insbesondere die 3 Geraden ab, cd, eq parallel und liegt cd in der Mitte zwischen den beiden andern: so zerfällt $\mathfrak{M}^5$ in die Gerade cd und in eine Curve $\mathfrak{M}^4$, von der 46 Puncte leicht anzugeben sind, nämlich aufser a, b, e, q noch 10μ, $6m$ und $26m_1$. Sind zum zweiten Mal drei Gerade parallel und die mittlere gleichweit von den äufsern entfernt, welche jedoch nur (wenn man sich bei jenen erstern ab, cd, eq die Endpuncte a, c, e nach links und b, d, q nach rechts denkt) entweder α) die Geraden ac, be, dq oder β) ae, cq, bd sein können: so müssen nothwendig zum dritten Mal 3 Gerade dieselbe Eigenschaft haben, und zwar beziehlich (α) bd, aq, ce oder (β) bc, be, ce. In beiden Fällen schneiden sich die 3 mittleren Geraden cd, be, aq oder cd, cq, be in einem und demselben Puncte N_0; aber im Falle (α) sind sie die Hauptdiagonalen eines Sechsecks $abdqeca$, welches die 3 Paar äufseren Geraden zu Gegenseiten hat, wogegen im Falle (β) die 3 Geraden des dritten Systems, bc, be, ce in eine und dieselbe Gerade, bce, fallen und wobei N_0 in c liegt. Für beide Figuren besteht $\mathfrak{M}^5$ aus den drei mittlern Geraden, cd, be, aq oder cd, cq, be, und aus einem Kegelschnitte $\mathfrak{M}^2$, welcher bei der ersten Figur die Seiten des genannten Sechsecks in ihren Mitten berührt und N_0 zum Mittelpunct hat; etc. — Die 6 Puncte können endlich auch solche specielle Lage haben, dafs von den $15G$ sich 10 mal $3G$, die zusammen alle 6 Puncte enthalten, in einem Puncte N treffen, wobei dann $\mathfrak{M}^5$ in 5 Gerade $\mathfrak{M}^1$ zerfällt. Die einfachste Figur, diesen Fall darzustellen, ist die, wo etwa a, b, c, d, e die Ecken eines regelmäfsigen Fünfecks sind und q der Mittelpunct des demselben umschriebenen Kreises. Die 5 Geraden $\mathfrak{M}^1$ sind alsdann qa, qb, qc, qd und qe;

die 10 Puncte N liegen paarweise in ihnen und sind, zu 5 und 5, die Ecken zweier neuen regelmäfsigen Fünfecke, welche gleichfalls q zum Centrum haben. In diesem Falle ist jedoch keine eigentliche Curve C^3 mehr möglich, sondern jede besteht aus C^2+C^1, und zwar ist C^1 immer diejenige von den 5 Geraden $\mathfrak{M}^1$, in welcher der Mittelpunct $\mathfrak{M}$ von C^2 liegt. Liegt $\mathfrak{M}$ insbesondere in einem der 10 N, so besteht C^3 aus 3 Geraden, $=3C^1$.

§. 9.

Die Curven, welche Mittelpuncte haben, besitzen, in Bezug auf dieselben, verschiedene wesentliche Eigenschaften, wovon einige hier näher angegeben werden sollen.

Zur Abkürzung soll dabei, so wie in der Folge

ein Doppelpunct durch *dp* oder $\mathfrak{p}_2$,
eine Doppeltangente durch *dt* oder $\mathfrak{T}_2$,
ein Wendepunct durch *wp* oder $\mathfrak{w}$,
eine Wendetangente durch *wt* oder $\mathfrak{W}$,
ein Rückkehrpunct durch *rp* oder $\mathfrak{r}$,
eine Rückkehrtangente durch *rt* oder $\mathfrak{R}$,
eine Asymptote durch A_s und
die unendlich entfernte Gerade der Ebene durch G_x

bezeichnet werden.

I. ***Hat eine Curve C^m einen Mittelpunct $\mathfrak{M}$, so gehen ihre m Asymptoten A_s, im Allgemeinen, alle durch denselben. Jede andere durch den Mittelpunct gehende Tangente der Curve ist nothwendig eine Doppeltangente $\mathfrak{T}_2$, und ihre zwei Berührungspuncte, etwa b und b_1, sind Gegenpuncte. Die Zahl der durch $\mathfrak{M}$ gehenden $\mathfrak{T}_2$ ist $=\frac{1}{2}m(m-2)$, und ihre $m(m-2)$ Berührungspuncte, b und b_1, liegen in einer neuen Curve C^{m-2}, welche ebenfalls einen Mittelpunct, und zwar mit der gegebenen den nämlichen Punct $\mathfrak{M}$ zum Mittelpunct hat. Von dieser neuen Curve gehen also eben so alle A_s so wie eine ihrem Grad angemessene Zahl $\mathfrak{T}_2$ durch den Mittelpunct $\mathfrak{M}$, und die Berührungspuncte der $\mathfrak{T}_2$ liegen in einer neuen Curve C^{m-4}, welche gleicherweise denselben Punct $\mathfrak{M}$ zum Mittelpunct hat; u. s. w.*** Werden die zwei Zahlformen von m unterschieden, so entstehen auf diese Weise zwei Curvenreihen:

$\alpha)$ $C^{2\mu}$, $C^{2\mu-2}$, $C^{2\mu-4}$, ..., C^4, C^2;
$\beta)$ $C^{2\nu-1}$, $C^{2\nu-3}$, $C^{2\nu-5}$, ..., C^3, C^1.

Bei (α) hat die vorletzte Curve, C^4, noch $4\mathfrak{T}_2$ mit 8 Berührungspuncten, durch welche die letzte, C^2, geht; und diese C^2 hat nur noch $2A_s$, aber keine $\mathfrak{T}_2$ mehr. Da für $C^{2\nu-1}$ die Zahl der durch ihren Mittelpunct gehenden $\mathfrak{T}_2 = 2\nu(\nu-2)+\frac{3}{2}$ ist, so hat das vorletzte Glied bei (β), C^3, nur $\frac{3}{2}\mathfrak{T}_2$, was offenbar ihre Wendetangente im Mittelpuncte $\mathfrak{M}$ bedeutet, und das letzte Glied C^1 ist diese *wt* selbst. Übrigens haben alle Curven der Reihe (β) diese nämliche C^1 zur gemeinschaftlichen *wt*, so dafs dieselben in ihrem gemeinsamen Mittel- und Wendepunct $\mathfrak{M}$ sich insgesammt dreipunctig berühren. Auch für die Curve $C^{2\nu-1}$ bedeutet der Bruch, $\frac{3}{2}$, die Wendetangente im Punct $\mathfrak{M}$ selbst, und die Zahl der eigentlichen Doppeltangenten ist $= 2\nu(\nu-2)$.

II. ***Die Tangenten in je zwei Gegenpuncten p und p_1 der Curve C^m sind parallel. Alle ausgezeichneten Elemente der Curve, als da sind dp, wp, rp, dt, wt und rt, wofern sie nicht im Mittelpunct $\mathfrak{M}$ oder im Unendlichen, in G_∞ liegen, müssen paarweise vorhanden und zwar Gegenelemente sein. D. h. die $3m(m-2)\mathfrak{w}$ der Curve müssen paarweise Gegenpuncte, und die jedem Paar zugehörigen $\mathfrak{W}$ müssen parallel sein; die $\frac{1}{2}m(m-2)(m^2-10)\mathfrak{T}_2$, die nicht durch den Mittelpunct $\mathfrak{M}$ gehen, müssen paarweise parallel sein und gleich weit von $\mathfrak{M}$ abstehen, auch sind die Berührungspuncte jedes Paars beziehlich Gegenpuncte; hat die Curve Doppelpuncte, $\mathfrak{p}_2$, (die weder in $\mathfrak{M}$ noch in G_∞ liegen), so müssen dieselben paarweise vorhanden und Gegenpuncte sein, auch müssen die zwei Tangenten in dem einen $\mathfrak{p}_2$, denen in seinem Gegenpuncte beziehlich parallel sein; eben so können auch die Rückkehrpuncte $\mathfrak{r}$ nur paarweise und zwar als Gegenpuncte auftreten, und die zugehörigen Rükkehrtangenten müssen parallel sein. Hat dagegen die Curve einen Doppelpunct, der insbesondere im Unendlichen, in G_∞, (oder in $\mathfrak{M}$) liegt, so bedingt derselbe nicht gleicherweise einen zweiten, vielmehr bewirkt er umgekehrt sogar noch eine scheinbare Abweichung von dem obigen Satze* (I.). *Nämlich, liegt ein Doppelpunct in G_∞, so erscheinen die beiden Tangenten in demselben als zwei parallele Asymptoten, die, jenem Satze entgegen, nicht durch den Mittelpunct $\mathfrak{M}$ gehen, wohl aber gleichweit von $\mathfrak{M}$ abstehen; daher kann G_∞ selbst nie Tangente der Curve in einem Doppelpuncte sein. Und liegt ferner ein Rükkehrpunct in G_∞, so mufs die Rückkehrtangente entweder auf G_∞ fallen oder durch $\mathfrak{M}$ gehen, wo sie dann im letztern Falle als zweifache (oder im weitern Sinne als fünffache) Asymptote anzusehen ist.*

III. Zieht man durch den Mittelpunct $\mathfrak{M}$ der Curve C^m irgend eine unbegrenzte Gerade, einen Durchmesser S, so liegen in ihm $\frac{1}{2}m$ Paare Gegenpuncte q und q_1, oder $\frac{1}{2}m$ Sehnen qq_1, und die Tangenten in jedem dieser Punctenpare sind parallel, und zwar hat jedes Tangentenpaar, im Allgemeinen, eine besondere Richtung, so dafs, wenn man diese Richtungen der Tangenten, wie beim Kegelschnitt, dem Durchmesser S (oder den respectiven Sehnen qq_1) „*conjugirt*" nennen wollte, alsdann zu demselben Durchmesser $\frac{1}{2}m$ verschiedene conjugirte Richtungen gehörten. Eben so würden umgekehrt zu jeder bestimmten Richtung der Tangenten auch mehrere conjugirte Durchmesser gehören; denn nach jeder gegebenen Richtung R, d. h. mit irgend einer gegebenen Geraden R parallel, sind im Allgemeinen $m(m-1)$ Tangenten möglich, deren Berührungspuncte nothwendig paarweise Gegenpuncte oder Endpuncte von Sehnen qq_1 sein müssen, so dafs also einer und derselben Richtung R, in dieser Hinsicht, $\frac{1}{2}m(m-1)$ verschiedene Durchmesser S (oder Sehnen qq_1) conjugirt sind. In diesem Sinne kann man also sagen: „***Zu jedem Durchmesser S gehören $\frac{1}{2}m$ conjugirte Richtungen R, und zu jeder Richtung R gehören $\frac{1}{2}m(m-1)$ conjugirte Durchmesser S oder Sehnen qq_1.***" *)

Nun liegen ferner die $m(m-1)$ Berührungspuncte jedes Systems paralleler Tangenten bekanntlich in einer neuen Curve C^{m-1}, welche die erste Polare des nach der Richtung der Tangenten im Unendlichen, in G_∞, gedachten Pols P_∞ heifst; und da die Berührungspuncte paarweise Gegenpuncte, oder die Endpuncte von $\frac{1}{2}m(m-1)$ Sehnen qq_1 sind, so mufs diese Curve ebenfalls den Punct $\mathfrak{M}$ zum Mittelpunct haben. Gleicherweise müssen die 2te, 3te, ..., $(m-1)^{\text{ste}}$ Polare desselben Pols P_∞ in Bezug auf die gegebene Curve C^m, welche nach der Reihe C^{m-2}, C^{m-3}, ... C^2, C^1 sind, den nämlichen Punct $\mathfrak{M}$ zum Mittelpunct haben, wobei die letzte, C^1, eine durch $\mathfrak{M}$ gehende Gerade, ein Durchmesser von jeder der übrigen Polaren, so wie von C^m ist. Also:

„***Hat eine Curve C^m einen Mittelpunct $\mathfrak{M}$, so haben auch alle successiven Polaren C^{m-1}, C^{m-2}, C^{m-3}, ... C^2, C^1 jedes unendlich entfernten Pols P_∞ Mittelpuncte, und zwar sind sie alle mit der Basis C^m concentrisch.***"

---

*) Hierbei entsteht die doppelte Frage:

„***Welche Relation findet einerseits zwischen den $\frac{1}{2}m$ conjugirten Richtungen R zu jedem Durchmesser S; und andererseits zwischen den $\frac{1}{2}m(m-1)$ conjugirten Durchmessern S zu jeder Richtung R statt?***"

*„Wird die Richtung R der Tangenten auf alle mögliche Weise geändert, oder läfst man den Pol P_x die Gerade G_x durchlaufen, so haben die zugehörigen ersten Polaren den Mittelpunct $\mathfrak{M}$ gemein und bilden zudem einen Curvenbüschel $B(C^{m-1})$ mit $(m-1)^2$ Grundpuncten p und p_1, *) welche paarweise Gegenpuncte oder Endpuncte von $\frac{1}{2}(m-1)^2$ Sehnen pp_1 sind (vergl. §. 3.). Die Curven dieses Büschels haben im Ganzen $3(m-2)^2$ Doppelpuncte $\mathfrak{p}_2$, welche paarweise einzelnen Curven C^{m-1} angehören und Gegenpuncte sind; nur wenn ein $\mathfrak{p}_2$ in $\mathfrak{M}$ oder in G_x liegt, kann er vereinzelt dastehen. In G_x liegen $2(m-2)$ Doppelpuncte $\mathfrak{p}_2$, daher ist die Zahl jener Paare (oder die Zahl der Curven C^{m-1}, welche $2\mathfrak{p}_2$ haben) $= \frac{1}{2}(m-2)(3m-8)$."* Werden hierbei die zwei Zahlformen von m berücksichtigt, $m = 2\mu$ und $m = 2\nu - 1$, so hat man statt des $B(C^{m-1})$ folgende zwei:

$$\alpha) \quad B(C^{2\mu-1}) \quad \text{und} \quad \beta) \quad B(C^{2\nu-2}).$$

Bei (α) gehört der Mittelpunct $\mathfrak{M}$ mit zu den $(m-1)^2$ Grundpuncten (weil jede $C^{2\mu-1}$ durch ihren eigenen Mittelpunct geht); *bei (β) dagegen gehört $\mathfrak{M}$ zu den $3(m-2)^2 = 3(2\nu-3)^2$ Doppelpuncten $\mathfrak{p}_2$, weil nothwendig eine der Curven, etwa $C_0^{2\nu-2}$, durch $\mathfrak{M}$ gehen und ihn daher zum $\mathfrak{p}_2$ haben mufs* (§. 1.). *Diese besondere Curve $C_0^{2\nu-2}$ entspricht derjenigen Richtung R, welche durch die Wendetangente der Basis $C^m = C^{2\nu-1}$ im Puncte $\mathfrak{M}$ gegeben ist. In diesem Falle ist die Anzahl der Paare Doppelpuncte $= 2(\nu-2)(3\nu-4) + \frac{1}{2}$, wo der Bruch, $\frac{1}{2}$, den in $\mathfrak{M}$ liegenden $\mathfrak{p}_2$ anzeigt.*

Zu den zuletzt angegebenen Eigenschaften gesellen sich in besondern Fällen noch andere Umstände, wie an folgenden einfachsten Beispielen zu sehen ist.

1. Ist die gegebene Curve C^m nur eine C^3, so gehen nach jeder Richtung R je 6 Tangenten, deren 6 Berührungspuncte in einem mit C^3 concentrischen Kegelschnitt C^2 liegen und zugleich die Endpuncte dreier Durchmesser des letztern sind. Für alle Richtungen R entsteht ein $B(C^2)$, die

*) Diese $(m-1)^2$ Puncte sind als die erste Polarenveloppe der Geraden G_x in Bezug auf die gegebene Curve C^m anzusehen (s. obigen Monatsbericht). Die übrigen Polarenveloppen, die 2te, 3te, ..., $(m-1)^{ste}$ haben alle den Punct $\mathfrak{M}$ zum Mittelpunct, und erscheinen überhaupt in specieller Form; so z. B. reducirt sich die letzte, oder $(m-1)^{ste}$ Polarenveloppe, die im allgemeinen Falle eine Curve von der $(m-1)^{sten}$ Classe und vom $2(m-2)^{ten}$ Grade ist, hierbei auf den blofsen Mittelpunct $\mathfrak{M}$, indem nach obiger Angabe, die letzte Polare, C^1, stets durch $\mathfrak{M}$ geht.

alle mit C^3 concentrisch sind, und deren 4 Grundpuncte aus zwei Paar Gegenpuncten, etwa p und p_1, r und r_1, bestehen und somit die Ecken eines Parallelogramms sind. Die Curven $B(C^2)$ haben im Ganzen nur 3 Doppelpuncte $\mathfrak{p}_2$, aber keine von ihnen kann hier $2\mathfrak{p}_2$ haben, sondern die $3\mathfrak{p}_2$ gehören drei verschiedenen speciellen C^2 an, wovon die eine, C_0^2, aus den Diagonalen, pp_1 und rr_1, und jede der zwei andern, C_a^2 und C_b^2, aus einem Paar Gegenseiten des Parallelogramms besteht, so dafs jene ihren $\mathfrak{p}_2$ in $\mathfrak{M}$ und jede von diesen ihren $\mathfrak{p}_2$ in G_∞ zu liegen hat. Die C_0^2 entspricht der Richtung der Wendetangente der Curve C^3 im Puncte $\mathfrak{M}$; und von C_a^2 und C_b^2 entspricht jede der Richtung der zwei Gegenseiten, aus welchen die andere besteht, so dafs zwischen ihnen Reciprocität statt findet.

2. Ist die gegebene Curve eine C^4, so gehen nach jeder Richtung R je 12 Tangenten, deren 12 Berührungspuncte in einer mit C^4 concentrischen Curve C^3 liegen. Die allen Richtungen R entsprechenden C^3 bilden ein $B(C^3)$ mit 9 Grundpuncten, wovon einer $\mathfrak{M}$ selbst ist, die 8 übrigen dagegen 4 Paar Gegenpuncte p und p_1, oder die Endpuncte von 4 Sehnen pp_1 sind. Die Curven $B(C^3)$ haben im Ganzen 12 Doppelpuncte $\mathfrak{p}_2$; nämlich es giebt unter ihnen 4 solche, C_2^3, wovon jede zwei $\mathfrak{p}_2$, und 4 solche, C_1^3, wovon jede nur ein $\mathfrak{p}_2$ hat. Jede der 4 C_2^3 zerfällt in $C^2 + C^1$, nämlich C^1 ist je eine der 4 Sehnen pp_1 und C^2 geht durch die Endpuncte der je 3 übrigen Sehnen. Die einzelnen Doppelpuncte der $4C_1^3$ liegen im Unendlichen, in G_∞.

§. 10.

Aus dem Bisherigen ist zu sehen, dafs eine höhere Curve C^m, welche einen Mittelpunct $\mathfrak{M}$ hat, offenbar in ihrem ganzen Wesen der Art beschränkt wird, dafs sie durch keine projectivische Umwandlung aus einer allgemeinen Curve gleichen Grades, etwa C_1^m, entstanden sein, noch in eine solche übergehen kann. Denn wird C^m von irgend einem Puncte P des Raumes aus, auf eine beliebige Ebene projicirt, so behält die neue Curve C_1^m immerhin die folgende, sie modificirende besondere Eigenschaft, nämlich (§. 9.):

„Dafs es in ihrer Ebene einen solchen Punct $\mathfrak{M}_1$ giebt, durch welchen $\frac{1}{2}m(m-2)$ ihrer Doppeltangenten $\mathfrak{T}_2$ gehen, deren $m(m-1)$ Berührungspuncte, b und b_1 von jeder $\mathfrak{T}_2$, in einer neuen Curve C_1^{m-2} liegen; und dafs die Berührungspuncte der noch übrigen, aus $\mathfrak{M}_1$ an C_1^m gehenden, m einfachen Tangenten in einer Geraden G liegen, welche jede $\mathfrak{T}_2$ in demjenigen Puncte g schneidet, der mit $\mathfrak{M}_1$ zu ihren beiden

Berührungspuncten b und b_1 harmonisch ist, also g, b, $\mathfrak{M}_1$, b_1 vier harmonische Puncte sind; dafs ferner jede durch $\mathfrak{M}_1$ gezogene Tansversale S_1 die Curve C_1^m in $\frac{1}{2}m$ solchen Punctenpaaren q und q_1 schneidet, wovon jedes Paar zu $\mathfrak{M}_1$ und dem Puncte g_1, in welchem S_1 jene Gerade G schneidet, harmonisch sind, also je 4 Puncte q, $\mathfrak{M}_1$, q_1, g_1 harmonisch sind, und dafs die beiden Tangenten in jedem Punctenpaar q und q_1 sich auf G schneiden; und dafs weiter, wenn man umgekehrt aus irgend einem Puncte P in der Geraden G die $m(m-1)$ Tangenten an die Curve C_1^m legt, dann deren Berührungspuncte paarweise, q und q_1, mit $\mathfrak{M}_1$ in Geraden S_1 liegen, wovon jede von G im 4ten harmonischen Punct g_1 geschnitten wird, also q, $\mathfrak{M}_1$, q_1 und g_1 harmonisch sind, und dafs endlich die durch alle $m(m-1)$ Berührungspuncte gehende Curve C_1^{m-1}, d. i. die erste Polare des Pols P in Bezug auf die Basis C_1^m, den Punct $\mathfrak{M}_1$ und die Gerade G gleicherweise zum harmonischen Pol und zur harmonischen Geraden hat, wie die Basis selbst, und dafs es sich mit der 2ten, 3ten, ... Polaren auch eben so verhält."

Auch in Rücksicht der übrigen obigen Sätze geht das eigentlich Wesentliche der Mittelpuncts-Eigenschaften, bei gleicher perspectivischer Umwandlung nicht verloren, sondern es stellt sich nur in der neuen Figur in scheinbar allgemeinerer Form dar. So z. B. geht der Satz in (§. 3.) verbunden mit (§. 9.), durch solche Umwandlung, in folgenden über:

„*Zieht man durch einen Punct $\mathfrak{M}_1$*

$$\alpha)\quad \mu(\mu+2)-1, \qquad \textit{oder} \qquad \beta)\quad \nu(\nu+1)-2$$

unbegrenzte Gerade S_1 nach beliebigen Richtungen, schneidet dieselben durch eine andere willkürliche Gerade G in Puncten g und bestimmt sodann in jeder Geraden S_1 irgend ein Paar solche Puncte p und p_1, die zu g und $\mathfrak{M}_1$ zugeordnete harmonische Puncte sind, so gehen durch alle Puncte p und p_1 ein Curvenbüschel $B(C^{2\mu})$ oder $B(C^{2\nu-1})$, welche nebstdem noch

$$\alpha)\quad 2(\mu-1)^2, \qquad \textit{oder} \qquad \beta)\quad 2(\nu-1)(\nu-2)+1$$

andere Puncte q und q_1 gemein haben, die gleichfalls paarweise in neuen durch $\mathfrak{M}_1$ gehenden Geraden S_1 liegen, welche von derselben Geraden G im 4ten harmonischen Punct g_1 geschnitten werden, so dafs q, $\mathfrak{M}_1$, q_1, g_1 harmonisch sind. Dabei hat jede Curve des Büschels den Punct $\mathfrak{M}_1$ und die Gerade G, in gleichem Sinne wie vorhin, zum harmonischen Pol und zur harmonischen Geraden. Im Falle (β) gehen alle Curven $C^{2\nu-1}$ durch

den Punct $\mathfrak{M}_1$ und von jeder liegt ein Wendepunct in ihm. In beiden Fällen haben die Curven (als $B(C^m)$ aufgefafst) im Ganzen $3(m-1)^2$ Doppelpuncte $\mathfrak{p}_2$, wovon $2(m-1)$ auf die Gerade G fallen und im Allgemeinen einzeln eben so vielen Curven angehören, wogegen die übrigen, zu $\frac{1}{2}(m-1)(3m-5)$ Paaren, je derselben Curve angehören und jedes Paar in einer neuen, durch $\mathfrak{M}_1$ gehenden Geraden S_1 liegt, welche gleicherweise von der Geraden G im 4ten harmonischen Punct geschnitten wird. Im Falle (α) hat eine der Curven $C^{2\mu}$ den Punct $\mathfrak{M}_1$ zum Doppelpunct $\mathfrak{p}_2$."

Aus der tief eingreifenden Wirkung des Mittelpuncts im vorstehenden ersten Satze erkennt man, dafs, aufser der Curve zweiten Grads C^2, nur noch die Curve dritten Grads C^3 durch ihn keine ihr freies Wesen störende Modification erleidet, da sie keine eigentliche Doppeltangenten hat. Und in der That kann auch jede gegebene Curve C_1^3 durch Projection in eine solche andere Curve C^3 umgewandelt werden, welche einen Mittelpunct $\mathfrak{M}$ hat, und zwar im Allgemeinen auf mehrfache Art, wie aus Folgendem erhellen wird.

§. 11.

Ist $\mathfrak{M}_1$ ein Wendepunct, $= \mathfrak{w}$, einer beliebigen Curve C_1^3, so zerfällt seine erste Polare bekanntlich in die zugehörige Wendetangente $\mathfrak{W}$ und in eine bestimmte andere Gerade H; nämlich von den 6 Tangenten, welche von einem beliebigen Puncte aus an die Curve gehen, fallen hier 3 auf $\mathfrak{W}$ und ihre 3 Berührungspuncte liegen also auch in $\mathfrak{W}$, und daher müssen die Berührungspuncte der 3 übrigen Tangenten ebenfalls in einer Geraden H liegen, welche mit $\mathfrak{W}$ zusammen die erste Polare des Puncts $\mathfrak{w}$ in Bezug auf C_1^3 vorstellt. Diese Gerade H hat ferner die Eigenschaft: *„dafs sie jede durch $\mathfrak{w}$ gezogene Transversale S in demjenigen Puncte h schneidet, der zu den 3 Puncten p, $\mathfrak{w}$, p_1, in welchem S von der Curve C_1^3 geschnitten wird, der vierte (stets dem $\mathfrak{w}$ zugeordnete) harmonische Punct ist.*" Demgemäfs soll die Gerade H die *„Harmonische*" des Wendepuncts $\mathfrak{w}$ (dessen halbe Polare sie ist) genannt werden.

Diese Eigenschaft enthält das eigentliche Wesen des Mittelpuncts. Denn wird die Curve C_1^3 auf eine andere Ebene so projicirt, dafs die Harmonische H ins Unendliche geht, d. h. dafs ihr in der neuen Ebene die unendlich entfernte Gerade G_∞ entspricht, so ist die Projection des Puncts $\mathfrak{w}$ ($\mathfrak{M}_1$) der Mittelpunct $\mathfrak{M}$ der neuen Curve C^3.

Demnach kann die Curve C_1^3 auf mehrfache Art so projicirt werden, dafs die neue Curve C^3 einen Mittelpunct $\mathfrak{M}$ erhält, nämlich jeder $\mathfrak{w}$ von jener kann in $\mathfrak{M}$ von dieser übergehen. ***Und somit ist eine Curve C^3, welche einen Mittelpunct $\mathfrak{M}$ hat, nur eine solche, bei welcher die Harmonische H eines ihrer Wendepuncte im Unendlichen liegt, $= G_\infty$ ist.***

Hiernach finden bei der beliebigen Curve C_1^3, in Rücksicht jedes Wendepuncts $\mathfrak{w}$ und der zugehörigen Harmonischen H, analoge Sätze statt, wie oben (§. 9. III. 1.) und (§. 10.), z. B.

„Zieht man durch einen Wendepunct $\mathfrak{w}$ der beliebigen Curve C_1^3 irgend eine Transversale S, so schneidet sie die Curve in zwei solchen Puncten q und q_1, deren zugehörige Tangenten einander in irgend einem Puncte P auf der Harmonischen H von $\mathfrak{w}$ treffen; auch schneiden die beiden Tangenten die Curve in zwei neuen Puncten r und r_1, welche mit $\mathfrak{w}$ in einer neuen Geraden S_1 liegen." Und umgekehrt: *„Werden bei einer beliebigen Curve C_1^3 aus irgend einem Puncte P in der Harmonischen H eines ihrer Wendepuncte $\mathfrak{w}$ die 6 Tangenten an die Curve gezogen, so liegen deren 6 Berührungspuncte paarweise, q und q_1, in drei durch $\mathfrak{w}$ gehenden Geraden qq_1, und die durch alle 6 Berührungspuncte gehende Polare C^2 hat den Punct $\mathfrak{w}$ und die Gerade H zu Pol und Polare; und ferner: die 6 Tangenten schneiden die Curve in neuen 6 Puncten, welche eben so paarweise (r und r_1) in drei durch $\mathfrak{w}$ gehenden Geraden rr_1 und zudem alle 6 in einer Curve C_1^2 liegen, die gleichfalls $\mathfrak{w}$ und H zu Pol und Polare hat, und die sich mit jener Polare C^2 in zwei Puncten berührt. Ist P insbesondere der gemeinschaftliche Schnittpunct von 3 solchen Harmonischen H, deren zugehörige $3\mathfrak{w}$ in einer Geraden liegen, so müssen die Berührungspuncte der aus P an die Curve gelegten 6 Tangenten auch dreimal paarweise in drei Geraden qq_1 liegen, welche beziehlich durch die $3\mathfrak{w}$ gehen; eben so die 6 Puncte r und r_1, in welchen die 6 Tangenten die Curve schneiden."* U. s. w.

Von den 9 Wendepuncten $\mathfrak{w}$ einer beliebigen Curve C_1^3 sind im Allgemeinen 3 reell und 6 imaginär; eben so verhält es sich mit den zugehörigen 9 Harmonischen H, sowie auch mit den 9 Wendetangenten $\mathfrak{W}$. Es ist von Interesse, das gegenseitige Verhalten dieser Elemente in folgenden besondern Fällen näher zu betrachten.

Wenn die Curve C_1^3 einen Doppelpunct $\mathfrak{p}_2$ hat, so kann er unter drei verschiedenen Formen erscheinen, nämlich *erstens* als Schnitt zweier reeller

Zweige, so dafs ihm zwei reelle Tangenten, etwa $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{S}$, zugehören; ***zweitens*** als Rückkehrpunct $\mathfrak{r}$, der aus dem vorigen dadurch entsteht, dafs die Schleife der Curve sich bis auf den Punct $\mathfrak{p}_2$ zusammenzieht, wobei dann die Tangenten $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{S}$ in die Rückkehrtangente $\mathfrak{R}$ zusammenfallen; ***drittens*** als sogenannter isolirter oder conjugirter Punct π_2, durch den kein reeller Zweig mehr geht und dem daher auch keine reelle eigentliche Tangenten zugehören. Demgemäfs ist nun auch das Verhalten der vorgenannten Elemente verschieden.

I. Hat die Curve C_1^3 einen $\mathfrak{p}_2$ mit zwei zugehörigen reellen Tangenten $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{S}$, so fallen von den 9 Wendepuncten 6 in $\mathfrak{p}_2$, wovon 4 imaginär und 2, die $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{s}$ heifsen mögen, reell sind. Von diesen zwei reellen Wendepuncten $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{s}$, in $\mathfrak{p}_2$, sind jene Tangenten $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{S}$ als die zugehörigen Wendetangenten, so wie verwechselt zugleich als die zugehörigen Harmonischen ($\boldsymbol{H}$) anzusehen, so dafs also die Wendetangenten und Harmonischen zu diesen zwei Puncten verwechselt anfeinanderfallen. Von den noch übrigen 3 Wendepuncten, die nicht in $\mathfrak{p}_2$ liegen, sind zwei imaginär, $i\mathfrak{w}$, und einer reell, $\mathfrak{w}$. Die aus $\mathfrak{p}_2$ durch diesen reellen $\mathfrak{w}$ gezogene Gerade heifse $\boldsymbol{W}$. Von den aus $\mathfrak{w}$ an die Curve gehenden drei Tangenten, durch deren Berührungspuncte die Harmonische $\boldsymbol{H}$ bestimmt wird, fallen hier zwei auf die Gerade $\boldsymbol{W}$, und ihre zwei Berührungspuncte müssen als in $\mathfrak{p}_2$ liegend gedacht werden, die dritte, eigentliche Tangente heifse $\mathfrak{H}$ und ihr Berührungspunct b, so ist also die Gerade $\mathfrak{p}_2 b$ die Harmonische $\boldsymbol{H}$ von $\mathfrak{w}$, und folglich gehen alle drei reellen Harmonischen, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{S}$ und $\boldsymbol{H}$, durch $\mathfrak{p}_2$ (eben so auch die imaginären).

Welche Modification hierbei die vorstehenden Sätze erleiden, ist leicht zu sehen. Ein neu hinzutretender Umstand ist der: „***Dafs die Geraden W und H zu den Tangenten $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{S}$ harmonisch sind, d. h. dafs $\mathfrak{D}$, W, $\mathfrak{S}$, H vier harmonische Strahlen sind.***" Auch findet dabei ein umfassenderer Satz statt, der sich aus andern Betrachtungen ergiebt, nämlich:

„***Zieht man aus dem Doppelpunct $\mathfrak{p}_2$ irgend zwei zu $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{S}$ zugeordnete harmonische Strahlen W_1 und H_1, welche die Curve C_1^3 in zwei neuen Puncten, etwa $\mathfrak{w}_1$ und b_1, schneiden werden, so ist der Ort der diese Puncte verbindenden Geraden $\mathfrak{w}_1 b_1$ eine Curve C^2, welche insbesondere sowohl die Tangenten $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{S}$ als auch die vorgenannte Tangente $\mathfrak{H}$ (oder $\mathfrak{w}b$) berührt.***"

II. Hat die Curve C_1^3 einen Rückkehrpunct $\mathfrak{r}$, so sind 8 Wendepuncte als in ihm liegend zu denken (zu den 6 vorigen gesellen sich noch die genannten zwei $i\mathfrak{w}$); von denselben sind 6 imaginär und 2 reell, und zwar haben die letztern, da sie von den vorigen Puncten $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{s}$ herkommen, die Rückkehrtangente $\mathfrak{R}$ sowohl zur gemeinsamen Harmonischen als zur gemeinsamen Wendetangente (weil $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{S}$ sich in $\mathfrak{R}$ vereinigt haben), so dafs sie also durch diese ihnen zugehörigen Elemente nicht mehr zu unterscheiden sind, nur etwa noch dadurch, dafs man sie als den verschiedenen Zweigen der Curve angehörend auffafst; in manchem Betracht sind sie daher nur als *ein* Punct zu achten. Der 9te und eigentliche Wendepunct ist der vorige reelle, $\mathfrak{w}$, aber die vorhin aus ihm an die Curve gehende Tangente $\mathfrak{H}$ ($=\mathfrak{w}b$), fällt hier auch noch auf die Gerade W ($=\mathfrak{r}\mathfrak{w}$), so dafs jetzt alle 3 Tangenten, durch deren Berührungpuncte die Harmonische H von $\mathfrak{w}$ geht, in W und ihre drei Berührungspuncte in $\mathfrak{r}$ vereinigt sind, allein wenn nun auch hiedurch die H nicht mehr bestimmt wird, so folgt doch andererseits aus ihrer harmonischen Lage, dafs sie mit $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{S}$ zugleich in die Rückkehrtangente $\mathfrak{R}$ übergehen mufs. Demnach gehen in diesem Falle die drei reellen Harmonischen nicht allein alle durch den Rückkehrpunct $\mathfrak{r}$, sondern sie fallen alle drei in die Rückkehrtangente $\mathfrak{R}$ zusammen.

Aus den obigen Sätzen ergeben sich hier folgende specielle Sätze.

„Jede durch den Wendepunct $\mathfrak{w}$ gezogene Gerade S wird von der Curve C_1^3 und deren Rückkehrtangente $\mathfrak{R}$ in 4 harmonischen Puncten geschnitten; d. h. wird S von C_1^3 in den Puncten q, $\mathfrak{w}$, q_1 und von R im Puncte r geschnitten, so sind immer q, $\mathfrak{w}$, q_1, r vier harmonische Puncte." „Die in den beiden Puncten q und q_1 an die Curve gelegten Tangenten treffen sich allemal in irgend einem Puncte P auf der Rückkehrtangente $\mathfrak{R}$; und umgekehrt: werden aus irgend einem Puncte P der Rückkehrtangente $\mathfrak{R}$ die zwei, nicht auf $\mathfrak{R}$ fallenden, Tangenten an die Curve gelegt, so liegen ihre Berührungspuncte q und q_1, stets in einer durch den Wendepunct $\mathfrak{w}$ gehenden Geraden S." Und ferner: *„Zieht man durch den Rükkehrpunct $\mathfrak{r}$ irgend zwei zu $\mathfrak{R}$ und W zugeordnete harmonische Strahlen Q und Q_1, so schneiden diese die Curve in zwei neuen Puncten q und q_1, welche jedesmal mit dem Wendepunct $\mathfrak{w}$ in einer Geraden S liegen." — „Wenn ferner die durch $\mathfrak{w}$ gezogene Transversale S insbesondere der Rückkehrtangente $\mathfrak{R}$ parallel ist, so stehen die Schnitte q und q_1 gleichweit von $\mathfrak{w}$ ab; und wenn S mit einer der drei*

Asymptoten der Curve parallel ist, so liegt einer der beiden Puncte q *und* q_1, *er heifse für einen Augenblick* q_0, *so liegt* q_0 *in der Mitte zwischen* $\mathfrak{w}$ *und* r; *und daher auch umgekehrt: zieht man durch die Mitte der Geraden* W $(= \mathfrak{r}\mathfrak{w})$ *eine Gerade* Q_0 *parallel* R, *so schneidet sie die Curve in 3 Puncten* q_0 *und die aus* $\mathfrak{w}$ *durch dieselben gezogenen 3 Geraden* $\mathfrak{w}q_0$ *sind den drei Asymptoten parallel, und die in den Puncten* q_0 *an die Curve gelegten Tangenten treffen sich mit den respectiven Asymptoten auf der Rückkehrtangente* $\mathfrak{R}$."

III. Hat die Curve C_1^3 einen isolirten Punct π_2, so sind in demselben 6 imaginäre Wendepuncte zu denken, die übrigen drei Wendepuncte $\mathfrak{w}$ sind reell und liegen in einer Geraden. Von den aus jedem dieser drei reellen $\mathfrak{w}$ an die Curve zu legenden 3 Tangenten fallen, wie oben (I.), zwei auf die Gerade $\mathfrak{w}\pi_2 = W$, so dafs ihre beiden Berührungspuncte in π_2 liegen; die dritte Tangente heifse, wie dort, $\mathfrak{H}$ und ihr Berührungspunct b, so ist also die Gerade $\pi_2 b$ die Harmonische H zu $\mathfrak{w}$, und folglich gehen auch hier die Harmonischen H der 3 reellen Wendepuncte $\mathfrak{w}$ alle drei durch den Doppelpunct π_2. Auch findet hierbei ein analoger Umstand statt, wie bei (I.), nämlich:

„*Die drei Paar Gerade* W *und* H *(aus dem Doppelpunct* π_2 *durch die Wendepuncte* $\mathfrak{w}$ *und durch die Berührungspuncte* b *der aus* $\mathfrak{w}$ *gelegten Tangenten* H, *gezogen) sind 3 Paar conjugirte Strahlen eines elliptischen Strahlsystems, oder bilden elliptische Involution. Construirt man irgend ein anderes Paar conjugirte Strahlen desselben Strahlsystems, etwa* W_1 und H_1, *so schneiden sie die Curve in zwei neuen Puncten* $\mathfrak{w}_1$ *und* b_1, *und der Ort der sie verbindenden Geraden* $\mathfrak{w}_1 b_1$ *ist eine Curve* C^2, *welche nothwendig auch jene drei Tangenten* $\mathfrak{H}$ *berührt.*" „*Hier liegt* π_2 *innerhalb der Curve* C^2; *bei* (I.) *liegt* $\mathfrak{p}_2$ *aufserhalb derselben, und bei* (II.) *reducirt sich dieselbe auf den Rückkehrpunct* $\mathfrak{r}$."

Übrigens haben die 3 Paar Gerade W und H eine noch innigere Beziehung zu einander; nämlich jede Gerade H ist vierte harmonische zu den 3 Geraden W, und umgekehrt jede Gerade W ist vierte harmonische zu den $3H$. Dies Verhalten kann wie folgt klar gemacht werden. Soll zu drei durch einen Punct gehenden gegebenen Geraden a, b, c eine vierte harmonische Gerade bestimmt werden, so sind 3 Lösungen möglich, indem sowohl $ab\alpha c$, als $abc\beta$, als $a\gamma bc$ harmonisch sein können; und werden sodann die drei neuen Geraden α, β, γ als gegeben angesehen, so sind umgekehrt jene erstern Geraden a, b, c die ihnen entsprechenden vierten Harmonischen, so

dafs also zugleich auch $\alpha\beta a\gamma$, $\alpha\beta\gamma b$, $\alpha c\beta\gamma$ harmonisch sind. Dabei ist, wie man sieht, jedes Paar conjugirte Gerade, wie etwa a und α, sowohl zu b und c, als auch zu β und γ harmonisch. Diese nämliche Beziehung haben nun auch die 3 Paar Gerade W und H, wenn man die $3W$ als a, b, c und die $3H$ als α, β, γ ansieht. Wenn insbesondere zwei Paar conjugirte Gerade unter sich rechtwinklig sind, wenn etwa $(a\alpha)$ und $(b\beta)$ rechte Winkel sind, so ist auch $(c\gamma)$ ein rechter Winkel, und alsdann bilden je zwei nach der Reihe $a\gamma b\alpha c\beta a$ aufeinander folgende Gerade einen Winkel von 30°. Dabei ist das genannte Strahlsystem ***ein rechtwinkliges***, so dafs jeder Winkel $(W_1 H_1)$ ein rechter ist. — Ein Theil des obigen Satzes ist bereits von ***Möbius*** in seiner Abhandlung „über Linien ***dritter Ordnung***" bewiesen worden; ich bin jedoch nicht erst dadurch zu dem Satze gelangt.

Soll nun, in Rücksicht auf die vorstehenden drei besondern Fälle I, II und III, die jedesmalige gegebene Curve C_1^3 durch Projection in eine solche andere Curve C_0^3 umgewandelt werden, welche einen (reellen) Mittelpunct $\mathfrak{M}$ hat, so kann C_1^3 auf folgende Weise projicirt werden.

A. Bei I. auf zwei wesentliche verschiedene Arten, nämlich entweder

α) so, dafs die Harmonische H des reellen Wendepuncts $\mathfrak{w}$ in die Gerade G_∞ und dadurch $\mathfrak{w}$ in $\mathfrak{M}$ übergeht, wobei also auch der Doppelpunct $\mathfrak{p}_2^0$ der neuen Curve in G_∞ zu liegen kommt, und daher die Tangenten $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{S}$ in zwei parallele, gleichweit von $\mathfrak{M}$ abstehende Asymptoten $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{S}_0$ übergehen, so wie $\mathfrak{H}$ in die dritte, durch $\mathfrak{M}$ selbst gehende, Asymptote $\mathfrak{H}_0$ übergeht; oder

β) so, dafs die Tangente $\mathfrak{D}$ (oder $\mathfrak{S}$) in G_∞ und damit ihr Berührungspunct $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{M}$ übergeht, mithin auch $\mathfrak{M}$ in G_∞ liegt und $\mathfrak{M}_\infty$ heifsen mag, wobei $\mathfrak{S}$ in die einzige sichtbare Asymptote $\mathfrak{S}_0$ der neuen Curve übergeht, indem die beiden andern auf G_∞ fallen, und wobei die 3 Geraden $\mathfrak{S}_0$, W_0, H_0 parallel werden, $\mathfrak{S}_0$ in der Mitte zwischen den beiden andern liegt, und daher durch die Mitte der Tangente $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{w}_0 b_0$ geht.

B. Bei II. kann nur so projicirt werden, dafs die Rückkehrtangente $\mathfrak{R}$ in G_∞ übergeht, aber dadurch gehen der Wendepunct $\mathfrak{w}$ und der Rückkehrpunct $\mathfrak{r}$, wofern man die im letztern vereinten zwei reellen Wendepuncte $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{s}$ nur für einen achtet, zumal in Mittelpuncte der neuen Curve C_0^3 über, so dafs diese also zwei Mittelpuncte hat, wovon der eine, $\mathfrak{M}$, ihr eigentlicher Wendepunct $\mathfrak{w}_0$, der andere, $\mathfrak{M}_\infty$, ihr im Unendlichen liegender Rückkehr-

punct $\mathfrak{r}_0$ ist. Hier hat die Curve C_0^3 keine eigentliche Asymptote, sondern alle drei Asymptoten fallen auf G_∞.

C. Bei III. kann dreifach, aber auf gleichbedeutende Art, projicirt werden, nämlich so, dafs je eine der drei Harmonischen H in G_∞ und der ihr zugehörige Wendepunct $\mathfrak{w}$ in $\mathfrak{M}$ übergeht; dabei kommt also der Doppelpunct π_2^0 der neuen Curve C_0^3 jedesmal in G_∞ zu liegen und die dem jedesmaligen $\mathfrak{w}$ zugehörige Tangente $\mathfrak{H}$ geht in die einzige reelle und eigentliche Asymptote $\mathfrak{H}_0$ der Curve C_0^3 über.

Aus diesem Verhalten der besondern Elemente, sind, zu nachheriger Benutzung, noch folgende zwei Sätze hervorzuheben:

1°. *„Soll eine Curve C^3 einen Mittelpunct und zugleich auch einen (aber nur einen) Doppelpunct haben, so mufs der letztere nothwendig im Unendlichen, auf G_∞, liegen, dabei kann er aber, je nach Umständen, entweder $\mathfrak{p}_2$, oder $\mathfrak{r}$, oder π_2 sein.“*

2°. *„Hat eine Curve C^3 einen im Unendlichen liegenden Mittelpunct, $\mathfrak{M}_\infty$, so ist derselbe nothwendig zugleich ein Doppelpunct und zwar ein Doppelpunct erster Art,* $\mathfrak{p}_2$ (I.), *oder insbesondere ein Rückkehrpunct* $\mathfrak{r}$ (II.), *und so ist die Gerade G_∞ nothwendig Tangente in demselben (also $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{S}$, oder insbesondere $\mathfrak{R}$).“*

§. 12.

Die eben betrachteten Eigenschaften besonderer Curven dritten Grads gewähren eine Ergänzung der Sätze in §. 7., so wie weitere Folgerungen aus denselben.

Da in Rücksicht derjenigen Schaar Curven dritten Grads, $S(C^3)$, welche durch gegebene 6 Puncte p gehen und Mittelpuncte $\mathfrak{M}$ haben, der Ort dieser Mittelpuncte eine Curve fünften Grads $\mathfrak{M}^5$ ist (§. 7. I.), die im Allgemeinen fünf Puncte im Unendlichen, auf G_∞, hat, so folgt: dafs sich unter der $S(C^3)$ fünf solche C_0^3 befinden, welche jene unendlich entfernten Puncte beziehlich zu Mittelpuncten ($\mathfrak{M}_\infty$) und somit zugleich zu Doppelpuncten $\mathfrak{p}_2$ (oder insbesondere $\mathfrak{r}$) haben, und in denselben von der Geraden G_∞ berührt werden (§. 11. 2°.). Aufser diesen $5\,C_0^3$ giebt es unter der $S(C^3)$ keine, welche nur *einen* Doppelpunct hat, wohl aber befinden sich unter denselben 36 solche, wovon jede zwei Doppelpuncte hat, indem sie aus $C^2 + C^1$ besteht, was bereits oben (§. 7. I.) nachgewiesen worden. Also:

„Unter der Schaar Curven C^3, welche durch gegebene 6 Puncte p gehen und Mittelpuncte $\mathfrak{M}$ haben, giebt es im Allgemeinen fünf solche,

C_0^3, deren Mittelpuncte ($\mathfrak{M}_x$) im Unendlichen liegen, daher zugleich Doppelpuncte $\mathfrak{p}_2$ (oder $\mathfrak{r}$) sind und die Gerade G_x zur zugehörigen Tangente haben. Die $S(C^3)$ haben im Ganzen 77 Doppelpuncte; jedoch giebt es blofs die genannten $5\,C_0^3$, wovon jede nur einen Doppelpunct hat, dagegen 36 solche, wovon jede in C^2+C^1 zerfällt und daher zwei Doppelpuncte hat."

Durch Projection folgt:

„*Soll eine beliebige Curve C^3 durch gegebene 6 Puncte p gehen und eine gegebene Gerade H zur Harmonischen eines ihrer Wendepuncte $\mathfrak{w}$ haben, so ist der Ort dieses $\mathfrak{w}$ eine Curve fünften Grads, $\mathfrak{M}^5$, welche durch die 6p, so wie durch 51 andere leicht construirbare Puncte geht* (§. 7. I.). *Unter dieser Schaar Curven C^3 giebt es 36 solche, wovon jede aus C^2+C^1 besteht und somit zwei Doppelpuncte hat; hingegen giebt es nur 5 solche C_0^3, wovon jede blofs einen Doppelpunct $\mathfrak{p}_2$ (oder $\mathfrak{r}$) hat, und zwar liegen diese 5 Doppelpuncte in der Geraden H, sind ihre Schnitte mit der Ortscurve $\mathfrak{M}^5$, und in jedem ist H Tangente an die zugehörige Curve C_0^3.*" Oder man kann auch sagen: „*Sind 6 Puncte p und eine Gerade H gegeben, so giebt es fünf solche Curven C_0^3, welche durch die 6p gehen und die H zur Tangente in einem Doppelpuncte $\mathfrak{p}_2$ haben.*" Hieraus und aus dem Umstande: „*Dafs die Curve C_0^3 bestimmt ist, wenn sie durch gegebene 6 Puncte p gehen und einen gegebenen siebenten Punct q zum Doppelpunct, oder wenn sie durch gegebene 5 Puncte p gehen, einen gegebenen sechsten Punct q zum Doppelpunct und in diesem eine gegebene Gerade $\mathfrak{D}$ zur Tangente haben soll,*" können weiter folgende Sätze geschlossen werden.

I. „*Soll eine Curve C_0^3 durch gegebene 6 Puncte p gehen und einen Doppelpunct $\mathfrak{p}_2$ haben, dessen eine Tangente $\mathfrak{D}$ durch einen gegebenen siebenten Punct q geht, so ist der Ort des Doppelpuncts $\mathfrak{p}_2$ eine Curve 7ten Grads, G^7, welche sowohl den Punct q als die 6 Puncte p zu Doppelpuncten hat und wobei die eine Tangente jedes Doppelpuncts p auf die Gerade pq fällt; — und ferner ist der Ort der andern Tangente $\mathfrak{S}$ des Doppelpuncts $\mathfrak{p}_2$ der Curve C_0^3 eine Curve 25ster Classe, K^{25}.*" Von der Curve G^7 sind viele andere specielle Puncte leicht zu construiren. Ferner: „*Unter der Schaar Curven C_0^3 giebt es, im Allgemeinen, 18 solche, welche statt des Doppelpuncts $\mathfrak{p}_2$ einen Rückkehrpunct $\mathfrak{r}$ haben, dessen (Rückkehr-) Tangente $\mathfrak{R}$ also ebenfalls durch den gegebenen*

Punct q geht und die Curve K^{25} berührt (indem $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{R}$ vereinigt sind §. 11.) und zudem auch die Curve G^7 im Puncte $\mathfrak{x}$ berührt." Und ferner:

„*Soll eine Curve C_0^3 durch gegebene 6 Puncte p gehen und einen Doppelpunct $\mathfrak{p}_2$ haben, dessen Tangenten $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{S}$ beziehlich durch zwei andere gegebene Puncte q und s gehen, so finden, im Allgemeinen, 25 Lösungen statt.*"

II. „*Soll eine Curve C_0^3 durch gegebene 7 Puncte p gehen und einen Doppelpunct $\mathfrak{p}_2$ haben, so ist der Ort dieses Doppelpuncts eine Curve 6ten Grads, G^6, welche die 7 Puncte p zu Doppelpuncten hat, und so ist der gemeinsame Ort seiner beiden Tangenten $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{S}$ eine Curve 18ter Classe, K^{18}.*" Also:

„*Soll eine Curve C_0^3 durch gegebene 7 Puncte p gehen und einen Doppelpunct $\mathfrak{p}_2$ haben, dessen eine Tangente $\mathfrak{D}$ durch einen achten gegebenen Punct q geht, so finden, im Allgemeinen, 18 Lösungen statt.*"

III. „*Soll eine Curve C_0^3 durch gegebene 6 Puncte p gehen und einen Rückkehrpunct $\mathfrak{x}$ haben, so ist der Ort des letztern eine Curve 6ten Grads, welche jene 6 Puncte p zu Doppelpuncten hat; und so ist der Ort der Rückkehrtangente $\mathfrak{R}$ eine Curve 18ter Classe.*" Daher:

„*Soll eine Curve C_0^3 durch gegebene 6 Puncte p gehen und einen Rückkehrpunct $\mathfrak{x}$ haben, dessen Tangente $\mathfrak{R}$ durch einen gegebenen siebenten Punct r geht, so giebt es, im Allgemeinen, 18 Lösungen.*"

Hieran schliefse ich noch folgende Aufgabe.

IV. Wenn beliebige 6 Puncte *p* gegeben sind, so ist jeder andere Punct *q* der Ebene Doppelpunct einer durch jene 6 Puncte gehenden bestimmten Curve C_0^3. Werden nun die Doppelpuncte nach den zwei Arten durch $\mathfrak{p}_2$ und π_2 unterschieden (§. 11.), so kann man fragen: „*in welchen Theilen oder Regionen der Ebene der Punct q liegen müsse, damit er ein $\mathfrak{p}_2$ oder ein π_2 sei?*" Bestehen die Grenzen dieser Regionen nur allein aus der vorgenannten Curve 6ten Grads (III.)?

Vorkommen der Curven, welche Mittelpuncte haben, bei Betrachtung allgemeiner Curven.

Innere Polaren.

§. 13.

Durch jeden Punct P in der Ebene eines Kegelschnitts C^2 läfst sich immer eine, aber im Allgemeinen nur eine solche (reelle oder imaginäre) Sehne aa_1 ziehen, welche durch den Punct P gehälftet wird. Sobald zwei solche Sehnen durch denselben Punct P möglich sind, so finden zugleich unendlich viele statt, und dann ist P der Mittelpunct von C^2.

Diese Betrachtung kann auch auf die höheren Curven ausgedehnt werden. Zieht man durch einen beliebigen Punct P in der Ebene einer gegebenen Curve C^m irgend eine Gerade S, so schneidet sie die Curve in m Puncten; nun kann man verlangen, die Gerade soll so gezogen werden, dafs von den m Schnittpuncten irgend zwei, etwa a und a_1, gleichweit von P abstehen, und zwar auf entgegengesetzten Seiten von P liegen (nicht in einem Berührungspuncte vereinigt sind). Kürze halber soll jede Gerade S, welche ein solches Paar Schnittpuncte enthält, schlechthin eine „*Sehne*" und die Puncte a und a_1 sollen die *Endpuncte* der Sehne heifsen; und wenn eine Gerade zugleich zwei Paar solche Schnittpuncte enthält, etwa a und a_1, b und b_1, so soll sie „*Doppelsehne*" genannt und durch S_2 bezeichnet werden; solche S_2 hat also auch zwei Paar Endpuncte. Gleicherweise können insbesondere auch dreifache, vierfache, etc. Sehnen vorkommen.

Über die Anzahl aller Sehnen S, welche durch denselben Pol P gehen und über die Lage ihrer Endpuncte a und a_1 hat man den folgenden Satz:

I. „*Durch jeden Punct P in der Ebene einer gegebenen Curve C^m gehen im Allgemeinen $\frac{1}{2}m(m-1)$ Sehnen S, und ihre $m(m-1)$ Endpuncte (a und a_1) liegen allemal in einer um einen Grad niedrigern Curve J^{m-1}, welche nothwendigerweise den Pol P zum Mittelpunct hat.*" *)

---

*) Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich unter andern durch folgende geometrische Anschauung. Man denke sich die Curve C^m in ihrer Ebene, um den festen Pol P, um 180° herumbewegt und bezeichne sie in der neuen Lage durch C_1^m — oder, was auf dasselbe hinauskommt, man denke sich zu C^m die ihr, in Bezug auf den Punct P, symmetrisch gleiche C_1^m, so dafs $C^m + C_1^m$ als eine Curve C^{2m} anzusehen sind, welche P zum Mittelpunct hat, und wobei also jeder Punct p in C^m seinen Gegenpunct p_1 in C_1^m hat und auch umgekehrt, — so haben die Curven C^m und C_1^m parallele Asymptoten, von

Die genannten Endpuncte machen gerade die volle Zahl Schnittpuncte beider Curven aus. Findet sich insbesondere, dafs durch einen Pol P mehr als $\frac{1}{2}m(m-1)$ Sehnen S gehen, ja sobald nur eine Sehne mehr durchgeht, so gehen alsdann unendlich viele hindurch, so dafs die gegebene Curve C^m selbst den Punct P zum Mitelpunct hat.

Beachtet man von allen durch den Punct P gehenden Geraden nur diejenigen, T, bei welchen von den m Schnitten mit der Curve C^m ebenfalls zwei gleichweit von P abstehen, aber auf derselben Seite von P liegen sollen, also zu einem Berührungspunct der Geraden T vereinigt sind: so finden bekanntlich $m(m-1)$ solche Tangenten T statt, deren $m(m-1)$ Berührungspuncte in einer Curve A^{m-1} liegen, welche die ***erste Polare*** des Pols P in Bezug auf die gegebene Curve C^m heifst (s. den voranstehenden Monatsbericht).

Wegen Übereinstimmung dieser letzten Bedingung mit der vorigen, soll fortan die obige Curve J^{m-1} (wenn auch in anderer Hinsicht nicht ganz passend) die *„innere Polare,"* hingegen die Curve A^{m-1} die *„äufsere"* oder schlechthin nur die ***erste Polare*** des Pols P in Bezug auf die Basis C^m genannt werden. Beide Polaren sind also immer vom gleichen Grad. Aufserdem haben sie, unter andern, folgende wesentliche Beziehung zu einander.

II. *„Die beiden Polaren A^{m-1} und J^{m-1} jedes Puncts P in Bezug auf dieselbe gegebene Curve C^m haben $m-1$ gegenseitige Schnittpuncte im Unendlichen, auf der Geraden G_∞, daher müssen ihre Asymptoten paarweise parallel und die zu jedem Paar gehörigen müssen gleichzeitig reell oder imaginär sein; und daher müssen ferner die noch übrigen $(m-1)(m-2)$ Schnitte beider Polaren in einer Curve vom $(m-2)^{ten}$ Grad, C^{m-2} liegen."*

§. 14.

In Rücksicht der innern Polare sind zunächst verschiedene besondere Umstände zu erörtern, welche zum Theil zu interessanten Resultaten führen. Nämlich man kann fragen: welchen Einflufs es auf die Polare J^{m-1} habe, oder wie sie sich gegen die Basis C^m verhalte, wenn der Pol P in der

---

ihren m^2 gegenseitigen Schnittpuncten liegen somit m in der Geraden G_∞, daher müssen die übrigen $m(m-1)$ Schnitte in einer Curve $(m-1)^{ten}$ Grads J^{m-1} liegen, und zwar müssen sie paarweise Gegenpuncte in Bezug auf P sein (denn ist a ein Schnitt von C^m und C_1^m, so mufs auch sein Gegenpunct a_1 in beiden Curven zugleich liegen), somit müssen diese Schnitte die Endpuncte von $\frac{1}{2}m(m-1)$ Sehnen aa_1 der Curve C^m (auch der C_1^m) sein, und folglich mufs die Curve J^{m-1} den Pol P zum Mittelpunct haben.

letztern selbst liegt, oder insbesondere ein singulärer Punct derselben ist? oder ferner: welche Bewandtnifs es mit der Polare J^{m-1} habe, wenn die Basis von specieller Form ist, etwa in Theile zerfällt? oder ferner: ob es in der Ebene der Basis solche besondere Pole gebe, für welche die innere Polare eine eigenthümliche Form erhält, in Theile zerfällt? u. s. w. Die wesentlichsten Fälle der Art sollen im Folgenden kurz angedeutet werden.

I. Verhalten der innern Polare, wenn der Pol P in der Basis C^m selbst liegt.

Hierbei sind wieder die beiden Zahlformen $m = 2\mu$ und $m = 2\nu - 1$ zu unterscheiden, so dafs man es mit den zwei inneren Polaren

$$J^{2\mu-1} \quad \text{und} \quad J^{2\nu-2}$$

zu thun hat, wovon die erstere immer durch ihren eigenen Mittelpunct oder Pol P geht und auch sonst noch sich verschieden von der andern verhält.

1. ***Wenn der Pol P ein beliebiger Punct der Basis C^m ist:***

α) so hat $J^{2\mu-1}$ die Tangente von C^m im Puncte P zur Wendetangente, *wt* (§. 9.).

β) so hat $J^{2\nu-2}$ im Puncte P einen Doppelpunct, *dp*.

2. ***Wenn P insbesondere ein Wendepunct der Basis C^m ist:***

α) so hat $J^{2\mu-1}$ die zugehörige Wendetangente mit der Basis gemein.

β) so hat $J^{2\nu-2}$ den P zum *dp* mit zwei *wt*, wovon die eine auf die *wt* der Basis fällt.

3. ***Wenn P insbesondere ein Doppelpunct der Basis ist:***

α) so hat $J^{2\mu-1}$ in P einen dreifachen *wp*, mit drei *wt*, von welchen sie fünfpunctig berührt wird (§. 1.).

β) so hat $J^{2\nu-2}$ den P wiederum zum *dp* mit zwei *wt*, welche auf die beiden Tangenten der Basis fallen.

4. ***Wenn P insbesondere ein Rückkehrpunct der Basis ist:***

α) so hat $J^{2\mu-1}$ in P einen dreifachen Wendepunct mit drei Wendetangenten, so dafs sie von jeder der letztern daselbst fünfpunctig berührt wird, wie vorhin (3).

β) so hat $J^{2\nu-2}$ in P die *rt* der Basis zur doppelten *rt* und doppelten *wt*, nämlich sie berührt daselbst die *rt* der Basis doppelt, mit zwei Zweigen, und somit auch sich selbst.

Ist die gegebene Basis z. B. nur vom vierten Grad, C^4, so besteht die innere Polare J^3 in den beiden Fällen (3. α) und (4. α) aus drei Geraden,

$3J^1$, die durch P gehen, nämlich aus drei Doppelsehnen aa_1 oder S_2, bei denen das eine Paar Endpuncte, b und b_1, in P vereinigt sind. Und dabei hat die äufsere Polare A^3 mit der Basis beziehlich den Doppel- oder Rückkehrpunct nebst den zugehörigen Tangenten ($\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}$, bei 3., oder $\mathfrak{R}$ bei 4.) gemein. Vermöge des obigen Satzes (§. 13. II.) folgt: *„Dafs die drei Geraden, $3J^1$, aus denen die innere Polare besteht, oder die durch P gehenden drei Doppelsehnen $S_2 = aa_1$, beziehlich den drei Asymptoten, $3A_s$, der äufsern Polare A^3 parallel sein müssen; und dafs umgekehrt, wenn man durch P mit einer Asymptote von A^3 eine Gerade S parallel zieht, diese von der Basis C^4 in zwei von P gleichweit abstehenden Puncten a und a_1 geschnitten wird."*

5. *Wenn endlich P insbesondere ein $(m-1)$facher Punct der Basis C^m ist:*

„so besteht sowohl die innere als äufsere Polare, J^{m-1} sowohl als A^{m-1}, aus den $m-1$ Tangenten der Basis im Puncte P."

II. Verhalten der innern Polare, wenn die Basis aus Theilen besteht.

Die Basis C^m kann auf mannichfache Weise in Theile zerfallen, d. h. aus zwei oder mehren Curven niedrigerer Grade, oder selbst nur aus Geraden bestehen, wobei dann der obige Satz (§. 13.) immerhin bestehen bleibt; was unter andern zu folgenden speciellen Sätzen führt.

1. *Wenn die Basis C^m aus m Geraden G besteht.*

„Sind in einer Ebene beliebige m Gerade G gegeben und man zieht durch irgend einen Pol P zwischen je zwei Geraden diejenige Sehne S oder aa_1, welche von P gehälftet wird, was im Ganzen $\frac{1}{2}m(m-1)$ Sehnen aa_1 giebt, so liegen ihre $m(m-1)$ Endpuncte, a und a_1, allemal in einer Curve $(m-1)^{sten}$ Grads, J^{m-1}, welche P zum Mittelpunct hat."

2. *Wenn die Basis C^m aus zwei Curven C^α und C^β besteht, wo $\alpha+\beta=m$.*

„Sind in einer Ebene irgend zwei Curven C^α und C^β gegeben und man zieht durch einen beliebigen Pol P die $\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)$ Sehnen aa_1 in der Curve C^α, so wie die $\frac{1}{2}\beta(\beta-1)$ Sehnen bb_1 in der Curve C^β, und ferner die $\alpha.\beta$ Sehnen ab zwischen beiden Curven, (d. h. solche Gerade ab, die den einen Endpunct a in C^α, den andern b in C^β und ihre

Mitte in P haben), so liegen die Endpuncte aller dieser Sehnen, was zusammen $\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)+2\alpha\beta=m(m-1)$ *Endpuncte sind, allemal in einer Curve* $(\alpha+\beta-1)^{sten}$ *oder* $(m-1)^{sten}$ *Grads,* J^{m-1}, *welche den Pol P zum Mittelpunct hat.*"

Darin ist der besondere Satz enthalten: „*Dafs durch jeden Punct P in der Ebene zweier beliebigen Curven* C^α *und* C^β, *im Allgemeinen,* $\alpha.\beta$ *solche Sehnen ab möglich sind, welche den einen Endpunct in der einen, den andern in der andern Curve und ihre Mitte in jenem Puncte P haben.*"

Ferner ist daraus leicht der folgende Satz herzuleiten:

„*Sind in einer Ebene irgend zwei Curven* C^α *und* C^β *gegeben, die einander in* $\alpha.\beta$ *Puncten c schneiden, und zieht man durch einen beliebigen Pol P die* $\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)$ *Sehnen* aa_1 *in der Curve* C^α, *so wie die* $\frac{1}{2}\beta(\beta-1)$ *Sehnen* bb_1 *in der Curve* C^β, *so liegen die Endpuncte beider Systeme Sehnen mit jenen Schnittpuncten c, was zusammen* $\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)+\alpha\beta=m(m-1)-\alpha\beta$ *Puncte ausmacht, allemal in einer Curve* $(\alpha+\beta-1)^{sten}$ *Grads,* J^{m-1}, *welche den Pol P zum Mittelpunct hat.*"

III. Lage oder Ort des Pols P, wenn die innere Polare in Theile zerfallen soll.

Dieser Fall führt schon auf complicirte Untersuchungen, wenn die gegebene Basis nur von niedrigem Grade, nur vom dritten oder vierten Grad ist, wie aus nachstehenden Betrachtungen erhellen wird.

§. 15.

I. Ist die gegebene Basis nur vom dritten Grad, C^3, also die innere Polare jedes Pols P ein Kegelschnitt J^2, so kann dieser möglicherweise nur in zwei Gerade zerfallen, und es ist die Frage, ob dieses Zerfallen wirklich statt finden könne, und wo dabei der Pol P liegen müsse, oder welchen Ort er habe? In der That stellt sich heraus, dafs dieses Zerfallen auf zwei verschiedene Arten geschehen kann, und demgemäfs auch zwei verschiedene Örter vorhanden sind, und zwar wie folgt.

„*Der Ort des Pols, dessen innere Polare* J^2 *in zwei Gerade zerfällt, besteht aus zwei getrennten Curven, nämlich:*

A. aus der gegebenen Basis C^3 *selbst, und*

B. aus einer bestimmten Curve zweiten Grads, E^2, *welche die zweite Polare der Geraden* G_x *in Bezug auf die Basis* C^3 *ist (s. obig. Monats-*

bericht), oder welche die Enveloppe aller Durchmesser von C^3 ist." — Nämlich schneidet man die Curve C^3 mit einer beliebigen Transversale $\mathfrak{D}$ und bestimmt zu den drei Schnitten den Schwerpunct *d:* so liegen alle Schwerpuncte *d* von je einem System paralleler Transversalen $\mathfrak{D}$ in einer Geraden D, welche ***Durchmesser*** der Curve C^3 heifst, und wobei die Richtung der Transversalen, die „***conjugirte Richtung***" des Durchmessers genannt werden soll. Alle Durchmesser D der Curve C^3, wozu insbesondere auch ihre Asymptoten A_s gehören, berühren nun den genannten Kegelschnitt E^2. Sind die $3A_s$ alle reell, so ist E^2 diejenige dem Asymptotendreieck eingeschriebene Ellipse, welche dessen Seiten in ihren Mitten berührt; und schneiden sich insbesondere die $3A_s$ in einem Puncte, so reducirt sich E^2 auf diesen Punct, so dafs alle Durchmesser durch denselben gehen. Ist dagegen nur eine A_s reell, so ist E^2, im Allgemeinen, eine Hyperbel, welche diese A_s in einem leicht zu construirenden Puncte berührt.

Über die beiden Örter $(A.)$ und $(B.)$ sind die nähern Umstände folgende.

II. 1. Liegt der Pol P in der Basis C^3 selbst $(A.)$, so fällt von den ihm zugehörigen drei Sehnen S, oder aa_1, bb_1, cc_1 die eine, etwa cc_1, auf die ihm zugehörige Tangente, wobei ihre Endpuncte c und c_1 sich mit P vereinigen, daher als in den beiden andern Sehnen liegend anzusehen sind, etwa c in aa_1 und c_1 in bb_1, so dafs also der Kegelschnitt J^2 in die beiden Sehnen aca_1 und bc_1b_1 übergeht, die wir zur Unterscheidung durch S_1 oder auch nach Umständen durch S und S_1 bezeichnen wollen. ***Demnach entsprechen jedem in der Basis liegenden Pol P nur zwei eigentliche Sehnen S_1, die dritte fällt auf die Tangente, wird unendlich klein, reducirt sich auf ihren Berührungspunct P.*** Denkt man sich nun zu demselben Pol zugleich auch die äufsere Polare A^2, so folgt (§. 13. II.):

„***Für jeden in der Basis C^3 liegenden Pol sind die ihm entsprechenden zwei Sehnen S und S_1 den Asymptoten seiner äufsern Polare A^2 parallel.***" „***Daher sind beide Sehnen reell oder imaginär, je nachdem die Polare A^2 Hyperbel oder Ellipse ist, und auch umgekehrt; und wenn insbesondere A^2 Parabel ist, so fallen die Sehnen S und S_1 aufeinander, und auch umgekehrt.***" ***Es giebt im Ganzen nur 6 solche besondere Pole P, die P_0 heifsen sollen, für welche die Sehnen S und S_1 in eine, ab oder S_0, zusammenfallen, und womit zugleich die Polare A^2 Parabel wird, und zwar sind die 6 Pole P_0 die gegenseitigen Schnitte***

der Curven C^3 und E^2.) Jede der 6 Sehnen S_0 hat die Eigenschaft, dafs die in ihren Endpuncten a, b an die Basis C^3 gelegten Tangenten A, B parallel sind. Liegt der Pol P insbesondere in einem Wendepunct w der Basis, so fällt eine der beiden Sehnen S und S_1, etwa S, auf die Wendetangente $\mathfrak{W}$, und alsdann besteht auch A^2 aus zwei Geraden, nämlich aus $\mathfrak{W}$ und der Harmonischen H von w (§. 11.), und es ist $S_1 \# H$, d. h., in diesem Falle besteht jede der beiden Polaren J^2 und A^2 aus zwei Geraden, wovon zwei auf $\mathfrak{W}$ fallen und die beiden andern, S_1 und H, parallel sind.*

Die Sehnenpaare S und S_1 sind insgesammt dem folgenden Gesetz unterworfen.

„*Alle Sehnen S_1, in welche die innere Polare J^2 zerfällt, wenn der Pol P in der Basis C^3 selbst liegt, oder was auf dasselbe hinauskommt, alle solche Sehnen aca_1, deren Mitten, c, in der Basis selbst liegen, berühren eine bestimmte Curve 6ter Classe, S_1^6, und 18ten Grads, G^{18}.*"

Über das Verhalten dieser Curve gegen die Basis und über andere Eigenschaften derselben, mag hier noch Folgendes hinzugefügt werden.

2. *Die Curve S_1^6 berührt die Basis C^3 in ihren 9 Wendepuncten w, so wie in ihren 3 unendlich entfernten Puncten a_∞, so dafs sie also die 3 Asymptoten A, mit ihr gemein hat; aber die S_1^6 berührt jede dieser 3A, auch noch in einem bestimmten andern Puncte, so dafs sie dieselben zu Doppeltangenten hat. Da die Basis ebenfalls von der 6ten Classe ist, $C^3 = K^6$, so bestehen die 36 gemeinschaftlichen Tangenten beider Curven blos aus den 9 Wendetangenten $\mathfrak{W}$ und den 3 Asymptoten der C^3, indem jede dieser 12 Geraden für 3 gemeinschaftliche Tangenten zu zählen ist.*

3. *Die Curve S_1^6 berührt die oben genannten 6 besondern Sehnen S_0 in ihren Mitten P_0 und schneidet somit daselbst die Basis C^3. Von den*

---

*) In jener Abhandlung, welche der obige Monatsbericht bespricht, wird gezeigt: „*Dafs die Curve E^2 der Ort aller derjenigen Pole P ist, für welche die äufsere Polare A^2 Parabel wird; und dafs überhaupt die Polare A^2 Hyperbel, Ellipse oder Parabel ist, je nachdem der Pol P beziehlich aufserhalb, innerhalb oder in der Curve E^2 liegt.*" Dasselbe gilt also auch für die innere Polare J^2, da sie stets mit A^2 ähnlich und ähnlich liegend ist. „*Es giebt, im Allgemeinen, nur einen bestimmten Pol P, dessen Polaren A^2 und J^2 Kreise sind.*" „*Liegt der Pol P insbesondere im Mittelpuncte der Curve E^2, so sind seine Polaren A^2 und J^2 der E^2 ähnlich, mit ihr ähnlich liegend und concentrisch.*" Das Nähere hierüber sehe man unten, Aufg. und Sätze, welche sich auf die gegenwärtige Abhandlung beziehen.

$3.18 = 54$ *gemeinschaftlichen Puncten beider Curven kennen wir also bereits* **30**, *nämlich die* $9w$ *und* $3a_\infty$, *jeden doppelt gezählt, und die* $6P_0$; *die* **24** *übrigen haben die Eigenschaft, dafs sie die einen Endpuncte* a_1 *solcher besondern Sehnen* aca_1 *sind, die* $\mathfrak{S}_0$ *heifsen mögen, bei welchen die im andern Endpuncte* a *und in der Mitte* c *an die Basis gelegten Tangenten* A *und* C *parallel sind, und welche die Curve* S_1^6 *in den Puncten* a_1 *selbst berühren. Durch die* **24** *Puncte* a_1 *können Curven* 8ten *Grads gehen.*

4. *Die* **12** *gemeinschaftlichen Tangenten der Curven* S_1^6 *und* E^2 *bestehen:* 1) *aus den* $3A_s$ *der Basis, jede doppelt gezählt, und* 2) *aus* **6** *solchen Sehnen* S_1, *welche zugleich Durchmesser der Basis sind; die* **6** *Mitten* c *dieser* **6** *Sehnen liegen in irgend einem Kegelschnitte* C^2.

5. *Die Curve* S_1^6 *hat ferner die Gerade* G_∞ *zur dreifachen Tangente, berührt sie in* **3** *Puncten* g_∞. *Diese* **3** *Puncte sind dadurch bestimmt, dafs sie zu den drei Puncten* a_∞ (2.) *die vierten harmonischen Puncte sind; d. h., wenn man durch irgend einen Punct drei Gerade* A, B, C *den* $3A_s$ *der* C^3 *parallel zieht und zu denselben die* **3** *vierten harmonischen Strahlen* A_1, B_1, C_1 *bestimmt, so dafs* ABA_1C, $ABCB_1$, AC_1BC *harmonisch sind, oder auch so, wenn man in dem Asymptoten-Dreieck* $3A_s$ *aus den Ecken durch die Mitten der Gegenseiten die* **3** *Strahlen* A_1, B_1, C_1 *zieht: so sind diese Strahlen nach jenen unendlich entfernten Berührungspuncten* g_∞ *gerichtet.* (Die auf diese Weise construirten 3 Strahlen sind dann auch beziehlich den Axen der 3 asymptotischen Parabeln parallel, welche die Curve S_1^6 in den 3 Puncten g_∞ fünfpunctig berühren.) Da die Curve S_1^6 vom 18ten Grad ist, so mufs sie mit der Geraden G_∞ aufser den bereits angegebenen 9 Puncten (den $3g_\infty$, doppelt gezählt, und den $3a_\infty$), noch 9 andere Puncte, d_∞, gemein haben. *Diese Puncte* d_∞ *sind dadurch bestimmt, dafs die zugehörigen Tangenten oder Asymptoten,* $\mathfrak{D}_0$, *der Curve durch diejenigen Puncte,* d_0, *der Basis* C^3 *gehen, in welchen letztere von einzelnen ihrer Durchmesser,* D_0, *berührt wird, und dafs dieselben die diesen Durchmessern conjugirte Richtung haben* (I.). Dafs es 9 solche Durchmesser D_0 giebt, erhellet daraus, dafs sie gemeinschaftliche Tangenten der Curven C^3 und E^2 sind, welche 12 gemeinschaftliche Tangenten haben, aber wovon drei die Asymptoten A_s der C^3 sind. Die 9 Asymptoten $\mathfrak{D}_0$ sind zugleich solche eigenthümliche Sehnen ad_0a_1 $(= S_1)$, bei welchen die in den Endpuncten a, a_1 und in der Mitte d_0 an die Basis C^3 gelegten drei

Tangenten A, A_1 und D_0 sich in irgend einem Puncte Q treffen. Also: *„In einer Curve 3ten Grads C^3 giebt es, im Allgemeinen, 9 solche Transversalen $\mathfrak{D}_0$, bei welchen von den drei Schnitten der eine, d_0, in der Mitte zwischen den beiden andern, a und a_1, liegt und wobei die zugehörigen drei Tangenten in irgend einem Puncte Q zusammentreffen, und wo zudem die Tangente D_0 im mittelsten Schnittpuncte d_0 zugleich ein Durchmesser der Curve ist."* — Die Beziehungen, welche die Curve S_1^6 rücksichtlich der 9 Geraden $\mathfrak{D}_0$ und der 9 Puncte Q zu andern, mit der Basis C^3 innig zusammenhängenden Curven hat, werden hier übergangen und sollen bei einer andern Gelegenheit näher in Betracht kommen.

6. *„Durch jeden beliebigen Punct Q gehen, im Allgemeinen, 6 Sehnen S_1 oder aca_1 und ihre 6 Mitten c liegen allemal in irgend einem Kegelschnitte. Liegt Q in der Basis C^3 selbst, so wird diese in demselben von dem Kegelschnitte berührt."* Versetzt man Q ins Unendliche, so fallen von den 6 Sehnen S_1 drei auf G_∞ und die drei übrigen laufen parallel, *und ihre Mitten c liegen in dem ihrer Richtung conjugirten Durchmesser D, sind dessen Schnitte mit der Basis C^3. Somit sind von den Tangenten der Curve S_1^6, oder von den Sehnen S_1, nur je 3 und 3 parallel und ihre Mitten sind jedesmal die 3 Endpuncte des ihrer Richtung conjugirten Durchmessers D der Basis C^3, und auch umgekehrt.*

7. Der Berührungspunct s jeder Sehne $aca_1 = S_1$ mit ihrer Ortscurve S_1^6 wird durch folgende einfache Construction gefunden. Man lege in ihren Endpuncten a, a_1 und in ihrer Mitte c an die Basis C^3 die Tangenten A, A_1 und C; ihre Schnitte AA_1, AC, CA_1 mögen beziehlich p, q, q_1 heifsen. In A und A_1 nehme man die Puncte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ so, dafs q und q_1 die Mitten der Strecken $p\mathfrak{p}$ und $p\mathfrak{p}_1$ sind; ziehe sodann die Geraden $a\mathfrak{p}_1$ und $a_1\mathfrak{p}$, nenne ihren Schnitt r, so geht die Gerade pr durch den gesuchten Berührungspunct s der Sehne aa_1. — Hiezu noch die Bemerkung. Die durch die Puncte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}_1$ gezogene Gerade C_1, — die mit C parallel und mit ihr auf gleicher Seite von p liegt, aber doppelt so weit von p absteht, — schneidet die Sehne aa_1 in demjenigen Puncte s_1, welcher mit s zu a und a_1 harmonisch ist, d. h. asa_1s_1 sind harmonisch. Geht C insbesondere durch p, so fällt also C_1 auf C, s_1 in c, und s entfernt sich ins Unendliche.

8. Aus (2.) folgt, unter andern, der nachstehende Satz.

„Denkt man sich in derselben Ebene zwei ähnliche Curven dritten Grads, C^3 und C_1^3, deren homologe Dimensionen sich verhalten, wie 2:1,

hält die eine, etwa C^3, in ihrer Lage fest, so kann die andere auf **24** *verschiedene Arten so gelegt werden, dafs beide Curven direct (nicht symmetrisch) ähnlich liegen, einander in irgend einem Paar homologen Puncten m und m_1 und nebstdem noch in irgend zwei nicht homologen Puncten n und q_1 berühren." „Durch die 24 Puncte m in der Curve C^3 können Curven 8ten Grads gehen; eben so durch die $24 m_1$ in C_1^3."*

III. Liegt der Pol P in der Curve E^2 (I. *B.*), so sind die ihm zugehörigen drei Sehnen S oder aa_1, bb_1, cc_1 so beschaffen, dafs etwa die drei Endpuncte a, b, c in einer Geraden J, und somit auch die drei andern a_1, b_1, c_1 in einer Geraden J_1 liegen, so dafs also unter diesen Umständen die innere Polare J^2 in die zwei Geraden J und J_1 zerfällt, welche parallel sind und gleichweit vom Pol P abstehen, und zudem auch projectivisch gleich sind, indem $ab = a_1b_1$, $ac = a_1c_1$, $bc = b_1c_1$ ist. In diesem Falle ist die äufsere Polare jedesmal eine Parabel, deren Axe mit den Geraden J und J_1 parallel ist (II. 1.). Von den in E^2 liegenden Polen zeichnen sich zunächst folgende durch eigenthümliche Umstände aus. 1) Die schon oben genannten 6 Schnitte P_0 der Curven C^3 und E^2. In jedem derselben wird die Sehne cc_1 unendlich klein, und daher fallen die Geraden J und J_1 zugleich mit den Sehnen aa_1 und bb_1 (oder oben S und S_1) aufeinander, auf die dortige Sehne S_0. 2) Ferner giebt es drei solche besondere Pole, die X, Y, Z heifsen mögen, für welche (nicht allein die innere sondern) zugleich auch die äufsere Polare A^2 (die Parabel) in ein Paar parallele Gerade A und A_1 zerfällt, welche überdies mit den zugehörigen Geraden J und J_1 parallel sind. Aufser diesen drei Puncten X, Y, Z giebt es in der ganzen Ebene keinen andern Pol, dessen äufsere Polare A^2 in zwei *parallele* Gerade zerfällt.

Über die gesammten Geraden J, J_1 hat man folgenden Satz.

„Alle Paare Gerade J und J_1, in welche die innere Polare J^2 zerfällt, wenn der Pol P in der Curve E^2 liegt, berühren eine Curve 6ter Classe, J^6, und 14ten Grads, welche die 6 Sehnen S_0 zu Asymptoten und die Gerade G_∞ zur vierfachen Tangente hat." Die Curve J^6 berührt jedoch die Gerade G_∞ nicht in vier, sondern in nur zwei verschiedenen Puncten, aber in jedem doppelt, so dafs sie sich in jedem derselben selbst berührt, und zwar sind diese zwei Puncte zugleich die gemeinschaftlichen Puncte der Curve E^2 und der Geraden G_∞, oder die unendlich entfernten Puncte der Asymptoten von E^2. „Wird durch den Pol P mit den zugehörigen Geraden J und J_1 eine dritte Gerade, J_0,

parallel gezogen, so ist ihr Ort eine Curve 3ter Classe J_0^3 und 4ten Grads, welche die Gerade G_∞ zur Doppeltangente hat, und zwar sie in den eben genannten zwei Puncten berührt." „*Daher ist das ganze System der verschiedenen Paare Gerade J und J_1 auch so beschaffen, dafs jeder Punct $\mathfrak{P}$ der Ebene, im Allgemeinen, der Mittelpunct eines Kegelschnitts ist, welcher irgend drei der genannten Paare berührt, und zwar diejenigen drei Paare, welche den durch den Punct $\mathfrak{P}$ gehenden drei Geraden J_0 entsprechen.*"

„*Die 36 gemeinschaftlichen Tangenten der Curve J^6 und der Basis C^3 bestehen aus 18 Paar zusammengehörigen Geraden J und J_1.*"

Wenn die Geraden J und J_1 Tangenten der Basis C^3 werden, so vereinigen sich von den obigen drei Puncten a, b, c in J irgend zwei, etwa b und c, zu einem Berührungspuncte (bc) oder α; eben so die Puncte b_1 und c_1 in J_1 zu einem Berührungspuncte (b_1c_1) oder α_1; und damit fallen die Sehnen bb_1 und cc_1 in die Berührungssehne $\alpha\alpha_1$ zusammen, die wir durch $\mathfrak{S}_1$ und ihre Mitte, oder den zugehörigen Pol P, durch P_1 bezeichnen wollen. Die begrenzten gleichen Strecken $a\alpha = a_1\alpha_1$ von J und J_1 sollen schlechthin *gleiche parallele Tangenten* heifsen, aber da ihre Richtungen, von α nach a, und von α_1 nach a_1, gerade entgegengesetzt sind, so sollen sie *ungleichliegend* genannt werden. Mit Bezug hierauf, bedingt der letzte Satz den folgenden.

„*Eine beliebige Curve dritten Grads, C^3, hat, im Allgemeinen, 18 Paar parallele gleiche aber ungleichliegende Tangenten, aa und a_1a_1, und die Mitten, P_1, der 18 Berührungssehnen $\mathfrak{S}_1$ $(= \alpha\alpha_1)$, liegen in jenem (oben näher) bestimmten Kegelschnitte E^2.*"

„*Von den 36 gemeinschaftlichen Tangenten der Curve J^6 und der obigen Curve S_1^6* (II.) *fallen 12 auf die Gerade G_∞, 6 andere sind jene besondern 6 Sehnen S_0* (II. 1.), *und die noch übrigen 18 bestehen aus 9 Paar zusammengehörigen Geraden J und J_1.*" Da die letztern (als Tangenten der S_1^6) zugleich 9 Paar parallele und projectivisch gleiche Sehnen S_1, oder zur Unterscheidung S_1 und S_1^1, sind, so dafs $J = S_1 = abc$, $J = S_1^1 = a_1b_1c_1$ und $ab = bc = a_1b_1 = b_1c_1$ ist, wofern b und b_1 die mittlern Puncte, also die Mitten der Sehnen S_1 und S_1^1 sind: so hat man weiter, wenn der zugehörige Pol P oder die Mitte der Geraden bb_1 durch P^1 bezeichnet wird, den folgenden Satz.

„*In der beliebigen Curve C^3 giebt es im Ganzen 9 Paar parallele gleiche Sehnen S_1 und S_1^1, und die 9 Mitten P^1 der ihre Mitten b und b_1 verbindenden Geraden bb_1 liegen in dem oft genannten Kegelschnitte E^2.*"

Rücksichtlich der 42 gemeinschaftlichen Puncte der Curven J^9 und C^3 kann bemerkt werden, dafs wenn etwa a ein solcher Punct und J die zugehörige Tangente an J^6 ist, und man denkt sich das zugehörige Paar Gerade J und J_1 nebst dessen (in E^2 liegenden) Pol P, *dafs alsdann die in den Puncten P und a_1 an die respectiven Curven E^2 und C^3 gelegten Tangenten allemal parallel sind.* Daraus schliefst man den folgenden Satz.

„Denkt man sich die gegebene Curve C^3 in ihrer Ebene um den Mittelpunct, E, des Kegelschnitts E^2 um 180^0 herumbewegt und bezeichnet sie in der neuen Lage durch C_1^3, denkt sich ferner einen dem E^2 ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitt E_1^2 von doppelt so grofsen Dimensionen, dessen Mittelpunct E_1 in der Curve C_1^3 liegt, und bewegt diesen Kegelschnitt E_1^2 so, dafs während sein Mittelpunct E_1 die ganze Curve C_1^3 durchläuft, er stets mit E^2 ähnlich liegend ist, oder seine Axen stets sich selbst parallel bleiben, so wird die gegebene Curve C^3, im Allgemeinen, 42 mal von dem auf diese Weise bewegten Kegelschnitte E_1^2 berührt.“

IV. In dem Vorstehenden kamen beiläufig solche einzelne Sehnen S_0, $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}_1$ vor, bei welchen die Tangenten in ihren Endpuncten an die Basis C^3 parallel waren, und zwar kamen $6S_0$ (II. 1.), $24\mathfrak{S}_0$ (II. 3.) und $18\mathfrak{S}_1$ (III.) in Betracht. Fassen wir diese Eigenschaft für sich auf und bezeichnen jede Sehne, welche überhaupt die Berührungspuncte, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, irgend zweier paralleler Tangenten, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, der Basis C^3 verbindet, durch $\mathfrak{S}$, so ergeben sich folgende Resultate.

„Alle Sehnen $\mathfrak{S}$, welche die Berührungspuncte je zweier paralleler Tangenten der gegebenen Basis C^3 verbinden, berühren eine Curve 9ter Classe, $\mathfrak{S}^9$, und (höchstens) 36sten Grads.“ Ferner: *Die Curve $\mathfrak{S}^9$ hat 6 dreifache Tangenten, $\mathfrak{S}_3$, welche sich paarweise in den oben genannten, in der Curve E^2 liegenden drei Puncten X, Y, Z* (III.) *schneiden, und welche nebstdem zu je 3 durch 4 Puncte q, r, s und t gehen, so dafs sie die 6 Seiten eines vollständigen Vierecks $rqst$ sind. Dieselbe Curve berührt auch die $3A_s$ der C^3, und zwar jede im Mittelpuncte derjenigen Hyperbel, welche die C^3 in ihrem Berührungspuncte a_x* (II. 2.) *mit der jedesmaligen A_s fünfpunctig berührt.* Wird jede Tangente der C^3, welche mit einer ihrer $3A_s$ parallel ist, durch $\mathfrak{A}_0$ und ihr Berührungspunct durch $\mathfrak{a}_0$ bezeichnet, so giebt es im Ganzen $12\mathfrak{A}_0$ und $12\mathfrak{a}_0$. *Diese 12 Tangenten $\mathfrak{A}_0$ sind zugleich besondere Sehnen $\mathfrak{S}$ und berühren die Curve $\mathfrak{S}^9$*

in den nämlichen Puncten $\mathfrak{a}_0$. Wird ferner jede Tangente der C^3, welche mit einer ihrer $9\mathfrak{W}$ parallel ist, durch $\mathfrak{W}$ und ihr Berührungspunct durch $\mathfrak{v}$ bezeichnet, so giebt es im Ganzen 36 Puncte $\mathfrak{v}$, und somit auch 36 Sehnen $\mathfrak{w}\mathfrak{v} = \mathfrak{S}$, *welche die besondere Eigenschaft haben, dafs sie die Curve* $\mathfrak{S}^9$ *gerade in den Puncten* $\mathfrak{v}$ *berühren;* zudem berühren auch die $9\mathfrak{W}$ selbst, als specielle Sehnen $\mathfrak{S}$, die Curve $\mathfrak{S}^9$ in den zugehörigen Puncten $\mathfrak{w}$. Hieraus und aus Früherem ergeben sich folgende Beziehungen der Curve $\mathfrak{S}^9$ zu den Curven C^3 und S_1^6.

„*Die Curve* $\mathfrak{S}^9$ *berührt die Basis* C^3 *in ihren 9 Wendepuncten* $\mathfrak{w}$, *so wie in den* **12** *Puncten* $\mathfrak{a}_0$. *Die* **54** *gemeinschaftliche Tangenten beider Curven bestehen:* 1) *aus den* **9** *Wendetangenten* $\mathfrak{W}$ *der* C^3, *jede dreifach gezählt,* 2) *aus den* **12** *Tangenten* $\mathfrak{A}_0$, *jede doppelt gezählt, und* 3) *aus den* **3** *Asymptoten* A_s *der* C^3; *was zusammen* **54** *ausmacht.*"

„*Die* **54** *gemeinschaftlichen Tangenten der Curven* $\mathfrak{S}^9$ *und* S_1^6 *bestehen:* 1) *aus den* $9\mathfrak{W}$ *und* $3A_s$ *der Basis* C^3, *jede doppelt gezählt,* 2) *aus den obigen* $24\mathfrak{S}_0$ (II. 3.), *und* 3) *aus den* $6S_0$ (II. 1.); *was zusammen* **54** *beträgt.*"

Von den gemeinschaftlichen Puncten der Curven $\mathfrak{S}^9$ und C^3 kennen wir bereits 78, nämlich die $9\mathfrak{w}$ und $12\mathfrak{a}_0$, doppelt gezählt, und die $36\mathfrak{v}$. Wofern nun der Grad der Curve $\mathfrak{S}^9$ nicht geringer als 36 ist (was ich jedoch noch nicht genügend bewiesen habe), so fehlen noch 30 Puncte; jeder derselben ist der dritte Schnitt irgend einer Sehne $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ $(= \mathfrak{S})$ mit der Basis C^3, und zugleich der Berührungspunct dieser Sehne mit der Curve $\mathfrak{S}^9$. Aus der Lage jener 78 Puncte schliefst man: *dafs durch diese* **30** *Puncte Curven* 10ten *Grads gehen können.*

„*Der Berührungspunct, etwa* $\mathfrak{s}$, *jeder beliebigen Sehne* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{S}$ *mit ihrer Ortscurve* $\mathfrak{S}^9$ *ist einfach dadurch bestimmt, dafs er mit den beiden Krümmungs-Mittelpuncten, etwa* m *und* m_1, *der Basis* C^3 *in den Endpuncten* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{a}_1$ *der Sehne in einer Geraden liegt, so dafs die Gerade* mm_1 *allemal die Sehne* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ *im verlangten Berührungspuncte* $\mathfrak{s}$ *schneidet.*" Daraus schliefst man, unter andern:

„*Dafs es in einer beliebigen Curve dritten Grads* C^3, *im Allgemeinen,* **36** *Paare parallele gleiche und gleichliegende Krümmungsradien giebt.*"

Wird die Mitte jeder Sehne $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{S}$ durch $\mathfrak{M}$ bezeichnet, so folgt weiter:

„*Der Ort der Mitten* $\mathfrak{M}$ *aller Sehnen* $\mathfrak{S}$, *welche die Berührungspuncte paralleler Tangenten der gegebenen Basis* C^3 *verbinden, ist eine*

Curve 12ten Grads, $\mathfrak{M}^{12}$, und 96ster Classe, welche die Basis C^3 in ihren 9 Wendepuncten w berührt, in den 6 Puncten P_0 schneidet, und ihre drei unendlich entfernten Puncte a_x zu vierfachen Puncten hat; was zusammen die volle Zahl, $= 36$, gemeinschaftliche Puncte beider Curven ausmacht." Die 3 mal 4 Asymptoten der Curve $\mathfrak{M}^{12}$, welche beziehlich den $3A_s$ der C^3 parallel, liegen respective in der Mitte zwischen jeder A_s und den mit ihr parallelen 4 Tangenten $\mathfrak{A}_0$.

„*Die Curve $\mathfrak{M}^{12}$ schneidet die Curve E^2 in den nämlichen 6 Puncten P_0 und nebstdem in den 18 Puncten P_1* (III.)."

Wenn man die Mitte $\mathfrak{M}$ irgend einer Sehne $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{S}$ als Pol P annimmt, so berührt dessen innere Polare J^2 die Basis C^3 in den Endpuncten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ der Sehne. Für keinen andern Pol können sich J^2 und C^3 berühren, d. h. sie können sich nicht blos in einem Puncte oder nur einmal berühren, sondern sobald sie sich in irgend einem Puncte, $\mathfrak{a}$, einfach berühren, so berühren sie einander nothwendig noch in einem andern Puncte, $\mathfrak{a}_1$, und alsdann sind die zugehörigen Berührungstangenten, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, parallel, die Berührungssehne $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ geht durch den jedesmaligen Pol P und wird durch ihn gehälftet. Also:

„*Der Ort des Pols, dessen innere Polare J^2 die Basis C^3 berühren soll, ist die nämliche obige Curve 12ten Grads $\mathfrak{M}^{12}$; dabei berühren sich die Curven J^2 und C^3 zugleich in zwei Puncten und die zugehörigen beiden Berührungstangenten sind stets parallel.*" Daraus folgt weiter:

„*Dafs es in der gegebenen Basis C^3 keine zwei Sehnen $\mathfrak{S}$ geben kann, welche einander hälften; und daher kann auch die Curve $\mathfrak{M}^{12}$, aufser jenen drei vierfachen Puncten a_x, keinen andern vielfachen Punct haben.*"

§. 16.

Die im Vorstehenden (§. 15.) über die allgemeine Curve dritten Grads aufgestellten Sätze und Eigenschaften erleiden mehr oder weniger erhebliche Modificationen, wenn die Curve von specieller Art ist. Die wesentlichsten besondern Arten sind etwa folgende:

I. Wenn die Curve C^3 einen Doppelpunct hat; wobei auch noch die dreifache Art des Doppelpuncts zu berücksichtigen ist (§. 11.).

II. Wenn die Curve zwei Doppelpuncte hat, oder in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfällt.

III. Wenn die Curve drei Doppelpuncte hat, oder in drei Gerade zerfällt.

Wiewohl diese Fälle zu mehren nicht uninteressanten besondern Sätzen führen, so mufs ich hier doch die nähere Discussion derselben unterlassen.

§. 17.

Ist nun ferner die gegebene Basis eine allgemeine Curve vierten Grads, C^4, und somit die innere Polare jedes Pols eine Curve dritten Grads, J^3, so kann letztere möglicherweise nur entweder in eine Curve zweiten Grads und in eine Gerade, oder in drei Gerade zerfallen; und zwar kann dieses Zerfällen nur dadurch geschehen, dafs von den durch den jedesmaligen Pol P gehenden 6 Sehnen S, oder aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, ee_1 und ff_1, irgend zwei aufeinanderfallen, und eine Doppelsehne S_2 bilden; denn da alsdann durch die in S_2 liegenden zwei Paar Endpuncte, etwa a und a_1, b und b_1, keine *eigentliche* Curve J^3 gehen kann, so mufs sie zerfallen, und zwar mufs S_2 selbst ein Bestandtheil von ihr sein. Der andere Bestandtheil geht dann durch die 8 Endpuncte der noch übrigen 4 Sehnen S und ist, im Allgemeinen, irgend ein Kegelschnitt J^2, der den Pol P zum Mittelpunct hat, aber welcher jedoch in besondern Fällen auch selbst noch in zwei Gerade zerfallen kann, und zwar auf zwei Arten. Nämlich 1) sobald es sich ereignet, dafs von den übrigen 4 Sehnen auch noch ein Paar aufeinanderfällt, so fällt nothwendigerweise auch noch das dritte Paar aufeinander, so dafs dann J^3 aus drei Doppelsehnen S_2 besteht; oder 2) kann sich ereignen, dafs von den Endpuncten der übrigen 4 Sehnen cc_1, dd_1, ee_1 und ff_1 irgend vier, jedoch von jeder Sehne einer, wie etwa c, d, e und f, in einer Geraden J liegen, so liegen nothwendigerweise die vier andern c_1, d_1, e_1 und f_1, in einer andern Geraden J_1, so dafs dann J^3 aus drei Geraden S_2, J und J_1 besteht, wovon die zwei letztern parallel sind und gleich weit vom Pol P abstehen. Demnach kann die innere Polare J^3 möglicherweise bestehen:

A. Aus $J^2 + S_2$, d. h. aus einem Kegelschnitte J^2 und einer durch dessen Mittelpunct P gehenden Geraden oder Doppelsehne S_2.

B. *a*) Aus $3S_2$, d. h. aus drei durch den Pol P gehenden Doppelsehnen S_2; oder

b) Aus $S_2 + J + J_1$, d. h. aus einer durch den Pol P gehenden Doppelsehne S_2 und aus zwei gleich weit von demselben abliegenden parallelen Geraden J und J_1.

Der Fall (*A.*) kommt am häufigsten vor, wogegen die Fälle unter (*B.*) nur für einzelne bestimmte Pole eintreten. Nämlich Fall (*B. a.*): ***Es giebt***

im Ganzen nur 9 solche Pole, die P_3 heifsen sollen, für welche die innere Polare J^3 in drei Doppelsehnen S_2 zerfällt," und zwar sind dieselben zugleich die der Geraden G_∞ in Bezug auf die Basis entsprechenden 9 Pole, d. h. sie sind die gemeinschaftlichen Schnittpuncte aller äufsern ersten Polaren A^3 in Bezug auf C^4, deren Pole in der Geraden G_∞ liegen. Die besondern einzelnen Pole, für welche der Fall (*B. b.*) eintritt, sind schwieriger anzugeben; wie man weiter unten sehen wird.

Über den Ort des Pols, dessen innere Polare auf die angegebene Weise in Theile zerfällt und über den Ort aller dabei vorkommenden Doppelsehnen, so wie über andere damit in Beziehung stehende Umstände, ergeben sich, unter andern, folgende Sätze und Eigenschaften.

„Der Ort des Pols P, dessen innere Polare auf die angegebene Art in Theile zerfällt, ist eine Curve 10ten Grads, P^{10}, und 36ster Classe, welche die genannten besondern 9 Pole P_3 zu dreifachen Puncten hat, die Basis C^4 in ihren 4 unendlich entfernten Puncten a_∞ berührt und somit deren $4A_s$ auch selbst zu Asymptoten hat." Die noch übrigen 32 gemeinschaftlichen Puncte der beiden Curven P^{10} und C^4 sind solche besondere Pole, etwa P^0, für welche die zugehörige Doppelsehne S_2 in eine Tangente der Basis C^4 übergeht, etwa S_2^0, wobei nämlich das eine Paar Endpuncte, b und b_1, sich zum Berührungspunct P^0 vereinigt hat. Also:

„Eine beliebige Curve vierten Grads C^4 hat im Ganzen 32 solche Tangenten S_2^0, welche von ihr in zwei vom Berührungspunct P^0 gleichweit abstehenden Puncten a und a_1 geschnitten werden." *) *„Durch die 32 Berührungspuncte P^0 können Curven 8ten Grads gehen."*

---

*) Dieser Satz stimmt mit demjenigen überein, welchen Herr Professor *Hesse* im 36sten Bande S. 161 d. Journ. zuerst aufgestellt hat; denn beide Sätze gehen durch Projection in einander über; oder beide Sätze sind zugleich in dem folgenden Satze enthalten.

„Bestimmt man in jeder Tangente einer gegebenen Curve 4ten Grads C^4 den ihrem Berührungspuncte, in Bezug auf ihre zwei Schnittpuncte mit der Curve, zugeordneten vierten harmonischen Punct Q, so ist dessen Ort eine Curve 52sten Grads, Q^{52}, welche die gegebene Curve in ihren 24 Wendepuncten dreipunctig berührt (die Wendetangenten mit ihr gemein hat) und sie in den 56 Berührungspuncten ihrer 28 Doppeltangenten schneidet; was zusammen die volle Zahl gemeinschaftliche Puncte beider Curven ausmacht, $24 \cdot 3 + 56 = 128$." *„Die obigen besondern 32 Tangenten S_2^0 sind den 32 Asymptoten der Curve Q^{52} parallel."* Bei dieser Gelegenheit erlaube ich mir noch folgende Bemerkung.

Die im obigen Monatsbericht durch $Q_0^{3(n-2)}$ bezeichnete Kerncurve ist, für die Basis $= C^4$, eine bestimmte Curve 6ten Grads, Q_0^6, welche durch die 24 Wendepuncte der

Von den 10 gemeinschaftlichen Puncten der Curve P^{10} und der Geraden G_x kennen wir erst vier, die $4a_x$; allein von diesen, so wie von den ihnen zugehörigen Asymptoten, $4A_s$, hängen die noch übrigen 6 Puncte, so wie die Richtungen ihrer zugehörigen Asymptoten ab. Bezeichnen wir für einen Augenblick die 4 Puncte a_x durch α, β, γ und δ, und die 6 unbekannten Puncte durch x und x_1, y und y_1, z und z_1, so ist jedes Paar der letztern immer zu den in zwei Paare geordneten erstern zugleich harmonisch, so dafs etwa

$$x\alpha x_1\beta \text{ und } x\gamma x_1\delta;\quad y\alpha y_1\gamma \text{ und } y\beta y_1\delta;\quad z\alpha z_1\delta \text{ und } z\beta z_1\gamma$$

harmonisch sind. Oder zieht man durch einen beliebigen Punct die 4 Geraden A, B, C und D den 4 Asymptoten A_s parallel, ordnet dieselben auf die möglichen drei Arten zu zwei Paaren, nämlich AB und CD, AC und BD, AD und BC, und construirt zu diesen andere drei Strahlenpaare X und X_1, Y und Y_1, Z und Z_1 so, dafs zugleich

$$XAX_1B \text{ und } XCX_1D;\quad YAY_1C \text{ und } YBY_1D;\quad ZAZ_1D \text{ und } ZBZ_1C$$

harmonisch sind: so sind diese Strahlen X, X_1; Y, Y_1; Z, Z_1 den unbekannten 6 Asymptoten der Curve P^{10} parallel, und somit nach jenen 6 Puncten x, x_1; y, y_1; z, z_1 gerichtet, welche die Curve mit G_x gemein hat. ***Von diesen drei Punctenpaaren sind immer zwei Paar reell und das dritte imaginär, und dem entsprechend sind auch von den 6 Asymptoten 4 reell und 2 imaginär,*** wofern nämlich jene ersten 4 Asymptoten A_s reell sind.

Die Curve P^{10} geht ferner insbesondere auch durch die Mitten der 28 Doppeltangenten der Basis C^4.

Was nun weiter die Doppelsehnen, S_2, betrifft, so ist zwar die Curve P^{10} der Ort ihrer Mitten, P, aber die Sehnen selbst umhüllen eine andere Curve, nämlich:

Basis C^4 geht. Da nun durch dieselben 128 Puncte, welche die Curve Q^{32} mit C^4 gemein hat, unendlich viele andere Curven 32sten Grads gehen, und da, wenn eine niedrigere Curve Q^x, $x < 32$, durch $4x$ der genannten 128 Puncte geht, dann eben so durch die noch übrigen $128 - 4x = 4(32 - x)$ Puncte unzählige Curven $(32-x)^{ten}$ Grads, Q^{32-x}, gehen können, so folgt also: „*Dafs durch die 56 Berührungspuncte der 28 Doppeltangenten der Basis C^4 unzählige Curven 14ten Grads, Q^{14}, gehen können.*“ Denn denkt man sich die Kerncurve Q_0^6 dreifach (oder nach Rechnungsart: ihre Gleichung in Cubus erhoben), so ist sie als eine Curve 18ten Grads, Q_0^{18}, anzusehen, und als solche geht sie durch die $24 \cdot 3$ oder $4 \cdot 18$ Puncte, welche Q^{32} und C^4 in den 24 Wendepuncten gemein haben, und folglich können durch die 56 Berührungspuncte der 28 Doppeltangenten unzählige Curven Q^{14} gehen. — Auf wie mannichfaltige Weise solche Curve Q^{14} selbst wieder in Theile zerfallen kann, werde ich an einem geeignetern Orte nachweisen.

Der Ort aller Doppelsehnen S_2, welche Bestandtheile der zerfallenden innern Polaren J^3, oder welche in der gegebenen Basis überhaupt möglich sind, ist eine Curve 9ter Classe, S_2^9, und 34sten Grads, welche die Basis in ihren im Unendlichen liegenden 4 Puncten a_∞ vierpunctig berührt, somit deren $4A_\infty$ ebenfalls zu Asymptoten hat, aber jede derselben noch in einem bestimmten andern Puncte berührt, also dieselben zu Doppeltangenten hat; ferner berührt die Curve auch noch die 28 Doppeltangenten der Basis und hat die Gerade G_∞ zur sechsfachen Tangente, und zwar berührt sie diese in den nämlichen, vorhin näher bestimmten 6 Puncten x und x_1, y und y_1, z und z_1." Nämlich denkt man sich den Pol P in einem dieser 6 Puncte, etwa in x, so fällt die ihm zugehörige Doppelsehne S_2 auf die Gerade G_x und berührt die Curve im conjugirten Puncte x_1, und auch umgekehrt; und eben so verhält es sich mit den beiden andern Punctenpaaren. Diese Berührungen sind mit den respectiven Puncten gleichzeitig reell oder imaginär.

Da die Basis C^4, im Allgemeinen, von der 12ten Classe ist, so hat sie mit der Curve S_2^9 im Ganzen $12 \cdot 9 = 108$ Tangenten gemein, und diese bestehen: 1) in den obigen 32 Tangenten S_2^9; 2) in den 28 Doppeltangenten der Basis, jede doppelt gezählt; und 3) in den $4A_\infty$, jede fünffach gezählt; was zusammen richtig $32 + 28 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 108$ ausmacht.

Von den gemeinschaftlichen Puncten der Curve S_2^9 und der Geraden G_∞ kennen wir bereits 16, nämlich die 6 Berührungspuncte x, x_1, y, y_1, z und z_1, jeder doppelt gezählt, und die 4 Puncte a_∞. Da die Curve vom 34sten Grad ist, so fehlen also noch 18 Puncte, welche durch folgende Betrachtung näher bestimmt werden, aus der zugleich noch einige andere Eigenschaften hervorgehen.

Durch jeden gegebenen Punct gehen, im Allgemeinen, 9 Doppelsehnen S_2. Liegt der Punct in der Basis C^4 selbst, er heifse a, so ist er ein Endpunct von jeder der $9\,S_2$ *und alsdann liegen die ihm zugehörigen andern 9 Endpuncte a_1 in einer Curve 3ten Grads, a_1^3, welche die Basis im Puncte a dreipunctig berührt; und ebenso liegen die Mitten P der $9\,S_2$ in einer andern Curve 3ten Grads, P^3, welche die Basis im Puncte a zweipunctig berührt.* Ist insbesondere der Punct a ein Wendepunct der Basis, *so ist er dasselbe auch von jeder der beiden Curven a_1^3 und P^3.* Und ist a einer der obigen 32 Schnittpuncte P^0 der Curven P^{10} und C^4, *so wird die Basis in ihm von der Curve a_1^3 vierpunctig und von der Curve P^3*

dreipunctig berührt, so dafs diese beiden Curven einander daselbst auch dreipunctig berühren.

Wiewohl durch jeden Punct 9 Doppelsehnen gehen, so sind dieselben doch nur zu 3 und 3 parallel, so dafs es nach jeder gegebenen Richtung nur je $3S_2$ giebt, oder mit andern Worten: durch jeden Punct Q in der Geraden G_∞ gehen nur 3 (nicht selbst im Unendlichen liegende) Doppelsehnen S_2, indem die 6 übrigen auf die Gerade G_∞ selbst fallen. Die Mitten, P, je dreier paralleler Doppelsehnen liegen nothwendigerweise in einem Durchmesser, D, der Basis C^4 (§. 15. I.), oder, was dasselbe ist, in der dritten äufsern Polare, D, des Punctes Q in Bezug auf die Basis, und die drei Sehnen S_2 haben die dem Durchmesser D *conjugirte Richtung*. Man denke sich ferner von demselben Puncte Q die erste äufsere Polare A^3 in Bezug auf die Basis, so geht dieselbe, wie schon bemerkt, durch jene 9 Pole P_3, welche dreifache Puncte der Curve P^{10} sind, und daher kann sie die letztern aufserdem nur noch in irgend drei Puncten P schneiden, welche (vermöge der Lage der $9P_3$) nothwendig zugleich in irgend einer Geraden liegen müssen. Diese Gerade ist aber gerade der genannte Durchmesser D und die drei Schnittpuncte P sind gerade die Mitten jener nach Q gerichteten $3S_2$. Also:

„Denkt man sich von irgend einem Puncte Q in der Geraden G_∞ die erste und dritte äufsere Polare in Bezug auf die Basis C^4, A^3 und D, so schneiden sich dieselben in denjenigen 3 Polen P, deren zugehörige 3 Doppelsehnen S_2 nach dem nämlichen Puncte Q gerichtet sind, oder welche die dem Durchmesser D conjugirte Richtung haben." Und: *Bewegt sich der Punct Q längs der Geraden G_∞, so ist der Ort der 3 Schnitte P seiner ersten und dritten äufsern Polare die nämliche Curve 10ten Grads P^{10}, welche alle Pole enthält, deren innere Polaren J^3 zerfallen."* Alle bei dieser Bewegung vorkommende Polaren A^3 bilden einen Curvenbüschel, $B(A^3)$, mit den 9 Grundpuncten P_3.

Nun kann sich ereignen, dafs von den genannten Polaren A^3 irgend eine die Curve P^{10} berührt, wobei von den 3 Schnittpuncten P zwei sich zu einem Berührungspuncte, etwa $\mathfrak{P}_0$, von P^{10}, A^3 und D vereinigen, und wobei also auch die zugehörigen beiden Doppelsehnen S_2 in eine, etwa $\mathfrak{S}_2^0$, zusammenfallen; alsdann berührt diese Sehne $\mathfrak{S}_2^0$ die Curve S_2^0 im entsprechenden Puncte Q, oder für diesen Fall Q_0, und ist somit eine Asymptote derselben, so wie Q_0 einer ihrer, oben verlangten, gemeinschaftlichen Puncte mit der

Geraden G_∞ ist. Da nun eine Curve P^p von den Curven eines Büschels $B(Q^q)$ in $p(p+2q-3)$ Puncten berührt werden kann (s. obigen Monatsbericht): so müfste danach die Curve P^{10} von dem Büschel Polaren $B(A^3)$ in $10(10+2\cdot3-3)=130$ Puncten $\mathfrak{P}_0$ berührt werden. Allein von diesen 130 Puncten werden 108 durch jene gemeinschaftlichen 9 Puncte P_3 absorbirt, so dafs nur noch 22 frei bleiben, unter welchen sich jedoch noch jene bereits bekannten 4 Puncte a_∞ befinden, so dafs es also nur 18 zuläfsige Berührungspuncte $\mathfrak{P}_0$ giebt: und diesen 18 Puncten $\mathfrak{P}_0$ entsprechen somit auf der Geraden G_∞ die verlangten 18 Puncte Q_0, so wie die zugehörigen 18 Asymptoten $\mathfrak{S}_2^0$ der Curve S_2^0. Das heifst: ***Die oben noch fehlenden 18 gemeinschaftlichen Puncte Q_0 der Curve S_2^0 und der Geraden G_∞ haben die Eigenschaft, oder sind dadurch bestimmt, dafs die erste und dritte Polare eines jeden derselben in Bezug auf die Basis sich in irgend einem Puncte $\mathfrak{P}_0$ berühren, und dafs die jenem Puncte zugehörige Asymptote $\mathfrak{S}_2^0$ zugleich durch den letztern Punct geht.*** Dieselbe Eigenschaft besitzen übrigens auch jene 4 Puncte a_∞, jedoch mit dem Unterschiede, dafs jeder Q_0 und $\mathfrak{P}_0$ zugleich ist, d. h. dafs die erste und dritte Polare eines jeden sich mit der Curve P^{10} in ihm selbst berühren, und zwar ist seine dritte Polare die zugehörige Asymptote A_∞ der Basis, so dafs also die 4 Asymptoten der Basis zugleich specielle Durchmesser derselben sind. Die 18 Asymptoten $\mathfrak{S}_2^0$ haben als Doppelsehnen die besondere Eigenschaft: ***dafs die in ihren Endpuncten a und a_1, b und b_1 an die Basis C^4 gelegten Tangenten-Paare A und A_1, B und B_1 sich auf dem zugehörigen Durchmesser D schneiden, so dafs dieser Durchmesser eine Diagonale des vollständigen Vierseits AA_1BB_1 ist, dessen beide andern Diagonalen mit $\mathfrak{S}_2^0$ parallel sind.***

Jeder Durchmesser D schneidet die Curve P^{10} aufser jenen 3 Puncten P, die zugleich in der entsprechenden Polare A^3 liegen, in noch 7 andern Puncten P; aber jene unterscheiden sich von diesen wesentlich dadurch, dafs die ihnen zugehörigen Doppelsehnen S_2 die dem Durchmesser conjugirte Richtung haben, wogegen die zu den 7 andern gehörigen Doppelsehnen zu je einem andern Durchmesser conjugirt sind. Also: ***Von den je 10 Polen P, welche in irgend einem Durchmesser D liegen, gehören ihm 3 in der Art eigenthümlich an, dafs die ihnen zugehörigen Doppelsehnen die dem Durchmesser conjugirte Richtung haben, oder nach seinem in G_∞ liegenden Pol Q gerichtet sind.***

Über die Durchmesser insgesammt hat man folgenden Satz:

„Alle Durchmesser, D, der gegebenen Basis C^4 umhüllen eine bestimmte Curve 3ter Classe, D^3, und 4ten Grads, welche drei Rückkehrpuncte, $\mathfrak{x}$, und eine Doppeltangente, D_2, hat; und namentlich berührt diese Curve jede der 4 Asymptoten A_x der Basis (als specielle Durchmesser) in demjenigen Puncte, welcher der Schwerpunct von ihren 3 Schnittpuncten mit den 3 andern Asymptoten ist." Die Curve D^3 heifst auch die dritte Polare der Geraden G_x in Bezug auf die Basis C^4 (Monatsbericht).

Danach gehen also durch jeden beliebigen Punct R in der Ebene, im Allgemeinen, je drei Durchmesser der C^4; somit auch durch jeden Punct Q, in G_x, drei parallele Durchmesser, etwa D_q, und zwar haben diese die conjugirte Richtung desjenigen Durchmessers D, welcher dem Puncte Q entspricht (dessen 3te Polare ist); aber die den drei Durchmessern D_q conjugirten Richtungen sind unter sich, so wie auch, im Allgemeinen, von der Richtung des Durchmessers D verschieden. Nämlich:

„Die Basis C^4 hat im Ganzen nur drei Paar conjugirte Durchmesser, d. h. solche Durchmesser, wovon jeder die conjugirte Richtung des andern hat, und zwar sind dieselben beziehlich nach den obigen Puncten-Paaren x und x_1, y und y_1, z und z_1 in der Geraden G_x gerichtet, und somit den dort construirten Strahlen-Paaren X und X_1, Y und Y_1, Z und Z_1 parallel. Denkt man sich den Punct Q in einem der 6 Puncte, etwa in x, so geht der ihm entsprechende Durchmesser D durch den conjugirten Punct x_1, und auch umgekehrt; und zwar ist dabei x_1 zugleich einer der drei Puncte P, die dem Durchmesser D eigenthümlich zugehören, oder in denen er von der entsprechenden Polare A^3 geschnitten wird.

Die 4 Asymptoten A_x sind diejenigen besondern Durchmesser, welchen ihre eigene Richtung conjugirt ist.

Die Doppeltangente D_2 der Curve D^3 ist gewissermafsen ein doppelter Durchmesser, d. h. ein solcher, welchem zwei verschiedene Richtungen conjugirt sind, so dafs ihm auch zwei verschiedene Pole auf der Geraden G_x entsprechen, etwa Q_2 und Q_2^1, welche nach den beiden Richtungen hin liegen; ebenso müssen ihm zweimal 3 Pole P eigenthümlich angehören und die zu denselben gehörigen Doppelsehnen S_2 müssen zu 3 und 3 die conjugirten Richtungen haben, also parallel oder nach den Puncten Q_2 und Q_2^1 gerichtet sein.

Die conjugirten Richtungen der drei Durchmesser, welche durch

irgend einen gegebenen Punct R gehen, sind allemal durch die Asymptoten der beiden ersten Polaren A^3 und J^3 des nämlichen Punctes bestimmt, und auch umgekehrt.

Jeder (in P^{10} liegende) Pol P gehört, im Allgemeinen, *nur einem* der durch ihn gehenden drei Durchmessern eigenthümlich an, nämlich demjenigen, welchem die zugehörige Doppelsehne S_2 conjugirt ist. Nur von jenen besondern 9 Polen P_3 gehört jeder allen drei Durchmessern zugleich an, indem ihm auch drei Doppelsehnen zugehören, welche den Durchmessern beziehlich conjugirt sind.

„Die durch jeden der 9 Pole P_3 gehenden drei Durchmesser berühren die durch denselben gehenden drei Zweige der Curve P^{10} daselbst."

Ist der Pol $P_x\,(=P)$ insbesondere einer der 40 gemeinschaftlichen Puncte der Curven P^{10} und D^3, so fallen von den durch ihn gehenden drei Durchmessern zwei zusammen, nämlich auf die Tangente der Curve D^3 im Pol P_x, welche D_t heifsen soll; der andere Durchmesser berührt die D^3 in irgend einem andern Puncte, etwa R_0, und heifse D_r. Nun sind hierbei zwei Fälle möglich, nämlich entweder gehört der Pol P_x

1) dem Durchmesser D_t, oder

2) dem Durchmesser D_r eigenthümlich an;

und davon hängen sodann weiter folgende interessante Umstände ab:

I. *„Gehört der Pol P_x zum Durchmesser D_t, so besteht seine innere Polare J^3 aus J^2+S_2 und zwar ist die Doppelsehne S_2 zugleich eine Asymptote des Kegelschnitts J^2;"* und

II. *„Gehört der Pol P_x zum Durchmesser D_r, so besteht seine innere Polare aus S_2+J+J_1, wobei die Geraden J und J_1 parallel sind und gleichweit vom Pol abstehen."*

Hierbei entsteht die Frage:

Wieviele von den 40 Polen P_x gehören zu Durchmessern D_t, und wieviele gehören zu Durchmessern D_r? oder wieviele in J^2+S_2 zerfallende innere Polaren giebt es, bei welchen S_2 Asymptote von J^2 ist, und wieviele giebt es, welche in drei Gerade S_2+J+J_1 zerfallen?

Diese Frage weifs ich vor der Hand noch nicht sicher zu beantworten, und überlasse sie daher dem geneigten Leser.

Über die Curve D^3 will ich noch Folgendes bemerken.

„Die Curve D^3 ist der Ort desjenigen Pols R_0, dessen äufsere Polare A^3 die Gerade G_∞ berührt; und die dritte Polare des Berührungs-

punctes, Q, ist gerade derjenige Durchmesser D, welcher die Curve D^3 in jenem Pole R_0 berührt." Da nun die innere Polare J^3 desselben Pols R_0 mit der Geraden G_x allemal die nämlichen drei Puncte gemein hat, wie die äufsere A^3 (§. 13. II.), so mufs auch sie die Gerade G_x in Q berühren; allein nach dem Früheren (§. 11.) ist diese Berührung nur dadurch möglich, dafs Q ein Doppelpunct der Curve J^3 ist. Daher kann man auch sagen:

„*Der Ort desjenigen Pols R_0, dessen innere Polare J^3 nur einen einzigen Doppelpunct Q (oder insbesondere auch drei Doppelpuncte) hat,*) ist die Curve D^3, und der Ort des Doppelpunctes ist die Gerade G_x.*" Bei denjenigen Polen $P_x\,(=R_0)$, deren innere Polaren aus S_2+J+J_1 bestehen, und somit drei Doppelpuncte haben, liegt nur einer der letztern (der Schnitt von J und J_1) auf der Geraden G_x; und bei denjenigen P_x, deren innere Polaren aus J^2+S_2 bestehen, fallen die zwei Doppelpuncte in einen zusammen, der als ein Rückkehrpunct anzusehen ist und in G_x liegt.

„*Liegt der Pol R_0 insbesondere in einem der drei Rückkehrpuncte $\mathfrak{r}$ der Curve D^3, so ist der ihm entsprechende Punct Q zugleich ein Wendepunct seiner Polare A^3 und ein Rückkehrpunct seiner Polare J^3, und zwar ist die Gerade G_x beziehlich die zugehörige Wende- und Rückkehrtangente.*"

Liegt ein Pol R in dem Doppeldurchmesser (Doppeltangente der D^3) D_2, so gehen seine beiden Polaren A^3 und J^3 durch die dem D_2 entsprechenden beiden Puncte Q_2 und Q_2^1 auf G_x; und bewegt sich R längs D_2, so bleiben also zwei Paar Asymptoten der Polaren A^3 und J^3 sich selbst parallel, nämlich stets nach jenen Puncten Q_2 und Q_2^1 gerichtet.

§. 18.

Hat die Basis C^4 specielle Form, hat sie z. B. Doppel- oder Rückkehrpuncte, oder besteht sie aus Theilen, nämlich aus

1) C^3+C^1; 2) $C^2+C_1^2$; 3) C^2+2C^1; 4) $4C^1$:

---

*) Soll die Polare J^3 zwei (und auch drei) Doppelpuncte haben, so mufs sie aus J^2+S_2 bestehen, somit der Ort ihres Pols die Curve P^{10} sein, und dann sind die Doppelpuncte die gegenseitigen Schnitte von J^2 und S_2, etwa $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$. Dabei kann man fragen: *In welcher Curve, $\mathfrak{D}^n$, liegen alle diese Doppelpuncte? Ist der Grad-Exponent, n, etwa gleich der Zahl derjenigen Pole P_x, welche zu Durchmessern D_t gehören? und sind die diesen Polen zugehörigen Doppelsehnen S_2 zugleich Asymptoten der Curve $\mathfrak{D}^n$?* Diese unbekannte Curve $\mathfrak{D}^n$ hat übrigens die 9 Pole P_3 gleichfalls zu dreifachen Puncten, wie die Curve P^{10}. Der Ort der Doppelpuncte aller innern Polaren J^3 insgesammt besteht also aus $\mathfrak{D}^n+G_x$.

so werden die vorigen Sätze und Eigenschaften (§. 17.) auf entsprechende Weise verändert, so wie auch neue Sätze herbeigeführt. Eine umständliche Erörterung aller dieser Fälle würde hier zu weit führen; daher begnüge ich mich nur Einiges kurz anzudeuten.

I. Besteht die Basis aus $C^2 + C_1^2$, d. h. aus irgend zwei gegebenen Curven zweiten Grads, so hat sie 4 Doppelpuncte, nämlich die gegenseitigen Schnittpuncte q, r, s, t von C^2 und C_1^2, und es tritt zunächst die Hauptänderung ein:

„Dafs dabei die Curve P^{10} in zwei Theile $P^8 + P^2$ und eben so die Curve S_2^9 in zwei Theile $S_2^6 + S_2^3$ zerfällt."

Es kann nämlich dabei die Doppelsehne S_2 von zweierlei Art sein. Sind a, b ihre Schnittpuncte mit C^2, und a_1, b_1 ihre Schnitte mit C_1^2, so können entweder

A. Die Sehnen ab und a_1b_1 dieselbe Mitte P haben, wobei dann die Wechselsehnen paarweise gleich sind, $aa_1 = bb_1$, $ab_1 = ba_1$; oder

B. Die Sehnen ab und a_1b_1 sind gleich, und ein Paar Wechselsehnen, aa_1 und bb_1 oder ab_1 und ba_1, hat dieselbe Mitte P und das andere Paar ist gleich.

Gemäfs dieser zwei Arten Doppelsehnen zerfallen die beiden Ortscurven in die genannten Theile, welche, wie folgt, gewissermafsen selbständig auftreten.

1. *„Im Falle (A.) ist der Ort des Pols P ein bestimmter Kegelschnitt P^2, und der Ort der Doppelsehne S_2 ist eine bestimmte Curve 3ter Classe S_2^3 und 4ten Grads, welche die Gerade G_∞ zur Doppeltangente (und drei Rückkehrpuncte ∞) hat."* Oder anders ausgesprochen: *„Der Ort der Transversale S_2, welche in den zwei gegebenen Kegelschnitten C^2, C_1^2 solche Sehnen ab, a_1b_1 bildet, welche die nämliche Mitte P haben, ist eine Curve 3ter Classe S_2^3 und 4ten Grads, und der Ort der Mitte P ist eine Curve zweiten Grads P^2."* Zieht man in den gegebenen Kegelschnitten C^2 und C_1^2 irgend zwei parallele Durchmesser, etwa α und α_1, und ferner die ihnen conjugirten Durchmesser β und β_1: *so treffen sich die letztern allemal in irgend einem der Pole P, und die durch diesen mit den Durchmessern α und α_1 parallel gezogene Gerade ist die ihm zugehörige Doppelsehne S_2.* Tritt der besondere Fall ein, dafs die Durchmesser β und β_1 auch parallel werden: *so sind alsdann α, α_1 der einen und β, β_1 der andern Asymptote der Curve P^2 parallel.* Zieht man durch einen beliebigen Punct

drei Paar Gerade A und B, A_1 und B_1, X und X_1 beziehlich den Asymptoten der drei Kegelschnitte C^2, C_1^2, P^2 parallel, so sind

$$AXBX_1 \text{ und } A_1XB_1X_1$$

zugleich harmonisch; und wenn α und β, α_1 und β_1, x und x_1 die im Unendlichen liegenden Puncte derselben Kegelschnitte sind, so sind $\alpha x \beta x_1$ sowohl als $\alpha_1 x \beta_1 x_1$ harmonisch. — ***Die Curve P^2 schneidet jede der beiden gegebenen, etwa C^2, in denjenigen 4 Puncten P^0, bei welchen die zugehörige Tangente S_2^0 (an C^2) von der andern gegebenen Curve C_1^2 in gleichen Abständen vom Puncte P^0 begrenzt wird, so dafs $a_1P^0 = b_1P^0$ ist. Ferner geht die Curve P^2 durch die Mittelpuncte der gegebenen Curven C^2 und C_1^2, so wie durch die Mitten der 6 Seiten des vollständigen Vierecks $qrst$, und durch die drei Schnittpuncte, etwa $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, der drei Paar Gegenseiten desselben; demzufolge hat die Curve P^2 die drei Geraden, welche die Mitten der Gegenseiten verbinden, zu Durchmessern, und deren gemeinsamen Schnittpunct zum Mittelpunct, so dafs also ihr Mittelpunct im Schwerpunct der 4 Puncte q, r, s, t liegt.*** — Die Curve S_2^3 berührt die Gerade G_x in den nämlichen beiden Puncten x und x_1, in welchen letztere von der Curve P^2 geschnitten wird; ferner berührt sie insbesondere die zwei Paar Asymptoten der gegebenen Curven C^2 und C_1^2, und auch jene zweimal 4 Tangenten S_2^0 derselben, so wie ferner die 6 Seiten des vollständigen Vierecks $qrst$ und die durch die Ecken des Dreiecks $\mathfrak{abc}$ den Gegenseiten desselben parallel gezogenen drei Geraden.

Die angegebenen Eigenschaften haben noch eine weitere Ausdehnung. Denkt man sich den durch C^2 und C_1^2 bestimmten Kegelschnitt-Büschel, $B(C^2)$, mit den 4 Grundpuncten q, r, s und t, d. h. alle Kegelschnitte, welche mit den beiden gegebenen die nämlichen vier (reellen oder imaginären) Puncte q, r, s, t gemein haben; so kann man sagen: ***„Die Curve P^2 sei zugleich der Ort der Mittelpuncte aller dieser Kegelschnitte $B(C^2)$, so dafs jeder Pol P allemal zugleich der Mittelpunct irgend eines derselben ist, und auch umgekehrt."*** Und: ***„Die Curve S_2^3 sei zugleich der Ort der Asymptoten aller dieser Kegelschnitte $B(C^2)$, so dafs jede Doppelsehne S_2 zugleich eine Asymptote irgend eines derselben ist, und auch umgekehrt."*** Und zwar ist dabei der jedesmalige Pol P nicht allein die Mitte der Sehnen ab, a_1b_1 der beiden gegebenen Kegelschnitte C^2 und C_1^2, ***sondern er ist die gemeinsame Mitte aller Sehnen, welche die zugehörige S_2 mit sämmtlichen Kegelschnitten $B(C^2)$ bildet, und welche in stetiger Folge alle Gröfsen,***

von 0 *bis* ∞, *enthalten.* Nämlich unter den Kegelschnitten giebt es jedesmal einen, etwa C_2^2, welcher die S_2 in P berührt, dessen Sehne $a_2 b_2$ somit $= 0$ ist; ferner einen andern, etwa C_n^2, welcher S_2 zur Asymptote hat, dessen Sehne somit $= \infty$ wird; und dazwischen liegen alle andern (reellen) Sehnen. Der Mittelpunct des letztern Kegelschnitts C_n^2 ist derjenige Pol P_n $(= P)$, in welchem S_2 die Curve P^2 zum zweiten Mal schneidet. Werden in allen Kegelschnitten, $B(C^2)$, nach irgend einer Richtung parallele Durchmesser α, α_1, α_2, ... gezogen, so treffen sich die ihnen conjugirten Durchmesser β, β_1, β_2, ... sämmtlich in irgend einem Pol P, und auch umgekehrt. Bei demjenigen Kegelschnitte, etwa C_m^2, welcher den jedesmaligen Pol P zum Mittelpunct hat, fällt der Durchmesser α_m auf S_2 und dessen conjugirter β_m auf die Tangente der Curve P^2 im Pol P. Also: *Diejenigen Durchmesser* α_m *in allen Kegelschnitten* $B(C^2)$, *deren conjugirte* β_m *die Curve* P^2 *berühren, sind zugleich die gesammten Asymptoten derselben Kegelschnitte und umhüllen die Curve* S_2^3; und eben so: *Die Tangenten* $(S_2^{(0)})$ *aller Kegelschnitte* $B(C^2)$, *in denjenigen Puncten, in welchen sie von ihrer Mittelpuncts-Curve* P^2 *geschnitten werden, sind die nämlichen Asymptoten und umhüllen dieselbe Curve. — Unter* $B(C^2)$ *befinden sich, im Allgemeinen, zwei Parabeln; dieselben berühren die Curve* S_2^3 *in den vorgenannten Puncten* x *und* x_1, *und ihre Axen sind den Asymptoten der Curve* P^2 *parallel. — Die Asymptoten jedes Kegelschnitts des* $B(C^2)$ *sind irgend einem Paar conjugirten Durchmessern der Curve* P^2 *parallel, und auch umgekehrt.* U. s. w.

Da die drei Paar Gegenseiten des Vierecks *qrst,* als specielle Kegelschnitte, mit zum $B(C^2)$ gehören, so finden die angegebenen Eigenschaften, mit einiger Modification, auch für dieselben allein Anwendung, wodurch man mehrere, theils bekannte Sätze über das vollständige Viereck erhält.

2. „*Im Falle* (*B.*) *ist der Ort des Pols P eine Curve* 8ten *Grads,* P^8, *und* 22ster *Classe, und der Ort der Doppelsehne* S_2 *ist eine Curve* 6ter *Classe,* S_2^6, *und* 18ten *Grads.*" Oder bestimmter gesprochen: „*Der Ort derjenigen Transversale* S_2, *welche in zwei gegebenen Kegelschnitten* C^2 *und* C_1^2 *gleiche Sehnen,* $ab = a_1 b_1$, *bildet, ist eine Curve* 6ter *Classe und* 18ten *Grads, und der Ort des gemeinschaftlichen Schwerpuncts P beider Sehnen ist eine Curve* 8ten *Grads und* 22ster *Classe.*" Von beiden Curven sind unter andern folgende nähere Eigenschaften anzugeben.

Die Curve $\boldsymbol{P}^8$ hat die 4 Schnitte q, r, s, t von $\boldsymbol{C}^2$ und $\boldsymbol{C}_1^2$ zu dreifachen Puncten; zudem hat sie noch 5 bestimmte Puncte p zu Doppelpuncten, welche zugleich in der vorigen Curve $\boldsymbol{P}^2$ (1.) liegen, so dafs also diese 5 Puncte und jene 4 Schnitte zusammen die obigen 9 Pole $\boldsymbol{P}_3$ (§. 17.) vertreten. Die Curve $\boldsymbol{P}^8$ geht auch durch die Mitten der 6 Seiten des vollständigen Vierecks $qrst$, schneidet sich also daselbst mit der Curve $\boldsymbol{P}^2$, was mit jenen $5p$ zusammen die volle Zahl gemeinschaftlichen Puncte beider Curven ausmacht. Ferner geht die Curve $\boldsymbol{P}^8$ durch die Mitten der 4 gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Curven $\boldsymbol{C}^2$ und $\boldsymbol{C}_1^2$, und berührt diese in ihren im Unendlichen liegenden Puncten α und β, α_1 und β_1, so dafs sie mit denselben die zwei Paar Asymptoten gemein hat. Ihre übrigen 4 gemeinschaftlichen Puncte mit der Geraden $\boldsymbol{G}_\infty$ bestehen aus zwei Paaren, y und y_1, z und z_1, welche durch jene zwei Paare α und β, α_1 und β_1, eben so bestimmt werden, wie oben, nämlich dafs

$$\alpha y \alpha_1 y_1 \text{ und } \beta y \beta_1 y_1; \quad \alpha z \beta_1 z_1 \text{ und } \alpha_1 z \beta z_1$$

harmonisch sind. Und gleicherweise werden die Richtungen der zugehörigen Asymptoten durch die obige Construction (§. 17.) gefunden.

Die Curve $\boldsymbol{S}_2^6$ hat die Gerade $\boldsymbol{G}_\infty$ zur vierfachen Tangente und berührt sie in den nämlichen 4 Puncten y, y_1, z und z_1, in welchen dieselbe von der Curve $\boldsymbol{P}^8$ geschnitten wird. Die Curve $\boldsymbol{S}_2^6$ berührt insbesondere auch die 6 Seiten des vollständigen Vierecks $qrst$, so wie die vier gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Curven $\boldsymbol{C}^2$ und $\boldsymbol{C}_1^2$; und diese Curven selbst berührt sie in deren unendlich entfernten Puncten α und β, α_1 und β_1 vierpunctig, hat somit deren Asymptoten mit ihnen gemein, und zwar ist jede dieser Asymptoten für 4 gemeinschaftliche Tangenten der betreffenden Curven zu zählen, so dafs also alle 12 Tangenten angegeben sind, welche $\boldsymbol{S}_2^6$ mit $\boldsymbol{C}^2$ oder $\boldsymbol{C}_1^2$ gemein hat. Von den 18 Puncten, welche die Curve $\boldsymbol{S}_2^6$ mit der Geraden $\boldsymbol{G}_\infty$ gemein hat, sind bereits 12 angegeben, nämlich die 4 Berührungspuncte y, y_1, z und z_1, doppelt gezählt, und die 4 Puncte α, β, α_1 und β_1; die noch fehlenden 6 Puncte werden ähnlicherweise bestimmt, wie oben die 18 Puncte $\boldsymbol{Q}_0$ (§. 17.).

II. Besteht die Basis aus $4\boldsymbol{C}^1$, d. h. aus vier beliebigen Geraden, etwa $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{D}$, so bilden dieselben ein vollständiges Vierseit $\boldsymbol{ABCD}$, dessen 6 Ecken als Doppelpuncte der Basis anzusehen sind. Dabei treten noch gröfsere Änderungen ein, als vorhin, und zwar der Art:

„Dafs dabei die Curve P^{10} aus drei Kegelschnitten P^2 und aus den gegebenen 4 Geraden selbst, und die Curve S_2^9 aus drei verschiedenen Curven S_2^3 besteht."

Nämlich es sind hier dreierlei Doppelsehnen zu unterscheiden. Werden die Schnittpuncte der Transversale S_2 mit den Geraden A, B, C, D beziehlich durch a, b, c, d bezeichnet, so sind folgende drei Fälle möglich; entweder haben:

α) Die Sehnen ab und cd, oder
β) Die Sehnen ac und bd, oder
γ) Die Sehnen ad und bc

die nämliche Mitte P. Werden ferner die drei Paar Gegenecken des Vierseits $ABCD$, nämlich AB und CD, AC und BD, AD und BC beziehlich durch e und e_1, f und f_1, g und g_1, so wie dessen Diagonalen ee_1, ff_1, gg_1 durch E, F, G und deren Mitten durch e_0, f_0, g_0 und deren gegenseitigen Schnittpuncte EF, EG, FG durch $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{e}$ bezeichnet: so lassen sich die drei Fälle auf die drei einfachen Vierecke beziehen, welche in dem vollständigen Vierseit $ABCD$ enthalten sind, und dadurch folgendermafsen bestimmter unterscheiden.

a. Dem Falle (α.) entspricht das Viereck fgf_1g_1, welches A und B, C und D zu Gegenseiten und F, G zu Diagonalen hat.

b. Dem Falle (β.) entspricht das Viereck ege_1g_1, welches A und C, B und D zu Gegenseiten und E, G zu Diagonalen hat.

c. Dem Falle (γ.) entspricht das Viereck efe_1f_1, welches A und D, B und C zu Gegenseiten und E, F zu Diagonalen hat.

Nach dieser Beziehung wird, wie man sieht, die Doppelsehne S_2 durch die zwei einfachen Sehnen zwischen den beiden Paar Gegenseiten des betreffenden Vierecks bestimmt, und demgemäfs zerfallen die beiden Ortscurven in die genannten Theile, und zwar wie folgt.

In Rücksicht jedes der drei einfachen Vierecke fgf_1g_1, ege_1g_1 und efe_1f_1, für sich betrachtet, ist der Ort des Pols P die nämliche Curve P^2, in welcher die Mittelpuncte des dem Viereck umgeschriebenen Kegelschnitt-Büschels $B(C^2)$ liegen, und der Ort der zugehörigen Doppelsehne S_2 ist die nämliche Curve S_2^3, welche von den gesammten Asymptoten derselben Kegelschnitte umhüllt wird. Jede der drei Curven S_2^3 hat die Gerade G_x zur Doppeltangente und berührt sie in den nämlichen Puncten, in welchen dieselbe von der zugehörigen Curve P^2 geschnitten

wird. Überhaupt verhalten sich die jedesmaligen beiden Curven P^2 und S_2^3 zu dem zugehörigen Viereck gerade eben so, wie vorhin (I. 1.) die gleichbenannten Curven zu dem Viereck *qrst.* Nur ein Umstand, betreffend das Verhalten der drei Curven P^2 gegen einander, mag hier noch besonders hervorgehoben werden. Zu diesem Zwecke unterscheide man die $3P^2$ nach den Schnittpuncten der Diagonalen der respectiven Vierecke durch P_e^2, P_f^2 und P_g^2. Alsdann findet (aufserdem, dafs jede dieser Curven durch die Mitten der 4 Seiten und durch den Schnitt der Diagonalen des zugehörigen Vierecks geht) Folgendes statt:

a°. Die Curve P_e^2 geht durch die Mitten f_0, g_0 der Diagonalen des Vierecks fgf_1g_1, so wie durch die Schnitte e, e_1 seiner zwei Paar Gegenseiten, welche zugleich ein Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits *ABCD* sind; ihr Mittelpunct liegt in der Mitte der Geraden f_0g_0 und ist der Schwerpunct der vier Ecken f, g, f_1, g_1.

b°. Die Curve P_f^2 geht durch die Mitten e_0, g_0 der Diagonalen des Vierecks ege_1g_1 und durch die Schnitte f, f_1 seiner Gegenseiten; ihr Mittelpunct liegt in der Mitte der Geraden e_0g_0, etc.

c°. Die Curve P_g^2 geht durch die Mitten e_0, f_0 der Diagonalen und durch die Schnitte g, g_1 der Gegenseiten des Vierecks efe_1f_1; ihr Mittelpunct liegt in der Mitte der Geraden e_0f_0.

Demnach gehen die drei Curven P_e^2, P_f^2, P_g^2 zusammen durch alle 6 Ecken des gegebenen vollständigen Vierseits *ABCD*, jede durch ein Paar Gegenecken e und e_1, f und f_1, g und g_1; zudem schneiden sie einander paarweise in den Mitten g_0, f_0, e_0 der drei Diagonalen desselben und haben die Abstände dieser drei Mitten von einander zu Durchmessern (g_0f_0, g_0e_0, f_0e_0); und da nun diese drei Mitten bekanntlich in einer Geraden liegen: *so liegen also auch die Mittelpuncte der drei Curven in derselben Geraden.* — Durch die drei Puncte, etwa $3p$, in welchen sich irgend zwei der drei Curven aufserdem noch schneiden, *mufs nothwendig auch die dritte Curve gehen, und die Puncte haben die besondere Eigenschaft, dafs jedem drei Doppelsehnen S_2 zugehören. Diese 3 Puncte p und die 6 Ecken $efge_1f_1g_1$ des gegebenen Vierseits ABCD vertreten zusammen die obigen 9 Pole P_3* (§. 17.). Unter den 11 Räumen, in welche die Ebene durch die vier Geraden *A, B, C, D* getheilt wird, befinden sich, im Allgemeinen, drei ganz begrenzte, nämlich zwei Dreiecke und ein Viereck: *in jedem dieser drei Räume liegt einer der drei Pole p.* Dieselben vier Geraden, zu je drei genommen, bilden vier

Dreiecke: ***Die Ecken und der Schwerpunct jedes dieser Dreiecke liegen mit den drei Polen p zusammen in irgend einem Kegelschnitte.*** Jeder dieser vier Kegelschnitte ist nebstdem dadurch bestimmt: *dafs seine Tangenten in den Ecken des Dreiecks durch die Mitten derjenigen Strecken gehen, welche von den die Ecken bildenden Geraden (Seiten) auf der jedesmaligen vierten Geraden begrenzt werden;* z. B. bei dem durch B, C, D gebildeten Dreieck $e_1 f_1 g_1$ gehen die Tangenten des zugehörigen Kegelschnitts in den Ecken e_1, f_1, g_1 beziehlich durch die Mitten der Strecken fg, eg, ef auf der Geraden A.

Da für jeden der oben betrachteten Pole P die innere Polare J^3 in Bezug auf das jedesmalige einfache Viereck aus $J^2 + S_2$ besteht, so kann man sagen: *Soll ein Punct in der Ebene eines gegebenen einfachen Vierecks die Eigenschaft haben, dafs die 8 Endpuncte der durch ihn zwischen je zwei aufeinander folgende Seiten des Vierecks gezogenen vier Sehnen S in irgend einem Kegelschnitte J^2 liegen, so mufs er ein Pol P sein, oder, so ist sein Ort die nämliche obige Curve P^2. Und werden durch denselben Punct ferner zwischen jeder Seite und jeder der beiden Diagonalen gleicherweise die durch den Punct gehälfteten Sehnen S gezogen, was 8 neue Sehnen giebt, so liegen die 24 Endpuncte aller 12 einfachen Sehnen S in irgend einer Curve 4ten Grads J^4, welche P zum Mittelpunct hat.*

§. 19.

In wiefern das Zerfallen der innern Polaren auch bei den Basen höhern Grads statt findet, welche Umstände dabei obwalten, und welche Eigenschaften und Sätze sich daraus ergeben, habe ich nicht untersucht; nur über die Basis 5ten Grads habe ich einen flüchtigen Versuch gemacht und nebstdem den Ort der Doppelsehnen für jede Basis bestimmt, wobei sich unter andern folgende Resultate herausstellten.

Ist die Basis eine allgemeine Curve 5ten Grads, C^5, so kann die innere Polare J^4 irgend eines Pols P möglicherweise entweder

1) aus $J^3 + S_2$,
2) aus $J^2 + 2S_2$,
3) aus $4S_2$;

oder 4) aus $J^2 + J_1^2$

bestehen. Nun zeigt sich zunächst, dafs hierbei der Ort des Pols P nicht gleicherweise eine Curve sein kann, wie bei den vorhergehenden Beispielen, sondern dafs vielmehr den drei ersten Fällen nur eine bestimmte Anzahl Pole

entsprechen und dafs namentlich der Fall (3.) nur unter besondern Umständen vorkommt.

Soll z. B. der Fall (1.) eintreten, so mufs nothwendigerweise der Pol P in der Basis C^5 selbst liegen, und zwar mufs er einerseits nicht nur die Mitte, sondern zugleich der fünfte Schnitt der Doppelsehne S_2 mit der Basis, und andererseits der Mittelpunct der durch ihn gehenden Curve J^3 sein, wobei sodann in Rücksicht derjenigen unter den zugehörigen 10 Sehnen S, welche auf die Tangente der Basis fällt und deren Endpuncte im Berührungspuncte, in P, vereint liegen, der eine dieser Endpuncte als in S_2 und der andere als in J^3 liegend anzusehen ist, so dafs also die Curve J^3 aufserdem noch durch die 14 Endpuncte von 7 andern Sehnen S geht, und die beiden übrigen Sehnen in S_2 liegen. Da nun offenbar nicht jeder Punct in der Basis diese Eigenschaft haben kann, so ist klar, dafs der genannte Fall nur für einzelne bestimmte Pole eintreten wird. Die Anzahl dieser Pole wird durch folgenden Satz bedingt.

„Der Ort aller Doppelsehnen S_2, welche in der gegebenen Basis C^5 überhaupt möglich sind, ist eine Curve 45ster Classe, S_2^{45}, und der Ort ihrer Mitten, P, ist höchstens eine Curve 45sten Grads, P^{45}."

Demnach können also dem Falle (1.) nur solche Pole genügen, welche gemeinschaftliche Puncte der beiden Curven C^5 und P^{45} sind, und somit kann es höchstens $5 \cdot 45 = 225$ solche Pole geben. Darin sind nun aber auch die beiden Fälle (2.) und (3.) mit inbegriffen, wie leicht zu sehen, und es bleibt zu entscheiden, in wiefern dieselben möglich sind, oder nicht; denn der Fall (2.) erfordert, dafs der Pol P zugleich ein Doppelpunct der Curve P^{45} sein mufs, und der Fall (3.) dagegen erheischt, dafs der Pol ein solcher Punct der Basis C^5 sein mufs, in welchem dieselbe von der zugehörigen Tangente vierpunctig berührt wird, oder dafs er ein Doppelpunct derselben sein mufs; so dafs also dieser Fall, im Allgemeinen, gar nicht vorkommt.

Hieraus ergiebt sich durch Umkehrung und Projection der folgende Satz:

„Zieht man durch einen Wendepunct $\mathfrak{P}$ einer beliebigen gegebenen Curve 3ten Grads $\mathfrak{Z}^3$ irgend 7 Secanten $\mathfrak{S}$, welche dieselbe in 14 neuen Puncten schneiden, so geht jede durch diese 14 Puncte gelegte Curve 5ten Grads $\mathfrak{C}^5$ nothwendig auch durch jenen Wendepunct; oder jede $\mathfrak{C}^5$, welche durch irgend 14 der genannten 15 Puncte geht, geht allemal auch durch den fünfzehnten." Auch giebt es dabei in jeder Curve $\mathfrak{C}^5$ eine solche durch $\mathfrak{P}$ gehende Secante $\mathfrak{S}_2$, von welcher sie in zwei Paar Puncten

a und a_1, b und b_1 geschnitten wird, die beide zu $\mathfrak{P}$ und dem Schnitte, etwa $\mathfrak{Q}$, der $\mathfrak{S}_2$ mit der Harmonischen H (§. 11.) von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Curve $\mathfrak{J}^3$, zugeordnet harmonisch sind, d. h. sowohl $a\mathfrak{P}a_1\mathfrak{Q}$ als $b\mathfrak{P}b_1\mathfrak{Q}$ sind harmonisch.

Dafs weiter auch der Fall (4.) bei einer allgemeinen Basis C^5 vorkommen kann, geht umgekehrt daraus hervor: dafs man durch die 10 Endpuncte von 5 beliebigen Durchmessern eines gegebenen Kegelschnitts J^2 immerhin eine solche Curve legen kann, ohne dafs dieselbe etwas von ihrer Allgemeinheit einbüfst; aber alsdann mufs deren innere Polare, welche dem Mittelpuncte P von J^2 entspricht, nothwendig aus diesem Kegelschnitte und aus irgend einem andern mit ihm concentrischen Kegelschnitte J_1^2 bestehen. Es wäre daher zu untersuchen: ***„Ob der Fall* (4.) *auch nur für einzelne bestimmte Pole eintrete, oder ob für ihn der Ort des Pols P irgend eine Curve sei, und welche?*** — Bei diesem Falle kann sich möglicherweise auch das ereignen, dafs für irgend einen Pol fünf Doppelsehnen S_2 entstehen, deren Endpuncte jedoch immerhin in $J^2 + J_1^2$ liegen; ein solcher Pol würde alsdann ein fünffacher Punct der Curve P^{45} sein.

Übrigens läfst sich der Ort der Doppelsehnen allgemein für jede beliebige Basis angeben, nämlich:

„Der Ort aller Doppelsehnen S_2, welche in einer gegebenen allgemeinen Curve m^{ten} Grads überhaupt möglich sind, ist eine Curve von der $\frac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)^{ten}$ Classe.

§. 20.

Aufser der gleich Anfangs namhaft gemachten Eigenschaft der beiden Polaren A^{m-1} und J^{m-1} jedes Pols P in Bezug auf eine gegebene Basis C^m (§. 13. II.), wären nun noch andere gegenseitige Beziehungen beider Polaren, so wie auch das Verhalten der innern Polare J^{m-1} zu andern, mit ihr in Verbindung stehenden Curven, zu erforschen. Ich habe darüber ebenfalls nur einen schwachen Versuch gemacht, der indessen doch schon einige nicht ganz uninteressante Resultate geliefert hat; wie aus dem Folgenden erhellen wird. Eine vollständigere Behandlung dieses Gegenstandes überlasse ich Andern.

I. Ist die gegebene Basis eine Curve 3ten Grads, C^3, so gehen durch jeden beliebigen Pol P drei Sehnen S, oder aa_1, bb_1 und cc_1, deren 6 Endpuncte, die fortan alle durch a bezeichnet werden sollen, also deren 6 Endpuncte a in der Polare J^2 liegen. Die Basis wird von jeder der drei Sehnen noch in

irgend einem dritten Puncte geschnitten, beziehlich α, β und γ, oder wenn jeder dieser Schnitte durch α bezeichnet wird, so wird sie von den $3S$ noch in 3 Puncten α geschnitten.

„Die 3 Puncte α liegen allemal in irgend einer Geraden, etwa R." Und: *„Diese Gerade R ist jedesmal eine (reelle oder ideelle) gemeinschaftliche Secante der beiden Polaren A^2 und J^2 des zugehörigen Pols P in Bezug auf die Basis C^3, so dafs also die Geraden G_∞ und R immer ein Paar sich entgegenstehende gemeinschaftliche Secanten der beiden Polaren sind.* Ferner: *„Die Gerade R ist stets der zweiten äufsern Polare A^1 desselben Pols in Bezug auf die Basis parallel."* Liegt der Pol P insbesondere in der Basis selbst, so fallen R und A^1 auf die zugehörige Tangente.

Soll die Gerade R durch irgend einen in der Basis C^3 gegebenen Punct α gehen, so ist der Ort des ihr entsprechenden Pols P eine Curve 3ten Grads, etwa P^3_α, welche in α einen Doppelpunct und mit der Basis deren im Unendlichen liegende drei Puncte a_∞ gemein und folglich mit derselben parallele Asymptoten hat. Und soll die Gerade R durch zwei in der Basis gegebene Puncte α und β gehen, wodurch sie und auch ihr dritter Schnitt γ mit der Basis bestimmt ist, so entsprechen ihr noch 6 verschiedene Pole P, in welchen nämlich die den Puncten α, β und γ entsprechenden Ortscurven P^3_α, P^3_β und P^3_γ, aufser in jenen drei Puncten a_∞, einander schneiden, und welche somit in irgend einem Kegelschnitte liegen (weil die $3a_\infty$ sich in G_∞ befinden); und zwar ist dieser Kegelschnitt zugleich die erste äufsere Polare, etwa A^2_r, des nach der Richtung der Geraden R im Unendlichen liegenden Punctes r_∞ in Bezug auf die Basis. Die zweiten Polaren, A^1, der 6 Pole P sind alle der Geraden R parallel. *Wird die Gerade R sich selbst parallel bewegt, so ändern sich zwar die drei Ortscurven P^3_α, P^3_β und P^3_γ und mit ihnen zugleich auch ihre 6 Schnitte oder Pole P: aber der Kegelschnitt A^2_r, in welchem die letztern liegen, bleibt unveränderlich fest.*

Soll die Polare J^2 durch einen in der Basis gegebenen Punct a gehen, so ist der Ort des zugehörigen Pols P eben so irgend eine Curve 3ten Grads, P^3_a, welche die Basis in P berührt, ihr ähnlich und mit ihr ähnlichliegend ist, also mit ihr parallele Asymptoten oder die drei Puncte a_∞ gemein hat. Und soll J^2 durch zwei in der Basis gegebene Puncte a und b gehen, so entsprechen ihr noch 6 verschiedene Pole P, in welchen die Ortscurven P^3_a und P^3_b, aufser in den $3a_\infty$, einander schneiden, und

welche somit in irgend einem Kegelschnitte liegen; und namentlich ist die Mitte der Geraden ab einer dieser 6 Pole. Daraus schliefst man den folgenden speciellen Satz:

„Über einer gegebenen Grundlinie ab, deren Endpuncte in einer gegebenen Curve 3ten Grads C^3 liegen, lassen sich dieser Curve, im Allgemeinen, fünf verschiedene Parallelogramme einschreiben; und dabei liegen die fünf Puncte, in denen die Diagonalen der einzelnen Parallelogramme sich kreuzen, mit der Mitte der gemeinsamen Grundlinie zusammen in irgend einem Kegelschnitte." Oder anders ausgesprochen: *„Zu jeder Sehne ab in einer gegebenen Curve 3ten Grads giebt es, im Allgemeinen, fünf andere Sehnen die ihr gleich und parallel sind. Die Mitten solcher sechs Sehnen liegen allemal in irgend einem Kegelschnitt.*" Dieser Satz umfafst, wofern man die Sehne *ab* unendlich klein werden oder in eine Tangente übergehen läfst, auch den bekannten Satz: *„Dafs die Tangenten einer Curve C^3 zu 6 und 6 parallel sind, und dafs die Berührungspuncte von je 6 solchen Tangenten in einem Kegelschnitte liegen, nämlich in der ersten Polare A_0^2 des nach der Richtung der Tangenten im Unendlichen liegenden Punctes.*" — Hierbei bleiben noch viele Fragen zu erledigen, wie z. B. folgende. *Zu jeder Sehne ab gehören 6 Pole P, und diesen entsprechen 6 Gerade R: welche Eigenschaft haben diese 6R?* Der durch die $6P$ gehende Kegelschnitt heifse P^2, und der durch die Mitte von *ab* und durch die Mitten der mit ihr zusammengehörigen 5 Sehnen gehende Kegelschnitt heifse A_1^2; diese zwei Kegelschnitte berühren sich in der Mitte von *ab*, sind ähnlich und ähnlichliegend, und ihre entsprechenden Dimensionen verhalten sich, wie 1 : 2. Wird nun die Sehne *ab* sich selbst parallel bewegt, so entsteht eine Schaar Kegelschnitte P^2, $S(P^2)$, und eben so eine $S(A_1^2)$: welche Eigenschaft haben diese Kegelschnittschaaren? Und wenn man der Sehne *ab* nacheinander alle Richtungen giebt: welche Beziehung haben dann alle $S(P^2)$ oder alle $S(A_1^2)$ zueinander? Unter jeder $S(A_1^2)$ befindet sich die vorgenannte Polare A_0^2, und alle A_0^2 bilden einen Büschel, $B(A_0^2)$. U. s. w.

II. Ist die Basis vom 4ten Grad, C^4, so gehen durch jeden Pol P, im Allgemeinen, 6 Sehnen S, deren 12 Endpuncte a in der Polare J^3 liegen, die durch den Pol geht und ihn zum Mittel- und Wendepunct hat. Jede Sehne S schneidet die Basis, aufser in den $2a$, in noch zwei andern Puncten α, so dafs im Ganzen 12 Puncte α vorhanden sind. Auch die Curve J^3 wird von

jeder Sehne S noch in einem dritten Puncte, etwa p, geschnitten, aber alle 6 Puncte p liegen im Pol P.

„Die 12 Puncte α liegen allemal in irgend einer Curve 3ten Grads, etwa R^3, welche auch durch den Pol P geht, ihn zum Wendepunct und zwar in demselben mit der Polare J^3 die Wendetangente, $\mathfrak{W}$, gemein hat, so dafs also beide Curven einander daselbst dreipunctig berühren, und dafs folglich ihre übrigen 6 gemeinschaftlichen Puncte, etwa $6q$, in irgend einem Kegelschnitte Q^2 liegen.“ — Die beiden Polaren A^3 und J^3 desselben Pols P haben mit der Geraden G_∞ die nämlichen drei Puncte, etwa $3q_\infty$, gemein, und daher liegen ihre übrigen 6 gemeinschaftlichen Puncte. q_1, ebenfalls in irgend einem Kegelschnitte Q_1^2 (§. 13. II.). Jene drei Puncte q_∞ sind zugleich die Berührungspuncte der Curve J^3 mit ihren drei Asymptoten, und die Gerade G_∞ ist die Harmonische ihres Wendepuncts P (§. 11.). In Rücksicht der Curve R^3 bezeichne man die Harmonische ihres Wendepuncts P durch H; dieselbe geht eben so durch die drei Berührungspuncte, etwa $3h$, der aus P an R^3 gelegten drei Tangenten (§. 11.); *„und durch diese 3 Puncte geht gleicherweise auch die Polare A^3, so dafs die übrigen 6 gemeinschaftlichen Puncte, q_2, der beiden Curven R^3 und A^3 gleichfalls in irgend einem Kegelschnitte Q_2^2 liegen.“* Hieraus ist ersichtlich: *„Dafs in projectivischer Hinsicht die beiden Curven J^3 und R^3 sich gegen die Polare A^3 (so wie auch gegen die Basis C^4) völlig gleich verhalten, so dafs sie ihre scheinbar verschiedene Rolle durch Projection (wobei H ins Unendliche kommt) vertauschen, oder gänzlich verlieren und gegen A^3 und C^4 eine völlig gleiche Stellung einnehmen können.“* [Hierbei entsteht die Frage: *Ob nicht die von jedem Pol P abhängigen drei Curven, nämlich die beiden Polaren A^3, J^3 und die Curve R^3, alle durch dieselben 6 Puncte q gehen, welche in einem Kegelschnitte Q^2 liegen?* Oder wenn dies nicht der Fall ist: *Welche Beziehung alsdann die genannten 3 Kegelschnitte Q^2, Q_1^2 und Q_2^2 zu einander haben? und welche Beziehung ferner die zweite Polare A^2 des nämlichen Pols in Bezug auf die Basis (d. i. die erste Polare in Bezug auf A^3) zu denselben habe?*] Es findet weiter Folgendes statt. *„Die Harmonische H des Wendepuncts P der Curve R^3 ist stets der dritten Polare A^1 desselben Punctes in Bezug auf die Basis parallel.“* *Daher geht die dem Puncte h_∞, der nach der Richtung von H im Unendlichen liegt, entsprechende erste Polare A_h^3 in Bezug auf die Basis jedesmal durch den Pol P; und umgekehrt: für alle in dieser*

Polare A_h^3 liegenden Pole P sind die ihnen, in Rücksicht der zugehörigen Curven R^3 entsprechenden, Harmonischen H sämmtlich parallel, nämlich alle nach dem Puncte h_x gerichtet; oder jedes System parallele Gerade in der Ebene sind als solche Harmonische H anzusehen, deren zugehörige Pole P in derjenigen ersten Polare liegen, welche dem nach der Richtung der Geraden im Unendlichen gedachten Puncte entspricht. [Frage: *Ist nicht die den Curven J^3 und R^3 gemeinsame Wendetangente $\mathfrak{W}$ im Pol P mit den dem letztern entsprechenden vorgenannten Geraden H und A^1 parallel?* und wenn es so ist: *wie verhalten sich dann die Abstände der drei Geraden H, A^1 und $\mathfrak{W}$ von einander? liegt etwa $\mathfrak{W}$ in der Mitte zwischen den beiden andern, so dafs alsdann die vier Geraden $H\mathfrak{W}A^1G_x$ harmonisch sind?*]

„Liegt der Pol P in der Basis C^4 selbst, so zerfällt R^3 in R^2+R, und zwar ist die Gerade R die Tangente der Basis im Pol P, somit zugleich die Wendetangente der Polare J^3 daselbst (§. 14. I. 1.); *und der Kegelschnitt R^2 berührt die Basis in P dreipunctig.*" Nämlich von den obigen 12 Puncten α fallen hierbei 5 in *P*, und von denselben kommen 2 auf die Berührung von *R* und C^4, und die 3 andern auf die Berührung von R^2 und C^4. *„Ist der Pol P insbesondere ein Wendepunct der Basis, so zerfällt auch noch der Kegelschnitt R^2 in zwei Gerade, $\mathfrak{W}+\mathfrak{R}$, nämlich in die zugehörige Wendetangente $\mathfrak{W}$ der Basis und in irgend eine andere Gerade $\mathfrak{R}$, und da auch schon R auf der Tangente liegt, so mufs also in diesem Falle R^3 aus der doppelten Wendetangente $\mathfrak{W}$ und aus einer (nicht durch P gehenden) Geraden $\mathfrak{R}$ bestehen." „Ist ferner der Pol insbesondere einer jener 32 Schnitte P^0 der Basis und der obigen Curve P^{10}* (§. 17.), *so besteht R^3 wiederum aus der doppelten zugehörigen Tangente S_2^0* (§. 17.) *und aus irgend einer Geraden $\mathfrak{R}$."* Nämlich von den 12 Puncten α fallen hier 6 in *P*, zwei andere sind die äufsern Endpuncte von S_2^0, und die vier übrigen liegen in der Geraden $\mathfrak{R}$. *Bei diesen beiden besondern Fällen ist die Gerade $\mathfrak{R}$ der jedesmaligen Tangente $\mathfrak{W}$ oder S_2^0 der Basis, welche zugleich die 3te Polare des Pols in Bezug auf die Basis ist, parallel."*

„Liegt der Pol P in der Curve P^{10}, wobei die Polare J^3 aus J^2+S_2 besteht (§. 17.), *so zerfällt auch die Curve R^3 in R^2+S_2, so dafs also in diesem Falle J^3 und R^3 die Doppelsehne S_2 zum gemeinsamen Bestandtheil haben; ferner ist dabei die Polare des Pols P in Bezug auf*

den Kegelschnitt R^2, etwa R^1, mit der dritten Polare A^1 desselben Pols in Bezug auf die Basis parallel; und zwar sind beide, R^1 und A^1, mit der Doppelsehne S_2 parallel."

III. Bei der Basis C^5 gehen durch jeden Pol P je 10 Sehnen S, deren 20 Endpuncte a in der Polare J^4 liegen, die den Pol zum Mittelpunct hat. Nun wird die Basis von den 10 S in noch $10 \cdot 3 = 30$ andern Puncten α und die Polare J^4 wird von denselben in noch $10 \cdot 2 = 20$ neuen Puncten a_1 geschnitten, und zwar sind die letztern eben so paarweise Gegenpuncte in Rücksicht des Mittelpunctes P, wie jene 20 Puncte a.

„*Durch die 30 Puncte α können unzählige Curven 6ten Grads, R^6, gehen.* Jede solche Curve schneidet die $10S$, aufser in den 30α, in $10 \cdot 3 = 30$ neuen Puncten α_1.

„*Solche 30 Puncte α_1 liegen jedesmal mit jenen festen 20 Puncten a_1 zusammen in irgend einer Curve 5ten Grads, etwa C_1^5.*" Demnach gehen durch die 20 Puncte a_1 gerade eben soviele Curven C_1^5, als durch jene 30 Puncte α Curven R^6 möglich sind; mittelst der 30 Puncte α_1 bestimmen sie einander gegenseitig, so dafs jeder durch die 30α gehenden Curve R^6 eine durch die $20a_1$ gehende bestimmte Curve C_1^5 entspricht, und auch umgekehrt. *Die Curve R^6 hat zu der ihr entsprechenden Curve C_1^5 und zu der Basis C^5 völlig gleiche Beziehung. Die innern Polaren des Pols P in Bezug auf die Curven C^5 und C_1^5 sind eine und dieselbe Curve J^4.* Aus einem früheren Satze (§. 14. II. 2.) kann man schliefsen: *Dafs durch die 25 gemeinschaftlichen Puncte der beiden Curven C^5 und C_1^5 allemal noch eine solche dritte Curve gleichen Grads, etwa C_0^5, geht, welche den Pol P zum Mittelpunct und somit zugleich zum Wendepunct hat. Und dafs ferner, wenn man sich zwischen denselben zwei Curven C^5 und C_1^5 die durch den Pol P gehenden 25 Wechselsehnen bb_1 denkt, von deren Endpuncten nämlich der eine in der einen und der andere in der andern Curve, die Mitte der Sehne aber in P liegt, alsdann die 50 Endpuncte dieser Sehnen ebenfalls in einer solchen Curve 5ten Grads, etwa B^5, liegen, welche P zum Mittelpunct hat.*

IV. Bei der Basis C^6 gehen durch jeden beliebigen Pol P je 15 Sehnen S, deren 30 Endpuncte a in der Polare J^5 liegen, welche den Pol zum Mittel- und zugleich zum Wendepunct hat. Die Basis wird von den $15S$ noch in andern $15 \cdot 4 = 60$ Puncten α, und die Polare J^5 wird von den-

selben, aufser in P selbst, noch in $15 \cdot 2 = 30$ neuen Puncten a_1 geschnitten, welche paarweise Gegenpuncte in Rücksicht des Mittelpunctes P sind.

„Durch die 60 Puncte α können Curven 10ten Grads R^{10} gehen." Jede dieser Curven schneidet die $15S$ in neuen $15 \cdot 6 = 90$ Puncten α_1.

„Solche 90 Puncte α_1 liegen jedesmal mit jenen festen 30 Puncten a_1 zusammen in irgend einer Curve 9ten Grads R_1^9, welche mit der Polare J^5 den Wendepunct P sammt der zugehörigen Wendetangente gemein hat." — [Berühren die Curven R_1^9 und J^5 einander im Pol P nicht höher als dreipunctig? Kann die Curve R_1^9 nicht in $C_1^6 + C^3$ zerfallen? Oder können durch die 30 Puncte a_1 nicht auch Curven 6ten Grads, C_1^6, gehen? Jede solche C_1^6 schnitte alsdann die $15S$ in neuen 60 Puncten α', und diese $60\alpha'$ lägen mit den festen 60α in einer Curve R^{10}, welche die $15S$ in noch $15 \cdot 2 = 30$ andern Puncten α'' schnitte, und diese $30\alpha''$ müfsten sodann in einer Curve C^3 liegen, welche mit J^5 den Wendepunct P nebst der zugehörigen Wendetangente gemein hätte, oder sie noch höher berührte.]

V. Bei der Basis C^7 gehen durch jeden Pol P je 21 Sehnen S, deren 42 Endpuncte a in der Polare J^6 liegen, die den Pol zum Mittelpunct hat. Die Basis wird von den $21S$ noch in $21 \cdot 5 = 105$ Puncten α, und die Polare wird von denselben noch in $21 \cdot 4 = 84$ Puncten a_1 geschnitten. Die in jeder Sehne S liegenden 4 Puncte a_1 bestehen aus zwei Paar Gegenpuncten in Rücksicht der Polare J^6 und ihres Mittelpunctes P.

„Durch die 105 Puncte α können Curven 15ten Grads, R^{15}, gehen." Jede dieser Curven schneidet die $21S$ in neuen $21 \cdot 10 = 210$ Puncten α_1, und

„Solche 210 Puncte α_1 liegen jedesmal, mit jenen festen 84 Puncten a_1 zusammen, in irgend einer Curve 14ten Grads R_1^{14}." In Rücksicht dieser Curven und des Pols findet das Eigenthümliche statt: *„Dafs die innere Polare, J_1^{13}, des Pols P in Bezug auf jede Curve R_1^{14} in zwei Theile zerfällt, wovon der eine allemal die vorgenannte Polare J^6, der andere aber irgend eine Curve J^7 ist, welche gleichfalls den Pol zum Mittelpunct (und zugleich zum Wendepunct) hat."* — [Können hierbei nicht auch an die Stelle der Curve R_1^{14} zwei solche Curven 7ten Grads, etwa $C_1^7 + C_2^7$, treten, wovon die eine, in Rücksicht der zwei Paar Gegenpuncte a_1 in jeder Sehne S, je durch das eine und die andere durch das jedesmalige andere Paar geht? Welche Paare, in Betracht aller 21 Sehnen, gehören zusammen, oder wieviele Änderungen sind dabei möglich? U. s. w.]

Analoge Eigenschaften, wie bei den beiden letzten Beispielen (IV.) und (V.), finden auch bei den allgemeinen Basen $C^{2\mu}$ und $C^{2\nu-1}$ statt.

Innere Panpolaren.

§. 21.

I. Ist in einer Ebene ein Curven-Büschel m^{ter} Grads, $B(C^m)$, mit m^2 Grundpuncten p gegeben (Monatsber.), so gehen durch jeden in der Ebene beliebig gewählten Pol P, rücksichtlich jeder einzelnen Curve C^m, ein bestimmtes System von $\frac{1}{2}m(m-1)$ Sehnen S, deren $m(m-1)$ Endpuncte a in der zugehörigen innern Polare J^{m-1} liegen.

„Alle innern Polaren, die demselben Pol P in Bezug auf die einzelnen Curven des gegebenen Curven-Büschels $B(C^m)$ entsprechen, bilden unter sich gleicherweise einen Curven-Büschel $B(J^{m-1})$ mit $(m-1)^2$ Grundpuncten q und haben den Pol zum gemeinsamen Mittelpunct; zudem sind ihre Grundpuncte q paarweise Gegenpuncte, etwa q und q_1, in Rücksicht des Mittelpunctes P, so dafs also die Polaren sämmtlich $\frac{1}{2}(m-1)^2$ Sehnen qq_1 gemein haben. In dem Falle, wo $m-1$ und damit auch $(m-1)^2$ ungerade ist, liegt der unpaare oder einzelne Punct q, der q_0 heifsen mag, im Pol P selbst, und die Zahl der Sehnen qq_1 wird dabei nur durch die in dem Ausdrucke $\frac{1}{2}(m-1)^2$ enthaltene ganze Zahl angezeigt.

„Die gesammten Asymptoten A_s aller gegebenen Curven $B(C^m)$ umhüllen eine Curve $(2m-1)^{ster}$ Classe A_s^{2m-1} und $4(m-1)^{sten}$ Grads, welche die Gerade G_∞ zur $2(m-1)$fachen Tangente hat; so dafs also durch jeden gegebenen Pol P, im Allgemeinen, $2m-1$ Asymptoten A_s gehen, dagegen aber nach jedem in G_∞ liegenden Puncte Q, oder nach jeder gegebenen Richtung nur je eine Asymptote A_s geht, somit keine zwei parallel sein können." *)

Werden die Endpuncte aller jener Systeme Sehnen, welche demselben Pol in Bezug auf alle gegebenen Curven entsprechen, zusammengefafst, so ergiebt sich der folgende Satz.

---

*) *„Werden die gegebenen Curven $B(C^m)$ von einer beliebigen Geraden G geschnitten und man denkt sich in den Schnittpuncten an dieselben Tangenten A gelegt, so umhüllen diese Tangenten gleicherweise eine Curve $(2m-1)^{ster}$ Classe A^{2m-1} und $4(m-1)^{sten}$ Grads, welche die Gerade G zur $2(m-1)$fachen Tangente hat."* Dieser Satz ist der Abhandlung entnommen, welche der obige Monatsber. bespricht.

„Die Endpuncte a aller Systeme Sehnen S, die irgend einem und demselben Pol P in Betracht aller einzelnen Curven des gegebenen Curven-Büschels $B(C^m)$ zugehören, liegen zusammen in einer Curve $(2m-1)^{sten}$ Grads, J^{2m-1}, welche den Pol P zum Mittelpunct und die durch denselben gehenden $2m-1$ Asymptoten A_s von einzelnen der gegebenen Curven auch selbst zu Asymptoten hat, so dafs sie diese Curven in den unendlich entfernten Puncten a_∞ der respectiven Asymptoten berührt, und welche ferner sowohl durch die m^2 Grundpuncte p des gegebenen Curven-Büschels, als auch durch die $(m-1)^2$ Grundpuncte q des Büschels innere Polaren, $B(J^{m-1})$, desselben Pols in Bezug auf jenen gegebenen Curven-Büschel geht." Diese Curve J^{2m-1} soll *„innere Panpolare"* des Pols P in Bezug auf den gegebenen Curven-Büschel $B(C^m)$ genannt werden. Da dieselbe immer von *ungeradem* Grad ist, $2m-1$, so geht sie stets durch ihren eigenen Mittelpunct P und hat ihn zugleich zum Wendepunct.

Unter den unendlich vielen Sehnen S, welche in Betracht aller gegebenen Curven durch den jedesmaligen Pol P gehen, giebt es allemal einzelne solche besondere Sehnen, welche in ihrem einen Endpuncte die zugehörige Curve berühren, statt schneiden. Jede solche Tangenten-Sehne soll durch S_0 und ihre Endpuncte durch a und a_0, nämlich der genannte Berührungspunct durch a_0 bezeichnet werden. (In speciellem Falle können beide Endpuncte Berührungspuncte werden.) Ist S_0 insbesondere eine Asymptote A_s der zugehörigen Curve C^m, so ist a_0 nicht mehr allein als Berührungspunct anzusehen, sondern in diesem Falle hat man sich auch a in dem unendlich entfernten Berührungspuncte a_∞ der A_s zu denken, und zwar a_0 nach der einen und a nach der entgegengesetzten Richtung, so dafs beide vereint den Berührungspunct a_∞ bilden, und dennoch gleichweit vom Pol P abstehen. *Demnach ist jede Asymptote A_s einer Curve C^m in Rücksicht jedes in ihr angenommenen Pols P allemal als eine Tangenten-Sehne S_0 anzusehen, deren beide Endpuncte a und a_0 jedoch als in ihrem Berührungspuncte a_∞ vereinigt, aber als nach entgegengesetzten Richtungen liegend zu betrachten sind.*

„Durch jeden Pol P gehen, im Allgemeinen, $3m(m-2)+2m-1$ Tangenten-Sehnen S_0, die jedoch von zweierlei Art sind; nämlich: 1) $2m-1$ *derselben bestehen aus den vorgenannten, durch den Pol P gehenden Asymptoten A_s einzelner gegebener Curven (den Asymptoten*

der Panpolare), so dafs ihre Endpuncte in den respectiven Berührungspuncten a_x vereint liegen; 2) dagegen sind die $3m(m-2)$ übrigen eigentliche Tangenten-Sehnen S_0, deren Endpuncte a und a_0 verschieden und nicht im Unendlichen liegen; die $3m(m-2)$ Berührungspuncte a_0 der letztern liegen allemal mit den m^2 Grundpuncten p des gegebenen Curven-Büschels zusammen in irgend einer Curve $2(m-1)^{sten}$ Grads, A_0^{2m-2}, welche die zugehörige Panpolare J^{2m-1} in ihrem Mittelpuncte P berührt.“ Die Curven A_0^{2m-2} und J^{2m-1} schneiden einander in den $3m(m-2)$ Puncten a_0, so wie in den m^2 Puncten p und berühren sich in P zweipunctig; was zusammen gerade die volle Zahl ihrer gemeinschaftlichen Puncte $2(m-1)(2m-1)$ ausmacht.

Eine gegebene Curve C^m werde von einer Tangente S_0 im Puncte a_0 berührt und nebstdem in $m-2$ Puncten a geschnitten; man bezeichne die Mitte jeder Strecke aa_0 durch $\mathfrak{M}$, so hat man in jeder Tangente $m-2$ Puncte $\mathfrak{M}$ und der Ort aller dieser Puncte wird irgend eine Curve x^{ten} Grads, $\mathfrak{M}^x$, sein, welche jedoch aus den m Asymptoten A_s der gegebenen Curve C^m und aus einer eigentlichen Curve $(x-m)^{ten}$ Grads, $\mathfrak{M}^{x-m}$, besteht, so dafs, wenn man $x-m=y$ setzt,

$$\mathfrak{M}^x = \mathfrak{M}^y + m.A_s$$

ist. So gehört also zu jeder Curve C^m eine Ortscurve $\mathfrak{M}^y$.

„Die zu allen Curven eines gegebenen Curven-Büschels $B(C^m)$ gehörige Schaar Ortscurven $S(\mathfrak{M}^y)$ bedecken die ganze Ebene dergestalt, dafs durch jeden Pol P, im Allgemeinen, $3m(m-2)$ derselben gehen.“ Weil nämlich eben so viele Tangenten-Sehnen durch jeden Pol gehen, aufser den $2m-1$ Asymptoten. In dem speciellen Falle, wo $m=3$, ist $y=15$, und: *Bei einem gegebenen Curven-Büschel 3ten Grads, $B(C^3)$, gehen von der Schaar zugehörigen Ortscurven $S(\mathfrak{M}^{15})$ durch jeden Pol P je 9*, so wie nebstdem je 5 Asymptoten A_s von einzelnen der gegebenen Curven. [1. Den Grad, y, der Ortscurve $\mathfrak{M}^y$ allgemein zu bestimmen. 2. Die Enveloppe der $S(\mathfrak{M}^y)$ zu finden.]

Unter den durch irgend einen Pol P gehenden unendlich vielen Sehnen S der gegebenen Curven $B(C^m)$ giebt es ferner auch solche besondere, die $\mathfrak{S}$ statt S heifsen sollen, in deren Endpuncten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ die Tangenten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ der zugehörigen Curve $\mathfrak{C}^m$ (statt C^m) parallel sind, und wobei also diese Curve in den Endpuncten der Sehne sowohl von ihrer innern Polare $\mathfrak{J}^{m-1}$ (statt J^{m-1}) als auch von der Panpolare J^{2m-1} berührt wird. Es giebt für

jeden Pol P, im Allgemeinen, $(3m-1)(m-2)+\frac{1}{2}$ solche besondere Sehnen $\mathfrak{S}$, oder im engeren Sinne nur $(3m-1)(m-2)$, indem der Bruch, $\frac{1}{2}$, die Tangente der durch P gehenden Curve C^m anzeigt, bei welcher $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ sich in P vereinigt haben und die genannten drei Curven einander nur noch in diesem *einen* Puncte P berühren. Als dergleichen uneigentliche Sehnen $\mathfrak{S}$ machen sich ferner auch die durch P gehenden $2m-1$ Asymptoten A_s geltend, in deren Puncten a_∞ die zugehörigen beiden Curven C^m und J^{m-1} einander ebenfalls berühren und zugleich von der Panpolare berührt werden. Aufserdem berührt die Panpolare J^{2m-1} in jedem der m^2 Grundpuncte p irgend eine Curve C^m, aber nicht auch zugleich deren Polare J^{m-1}; und eben so berührt dieselbe in jedem der $(m-1)^2$ Puncte q irgend eine der Polaren $B(J^{m-1})$, aber nicht auch deren Basis C^m. Also:

„*Durch jeden Pol P gehen, im Allgemeinen,* $(3m-1)(m-2)$ *eigentliche Sehnen* $\mathfrak{S}$, *in deren Endpuncten* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{a}_1$ *die Tangenten* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{A}_1$ *parallel sind und die jedesmalige Curve* $\mathfrak{C}^m$ *sowohl von ihrer innern Polare* $\mathfrak{J}^{m-1}$ *als auch von der Panpolare* J^{2m-1} *berührt wird.*“ Oder: „*Unter den jedem Pol P entsprechenden innern Polaren* $B(J^{m-1})$ *giebt es je* $(3m-1)(m-2)$ *solche,* $\mathfrak{J}^{m-1}$, *welche ihre Basis,* $\mathfrak{C}^m$, *in zwei Puncten berühren.*“ Oder: „*Die Panpolare* J^{2m-1} *jedes Pols P berührt je* $(3m-1)(m-2)$ *der gegebenen Curven* $B(C^m)$ *in je zwei Puncten* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{a}_1$, *welche stets Gegenpuncte in Rücksicht des Pols sind, und sobald dieselbe eine der gegebenen Curven in irgend einem Puncte* $\mathfrak{a}$ *berührt, der weder in der Geraden* G_∞ *liegt, noch einer der* m^2 *Puncte p ist, so berührt sie dieselbe nothwendig noch in einem andern Puncte* $\mathfrak{a}_1$, *und zwar im Gegenpuncte von jenem in Rücksicht auf den Pol P.*“ Dabei kann, in Betracht einer einzelnen gegebenen Curve, auch noch das bemerkt werden: „*Liegt der Pol P in einer Asymptote* A_s *einer Curve* C^m, *so berührt seine innere Polare* J^{m-1} *die letztere im unendlich entfernten Puncte* a_∞ *der* A_s.“

In jeder einzelnen Curve C^m müssen alle solche Sehnen $\mathfrak{S}$, in deren Endpuncten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ die Tangenten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ parallel sind, irgend eine Curve ν^{ter} Classe, $\mathfrak{S}^\nu$, umhüllen, und eben so mufs, wenn man die Mitte jeder Sehne $\mathfrak{S}$ durch $\mathfrak{R}$ bezeichnet, der Ort aller $\mathfrak{R}$ irgend eine Curve $\varkappa^{\text{ten}}$ Grads, $\mathfrak{R}^\varkappa$, sein. In dieser Hinsicht gehören alsdann zu den Curven des gegebenen Büschels $B(C^m)$ zwei Schaaren Ortscurven, $S(\mathfrak{S}^\nu)$ und $S(\mathfrak{R}^\varkappa)$.

„*Die Schaar Ortscurven* $S(\mathfrak{R}^x)$, *welche zu dem gegebenen Curven-Büschel* $B(C^m)$ *gehören, überziehen die ganze Ebene dergestalt, dafs durch jeden beliebigen Pol* P, *im Allgemeinen, je* $(3m-1)(m-2)$ *derselben gehen.*" Für den speciellen Fall, wo $m=3$, sind nach dem Obigen (§. 15.) die Curven $\mathfrak{S}^y$ und $\mathfrak{R}^y=\mathfrak{S}^9$ und $\mathfrak{R}^{12}$, und in Rücksicht des Curven-Büschels $B(C^3)$ gehen durch jeden Punct P der Ebene je 8 Ortscurven $\mathfrak{R}^{12}$. [1. Die Classe y und den Grad x der beiden Ortscurven allgemein zu bestimmen. 2. Die Enveloppen von $S(\mathfrak{S}^y)$ und $S(\mathfrak{R}^y)$ zu finden.]

Wird mit der innern Panpolare zugleich auch die äufsere Panpolare A^{2m-1} (Monatsber.) desselben Pols in Bezug auf den nämlichen gegebenen Curven-Büschel betrachtet, so findet sich folgende gegenseitige Beziehung derselben (vergl. §. 13. II.):

„*Die beiden Panpolaren* A^{2m-1} *und* J^{2m-1} *jedes Pols* P *in Bezug auf den gegebenen Curven-Büschel* $B(C^m)$ *haben mit der Geraden* G_∞ *die nämlichen* $2m-1$ *Puncte* a_∞ *gemein, so dafs ihre Asymptoten paarweise parallel sind; ferner berühren sie einander im Pol* P *und ihre übrigen gemeinschaftlichen Puncte bestehen aus den* m^2 *Grundpuncten* p *und aus den obigen* $3m(m-2)$ *Berührungspuncten* a_0 *der sogenannten Tangenten-Sehnen* S_0; *was zusammen richtig die volle Zahl ihrer gemeinschaftlichen Puncte,* $(2m-1)(2m-1)$, *beträgt.*" *Wird der Pol* P *insbesondere in einem der Grundpuncte* p *angenommen, so wird er ein dreifacher Punct von jeder der beiden Panpolaren, und zwar berühren die durch ihn gehenden beidseitigen drei Curven-Zweige einander paarweise in ihm.*"

II. Rücksichtlich des Büschels innere Polaren $B(J^{m-1})$ sind, unter andern, noch folgende Umstände beachtenswerth.

Da die Curven irgend eines Büschels x^{ten} Grads, $B(C^x)$, insgesammt $3(x-1)^2$ Doppelpuncte haben, und da sich unter denselben je $2(x-1)$ solche befinden, welche irgend eine gegebene Gerade G berühren (Monatsber.): *so müssen also auch die Polaren* $B(J^{m-1})$ *jedes Pols* P *in Bezug auf den gegebenen Curven-Büschel* $B(C^m)$ *allemal im Ganzen* $3(m-2)^2$ *Doppelpuncte enthalten, und es müssen je* $2(m-2)$ *derselben jede gegebene Gerade, also namentlich auch die Gerade* G_x *berühren.*

Daraus ist zunächst zu entnehmen, dafs es in Betracht jeder einzelnen Curve C^m auch solche Pole P geben mufs, deren innere Polaren J^{m-1} Doppelpuncte haben; und zwar müssen diese Doppelpuncte, im Allgemeinen, paarweise vorhanden sein, nämlich als Gegenpuncte in Rücksicht des Pols oder

Mittelpuncts P der jedesmaligen Polare J^{m-1} (§. 9. II.); nur wenn ein Doppelpunct insbesondere im Mittelpunct P selbst, oder wenn er in der Geraden G_∞ liegt, steht er als einzeln da. Von jeder Curve, etwa J_1^{m-1}, welche einen Doppelpunct $\mathfrak{p}_\infty$ auf der Geraden G_∞ hat, kann man sagen, sie berühre diese Gerade in demselben; und wenn die Curve einen Mittelpunct P_1 hat, so kann man umgekehrt behaupten: sie könne die Gerade G_∞, im Allgemeinen, nur in diesem Sinne berühren, dafs sie einen auf derselben liegenden Doppelpunct hat. Da nun aber mit der innern Polare J_1^{m-1} auch zugleich die äufsere Polare A_1^{m-1} desselben Pols P_1 die Gerade G_∞ im nämlichen Puncte berührt, so folgt also:

„Dafs der Ort desjenigen Pols P_1, dessen innere Polare J_1^{m-1} in Bezug auf die gegebene Basis C^m die Gerade G_∞ berührt und somit einen auf ihr liegenden einzelnen Doppelpunct $\mathfrak{p}_\infty$ hat, eine bestimmte Curve $2(m-2)^{ten}$ Grads P_1^{2m-4} und $(m-1)^{ster}$ Classe D^{m-1} ist; nämlich diese Curve ist die $(m-1)^{ste}$ Polare der Geraden G_∞ in Bezug auf die Basis C^m, oder die Enveloppe aller Durchmesser D der letztern."

In den Mittelpunct oder Pol P kommt vornehmlich dann ein einzelner Doppelpunct der Polare zu liegen, wenn m ungerad, $=2\nu-1$, ist und P in der Basis $C^m = C^{2\nu-1}$ selbst liegt, so dafs also für diesen Fall die Basis als Hauptbestandtheil seines Ortes anzusehen ist. Dabei sind alsdann die gegenseitigen Schnitte der beiden Curven P_1^{2m-4} und C^m solche besondere Pole P, deren Polaren zwei vereinzelte Doppelpuncte, $\mathfrak{p}_\infty$ und P, haben. Übrigens kann der Mittelpunct P insbesondere auch ein mehr als zweifacher Punct der Polare J^{m-1} werden, jedoch nur nach Mafsgabe der zwei Zahlformen von m, nur so, wie bereits oben (§. 1.) angegeben worden.

Aufser diesen speciellen Fällen, wobei die Polare einen vereinzelten Doppelpunct hat, mufs es nun, in Bezug auf die gegebene Basis C^m, auch solche Pole geben, die P_2 heifsen sollen, deren innere Polaren J_2^{m-1} ein Paar (oder insbesondere auch mehre Paare) Doppelpuncte, $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_2'$, haben, welche dann stets Gegenpuncte in Rücksicht des Pols P_2 sind; und zwar mufs der Ort aller solcher Pole irgend eine Curve x^{ten} Grads P_2^x sein.

Hiernach gehören also zu der gegebenen Curve C^m, im Allgemeinen, zwei solche Ortscurven P_1^{2m-4} und P_2^x, wovon die erste alle diejenigen Pole P_1 enthält, deren Polaren J_1^{m-1} einen auf der Geraden G_∞ liegenden einzelnen Doppelpunct haben, die andere, unbekannte Curve dagegen alle diejenigen Pole P_2 enthält, deren Polaren J_2^{m-1} Paare von Doppelpuncten haben. Die

$2(m-2) \times x$ gemeinschaftlichen Puncte beider Ortscurven sind solche besondere Pole, welche beide Eigenschaften zugleich besitzen. In dem Falle, wo $m = 2\nu - 1$, hat ferner auch jede innere Polare, deren Pol in der Basis $C^{2\nu-1}$ selbst liegt, in diesem Pol einen einzelnen Doppelpunct.

In dieser Hinsicht gehören demnach zu allen Curven eines gegebenen Curven-Büschels $B(C^m)$, im Allgemeinen, sowohl eine Schaar Ortscurven P_1^{2m-4}, oder $S(P_1^{2m-4})$, als auch eine Schaar Ortscurven P_2^x, oder $S(P_2^x)$.

Da nun unter dem Büschel Polaren $B(J^{m-1})$ jedes Pols P in Bezug auf den gegebenen Curven-Büschel $B(C^m)$ sich $2(m-2)$ solche befinden, welche die Gerade G_x berühren, also $2(m-2)$ solche Polaren J_1^{m-1}, welche einzelne Doppelpuncte $\mathfrak{p}_x$ auf G_x haben; und da der Büschel $B(J^{m-1})$ im Ganzen $3(m-2)^2$ Doppelpuncte enthält, so bleiben also noch

$$3(m-2)^2 - 2(m-2) = (m-2)(3m-8)$$

solche Doppelpuncte übrig, welche nicht im Unendlichen liegen, und welche somit paarweise einzelnen Polaren J_2^{m-1} angehören müssen. Die Anzahl dieser Polaren J_2^{m-1} ist daher

$$= \tfrac{1}{2}(m-2)(3m-8),$$

insofern nämlich diejenigen unter ihnen, welche insbesondere mehre Paare Doppelpuncte haben, ebenso oft gezählt werden, als sie Paare enthalten. Für den Fall, wo $m = 2\nu - 1$, ist die Zahl der Polaren J_2^{m-1},

$$= 2(\nu-2)(3\nu-4) + \tfrac{1}{2},$$

wo der Bruch $\frac{1}{2}$ diejenige besondere Polare, etwa J_0^{m-1} anzeigt, welche einen einzelnen Doppelpunct im Pol P selbst hat, und welche der durch P gehenden Curve $C^{2\nu-1}$ $(= C^m)$ zugehört.

Diesen Angaben gemäfs ist nun auch bestimmt, wieviele von jenen genannten Ortscurven durch den jedesmaligen Pol gehen, nämlich:

„Die zu dem gegebenen Curven-Büschel $B(C^m)$ gehörigen zwei Schaaren Ortscurven, $S(P_1^{2m-4})$ und $S(P_2^x)$, bedecken die ganze Ebene in der Art, dafs durch jeden beliebigen Punct P, im Allgemeinen,

$2(m-2)$ *Curven* P_1^{2m-4} und $\frac{1}{2}(m-2)(3m-8)$ *Curven* P_2^x

gehen." Wenn $m = 2\nu - 1$, und danach die letzte Zahl $= 2(\nu-2)(3\nu-4) + \frac{1}{2}$ ist, so gehen $2(\nu-2)(3\nu-4)$ Curven P_2^x durch P und der Bruch $\frac{1}{2}$ zeigt diejenige unter den gegebenen Curven an, welche durch P geht.

Es wird zur Erläuterung dienen und auch an sich nicht ohne Interesse sein, wenn wir die ausgesprochenen allgemeinen Eigenschaften bei den ein-

fachsten Beispielen, wo der gegebene Curvenbüschel nur vom 3ten, 4ten und 5ten Grad ist, etwas näher betrachten.

A. Bei einem gegebenen Curven-Büschel 3ten Grads, $B(C^3)$, finden keine Ortscurven P_2^x statt, was auch der Ausdruck $2(\nu-2)(3\nu-4)$ richtig anzeigt, indem er $=0$ wird, wenn $\nu=2$ ist; wogegen der Bruch $\frac{1}{2}$ bleibt und die durch den Pol P gehende Curve C^3 anzeigt. Jede der andern Ortscurven P_1^{2m-4} wird hier ein Kegelschnitt P_1^2, und zwar derselbe, welcher schon oben (§. 15.) betrachtet und durch E^2 bezeichnet worden. Die innern Polaren jedes Pols P in Bezug auf den gegebenen Curven-Büschel $B(C^3)$ bilden einen Kegelschnitt-Büschel $B(J^2)$ mit 4 Grundpuncten q; dieselben enthalten im Ganzen $3(3-2)^2=3$ Doppelpuncte, von welchen $2(3-2)=2$ auf der Geraden G_∞ liegen, und einzelne Doppelpuncte zweier besondern Polaren J_1^2 sind, der dritte dagegen liegt im Pol P selbst und ist Doppelpunct der besondern Polare J_0^2, welche der durch P gehenden Curve C^3 entspricht. Jede der beiden Polaren J_1^2 besteht aus zwei parallelen Geraden J und J_1, die gleichweit vom Pol P abstehen, und die Polare J_0^2 besteht aus zwei sich in P schneidenden Geraden (Sehnen) S und S_1 (§. 15.). ***Demnach sind die 4 Grundpuncte q des Büschels Polaren $B(J^2)$ allemal die Ecken eines Parallelogramms, welches die Geraden S und S_1 zu Diagonalen und die zwei Paar Geraden J und J_1 zu Gegenseiten hat; und die zu dem gegebenen Curven-Büschel $B(C^3)$ gehörige Schaar Orts-Kegelschnitte $S(P_1^2)$ erfüllt die ganze Ebene doppelt, so dafs durch jeden Punct P je zwei Kegelschnitte P_1^2 gehen.***

B. Bei einem gegebenen Curven-Büschel $B(C^4)$ sind die zugehörigen Ortscurven P_2^x vom 10ten Grad und 36ster Classe (§. 17.), also $P_2^x=P_2^{10}$; die andern Ortscurven $P_1^{2m-4}=D^{m-1}$ sind vom 4ten Grad P_1^4 und 3ter Classe D^3. Die irgend einem Pol P entsprechenden innern Polaren bilden einen Büschel $B(J^3)$ mit 9 Grundpuncten q, und haben im Ganzen $3(4-2)^2=12$ Doppelpuncte. Von den 9 Puncten q liegt einer, etwa q_0, im Pol P selbst und die 8 übrigen bestehen aus 4 Paar Gegenpuncten q und q_1 rücksichtlich des Pols, so dafs sie die Endpuncte von 4 gemeinschaftlichen Sehnen S der Polaren $B(J^3)$ sind. Von den 12 Doppelpuncten liegen 4 auf der Geraden G_∞ und sind einzelne Doppelpuncte von 4 besondern Polaren J_1^3, dagegen sind die 8 übrigen paarweise Doppelpuncte, $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_2'$, von vier besondern Polaren J_2^3 und zugleich Gegenpuncte in Rücksicht des Pols P. Jede der 4 letztern Polaren J_2^3 mufs aus J^2+S_2 bestehen (§. 17.), und zwar mufs der Kegelschnitt

J^2 durch je drei Paar Grundpuncte q und q_1, und die Doppelsehne S_2 mufs durch das jedesmalige vierte Paar gehen, also auf eine der 4 Sehnen S fallen; und da nun das zugehörige Paar Doppelpuncte aus den gegenseitigen Schnitten von J^2 und S_2 besteht, so liegen also in jeder der 4 Doppelsehnen S_2 (oder auch der 4S) sowohl ein Paar Doppelpuncte $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_2'$, als auch ein Paar Grundpuncte q und q_1 des $B(J^3)$, so wie auch jede derselben durch den 9ten Grundpunct q_0 (oder Pol P) geht. *Von den zu dem gegebenen Curven-Buschel $B(C^4)$ gehörigen zwei Schaaren Ortscurven, $S(P_1^4)$ und $S(P_2^{10})$, bedeckt jede die ganze Ebene vierfach, d. h. durch jeden Punct P der Ebene gehen sowohl 4 Curven P_1^4 als auch 4 Curven P_2^{10}.* Jede Ortscurve P_2^{10} hat 9 dreifache Puncte P_3 (§. 17.); *der Ort dieser Puncte, rücksichtlich aller Ortscurven $S(P_2^{10})$, ist eine Curve 6ten Grads P_3^6, welche insbesondere auch durch die zu dem gegebenen Curven-Büschel $B(C^4)$ gehörigen 27 Doppelpuncte geht.*

C. Bei dem gegebenen Curven-Büschel $B(C^5)$ bilden die Polaren jedes Pols P einen Büschel $B(J^4)$ mit 16 Grundpuncten q und im Ganzen mit $3(5-2)^2=27$ Doppelpuncten; es befinden sich unter denselben $2(5-2)=6$ solche, J_1^4, welche einen einzelnen Doppelpunct $\mathfrak{p}_\infty$ auf der Geraden G_∞ haben, und ferner $2(3-2)(3\cdot 3-4)=10$ solche, J_2^4, welche ein Paar Doppelpuncte $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_2'$ haben, die Gegenpuncte rücksichtlich des Pols P sind, und endlich noch eine solche, J_0^4, welche einen einzelnen Doppelpunct im Pol P selbst hat, was zusammen die 27 Doppelpuncte ausmacht. Dem entsprechend gehen also von den zu dem gegebenen Curven-Büschel gehörigen Ortscurven $S(P_1^6)$ und $S(P_2^x)$ durch jeden Pol P einerseits je 6 Curven P_1^6 $(=D^4)$ und andererseits je 10 Curven P_2^x.

Die 16 Grundpuncte q des Büschels $B(J^4)$ bestehen aus 8 Paar Gegenpuncten q und q_1, oder sie sind die Endpuncte von 8 gemeinschaftlichen Sehnen S dieses Büschels. Die besondere Polare J_0^4 kann möglicherweise aus J^3+S_2 bestehen (§. 19.), wobei sie alsdann drei Doppelpuncte hat, die gegenseitigen Schnitte von J^3 und S_2, wovon der eine, als einzelner, in P liegt und die zwei andern ein Paar Gegenpuncte sind; ferner geht dabei die Curve J^3 durch 6 der 8 Paar Grundpuncte q und q_1 und die beiden übrigen Paare liegen in der Doppelsehne S_2, so dafs also die letztere zugleich eine gemeinschaftliche Doppelsehne aller Polaren $B(J^4)$ ist. Diese specielle Polare J^3+S_2 vertritt zugleich eine der 10 Polaren J_2^4. Es kann ferner möglicherweise eine der 10 Polaren J_2^4 aus J^2 und J_1^2 bestehen (§. 19.), wobei

sodann von diesen zwei Kegelschnitten der eine durch irgend 4 Paar Grundpuncte q und q_1 und der andere durch die übrigen 4 Paare geht, und wobei die gegenseitigen 4 Schnitte von J^2 und J_1^2 zwei Paar Doppelpuncte $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}'_2$ sind, so dafs also diese specielle Polare für zwei Polaren J_2^4 zählt, und dafs die ihr entsprechende Ortscurve P_2^x den Pol P zum Doppelpunct haben mufs. — Hierbei kann gefragt werden: *a.* Welches ist, in Bezug auf den gegebenen Curven-Büschel $B(C^5)$, der Ort des Pols, für welchen die besondere Polare J_0^4 aus J^3+S_2 besteht? (höchstens vom 50sten Grad). *b.* Welches ist der Ort des Pols, für welchen eine der 10 Polaren J_2^4 aus $J^2+J_1^2$ besteht? oder welches ist der Ort der Doppelpuncte aller Ortscurven $S(P_2^x)$?

In Betreff der obigen allgemeinen Betrachtung sind, unter andern, folgende Aufgaben zu stellen.

1. ***Den Grad x der Ortscurve P_2^x allgemein zu bestimmen, d. h. für jede Basis C^m.***

2. ***Die Enveloppe der zu einem gegebenen Curven-Büschel $B(C^m)$ gehörigen Schaar Ortscurven $S(P_2^x)$ zu finden; und***

3. ***Die Enveloppe der zu demselben Curven-Büschel gehörigen Schaar Ortscurven $S(P_1^{2m-4}) = S(D^{m-1})$ zu finden.*** Hierbei will ich bemerken, dafs diese Curvenschaar in der Hinsicht, dafs sie $(m-1)^{\text{ster}}$ Classe ist und durch jeden Punct P der Ebene je $2(m-2)$ derselben gehen: auffallende Übereinstimmung mit einem Curven-Büschel gleicher Classe $B(K^{m-1})$ und mit $(m-1)^2$ gemeinschaftlichen Tangenten hat, indem auch hier durch jeden Punct der Ebene je $2(m-2)$ Curven K^{m-1} gehen; dagegen sind diese Curven K^{m-1} vom $(m-1)(m-2)^{\text{ten}}$ Grad, während jene D^{m-1} nur vom $2(m-2)^{\text{ten}}$ Grad, $= P_1^{2m-4}$, sind. Der $B(K^{m-1})$ ist durch $\frac{1}{2}m(m+1)-2$ gegebene Tangenten bestimmt.

§. 22.

I. Die innere Panpolare kann unter geeigneten Umständen auch in Theile zerfallen, wie aus Folgendem erhellen wird.

Befindet sich unter den Curven des gegebenen Büschels $B(C^m)$ insbesondere eine solche, etwa C_0^m, welche einen Mittelpunct C_0 hat, und wird dieser Mittelpunct als Pol angenommen: so zerfällt die innere Panpolare nothwendig in die Curve C_0^m und in eine bestimmte Curve J_0^{m-1}, so dafs J^{2m-1} aus $C_0^m+J_0^{m-1}$ besteht, und zwar ist dabei die Curve J_0^{m-1} eine gemeinsame innere Polare aller gegebenen Curven $B(C^m)$, mit Ausnahme der Curve C_0^m, mit welcher sie concentrisch ist. Ein solcher Pol C_0 $(=P)$ bedingt aber

auch in Rücksicht der ihm entsprechenden äufsern Polaren, $B(A^{m-1})$, eine besondere Eigenschaft, nämlich: ***Dafs alle diese Polaren parallele Asymptoten haben, und zwar parallel den Asymptoten jener gemeinsamen innern Polare*** J_0^{m-1}, ***weil sie mit dieser die Gerade*** G_∞ ***in den nämlichen*** $m-1$ ***Puncten*** a_∞ ***schneiden.*** Die $(m-1)(m-2)$ übrigen gemeinschaftlichen Puncte (Grundpuncte) p des Büschels $B(A^{m-1})$ müssen daher in einer Curve A^{m-2} liegen, welche mit G_∞ zusammen eine Curve A_0^{m-1} dieses Büschels vertritt, und zwar ist dieselbe die äufsere Polare von jener besondern Curve C_0^m. Befindet sich unter den gegebenen Curven $B(C^m)$ zugleich noch eine andere, etwa C_{00}^m, welche einen Mittelpunct C_{00} hat, so kommen ihr und ihrem Mittelpuncte gleiche Eigenschaften zu. Bewegt sich sodann der Pol P in der durch beide Mittelpuncte gehenden Geraden $C_0 C_{00}$, so entspricht ihm in jedem Moment ein Büschel äufsere Polaren $B(A^{m-1})$ mit $(m-1)^2$ Grundpuncten p: ***und der Ort aller dieser Puncte*** p ***ist eine Curve*** $2(m-1)^{sten}$ ***Grads*** A^{2m-2}, ***deren Asymptoten mit den Asymptoten der beiden gemeinsamen innern Polaren*** J_0^{m-1} ***und*** J_{00}^{m-1} ***parallel sind, oder welche mit diesen zwei Curven die Gerade*** G_∞ ***in den nämlichen zweimal*** $m-1$ ***Puncten*** a_∞ ***schneidet.***

Durch Umkehrung ergeben sich folgende Sätze.

a. ***Giebt es in der Ebene zweier gegebenen Curven*** m^{ten} ***Grads,*** C_1^m ***und*** C_2^m, ***irgend einen solchen Pol*** $C_0 (= P)$, ***dessen innere Polaren in Bezug auf dieselben in eine zusammenfallen,*** J_0^{m-1}, ***so haben alle Curven des durch die zwei gegebenen bestimmten Büschels*** $B(C^m)$ ***für den gleichen Pol die nämliche innere Polare gemein, und so enthält dieser Büschel allemal eine solche besondere Curve*** C_0^m, ***welche den Pol*** C_0 ***zum Mittelpunct hat.***

b. ***Hat eine gegebene Curve*** m^{ten} ***Grads*** C_0^m ***einen Mittelpunct*** C_0 ***und man nimmt in derselben*** $\frac{1}{2}m(m+3)-1$ ***Puncte*** p ***beliebig an, so gehen durch diese Puncte unzählige Curven desselben Grads,*** $B(C^m)$, ***welchen rücksichtlich jenes Mittelpuncts, als Pol, eine und dieselbe innere Polare*** J_0^{m-1} ***entspricht.***

c. ***Sind in einer Ebene zwei Curven*** m^{ten} ***Grads*** C_0^m ***und*** C_{00}^m ***gegeben, die Mittelpuncte*** C_0 ***und*** C_{00} ***haben, so gehen durch ihre*** m^2 ***gemeinschaftlichen Puncte*** p ***unzählige andere Curven gleichen Grads, ein*** $B(C^m)$, ***welche für jeden jener zwei Mittelpuncte die innere Polare*** J_0^{m-1} ***und*** J_{00}^{m-1} ***gemein haben, aber keine dieser Curven kann ebenfalls einen Mittelpunct haben; sind jedoch die gegebenen Curven concentrisch, so hat auch jede***

dieser andern Curven einen Mittelpunct, und zwar sind alle mit den gegebenen concentrisch. Nur für $m = 2$ oder für den Kegelschnitt-Büschel $B(C^2)$ findet hierbei Abweichung statt.

II. In Betracht des allgemeinen Curven-Büschels $B(C^m)$ gehen durch jeden Pol P in Rücksicht jeder einzelnen Curve ein bestimmtes System von je $\frac{1}{2}m(m-1)$ Sehnen S, die durch $\Sigma(S)$ bezeichnet werden mögen, so dafs also eben soviele solche Systeme statt finden, als der Büschel Curven enthält. Da nun die innere Panpolare desselben Pols vom $(2m-1)^{\text{sten}}$ Grad ist, so fallen in jede durch P gezogene Gerade G je $m-1$ Sehnen S, welche, im Allgemeinen, eben sovielen verschiedenen Curven oder Systemen $\Sigma(S)$ angehören werden. Bezeichnet man irgend eine Curve des Büschels durch C_1^m, ihre Sehnen durch $\Sigma(S_1)$ und jede der $\frac{1}{2}m(m-1)$ Geraden, in welchen die Sehnen liegen, durch G_1, so fallen in jede G_1 noch $m-2$ andere Sehnen S, die eben so vielen andern Curven C^m angehören, und es entsteht die Frage: ***Ob in Rücksicht aller $\frac{1}{2}m(m-1)$ Geraden G_1 die je $m-2$ andern Sehnen S zu den nämlichen $m-2$ andern Curven C^m, oder ob dieselben im Ganzen zu $\frac{1}{2}m(m-1)\times(m-2)$ verschiedenen Curven C^m gehören?*** Z. B. bei einem gegebenen $B(C^3)$ fällt in jede der 3 Geraden G_1, in denen die 3 Sehnen S_1 der Curve C_1^3 liegen, noch je eine andere Sehne S' und es ist die Frage, ob diese $3\,S'$ einer und derselben, etwa C_2^3, oder ob sie drei verschiedenen andern Curven C^3 angehören? Gehörten sie derselben Curve C_2^3 an, so wären alle Curven des Büschels $B(C^3)$ einander paarweise zugeordnet. Es kann ferner gefragt werden: Welche Relation findet zwischen den $\frac{1}{2}m(m-1)$ Sehnen jedes Systems $\Sigma(S)$ statt? oder wenn eine derselben gegeben ist, wie sind die übrigen zu finden? Welche Relation findet zwischen verschiedenen Sehnen-Systemen statt?

Hat insbesondere eine der gegebenen Curven $B(C^m)$, etwa C_0^m, einen Mittelpunct C_0 und wird dieser als Pol P angenommen, wobei die Panpolare $J^{2m-1} = C_0^m + J_0^{m-1}$ wird, so liegen in jeder Geraden G je $\frac{1}{2}m$ Sehnen S_0 der Curve C_0^m, so wie je $\frac{1}{2}(m-1)$ Sehnen S, welche einzeln andern Curven C^m angehören; dabei sind in den Zahlen $\frac{1}{2}m$ und $\frac{1}{2}(m-1)$ nur die Ganzen zu zählen. Welche Resultate erhält man, wenn die eben aufgestellten Fragen auf diesen besondern Fall angewendet werden?

§. 23.

Allgemeine Bemerkung.

Die Resultate der vorstehenden Untersuchung lassen sich durch Projection in andere, scheinbar allgemeinere, umwandeln; was bereits schon oben gelegentlich an einigen Stellen geschehen, an andern nur bemerkt worden ist. Auch kann, fast durchgängig, eine entgegenstehende Reihe von Sätzen und Eigenschaften nach dem Princip der Dualität der Raumgestalten gleicherweise entwickelt, oder durch Polarisation mittelst eines Hülfs-Kegelschnittes aus dem Obigen hergeleitet werden; welches alles zur Genüge bekannt ist. Eine eigentliche Weiterführung des Gegenstandes gedenke ich später mitzutheilen, wofern mein kränkelnder Zustand mir die zur Ausarbeitung nöthige Kraft und Anstrengung gestattet.

Einiges über geradlinige Transversalen bei algebraischen Curven.

§. 24.

In den obigen Betrachtungen kommen bereits viele Sätze über solche Gerade vor, welche eine gegebene Curve unter irgend welchen bestimmten Bedingungen schneiden, und zwar wurde dabei, in den meisten Fällen, entweder der Ort der Geraden selbst, oder irgend eines in ihr fixirten Punctes, oder es wurden beide Örter zugleich berücksichtigt, so wie auch andere, davon abhängige Eigenschaften beobachtet. Einige der frühern Fälle sollen hier etwas allgemeiner behandelt und nebstdem noch andere analoge Beispiele hinzugefügt werden. Eine umfassendere Untersuchung über Transversalen bei algebraischen Curven, aus welcher nicht nur alle diese Beispiele, sondern auch ein grofser Theil der obigen Betrachtungen entnommen ist, behalte ich mir für eine andere Gelegenheit vor.

§. 25.

Eine gegebene Curve m^{ten} Grads C^m wird von jeder in ihrer Ebene liegenden Geraden oder Transversale S in m Puncten a (reell oder imaginär) geschnitten. Der gemeinsame Schwerpunct solcher m Schnitte (alle gleich schwer gedacht) heifse A; so hat man, in Rücksicht dieses Schwerpunctes, zunächst folgende Sätze (wovon der erste I. *a.* allgemein bekannt ist):

I. *a.* ***„Wird die Transversale S sich selbst parallel bewegt, so beschreibt ihr Schwerpunct A (d. h. der Schwerpunct ihrer veränderlichen***

m Schnitte a) irgend eine bestimmte Gerade D, nämlich den der Richtung von S conjugirten Durchmesser der Basis C^m."

b. „Giebt man der Transversale S nacheinander alle Richtungen, so entstehen alle Durchmesser D der Basis, wozu insbesondere auch ihre m Asymptoten A_s gehören, und zwar als diejenigen eigenthümlichen Durchmesser, welche ihrer eigenen Richtung conjugirt sind; daher liegt der Schwerpunct A jeder Transversale S, welche einer A_s parallel ist, in dem unendlich entfernten Puncte a_x der letztern; der Schwerpunct der Geraden G_∞ aber, diese als Transversale angesehen, ist unbestimmt, liegt in jedem Durchmesser, also nach jeder Richtung. Alle Durchmesser insgesammt berühren eine bestimmte Curve $(m-1)^{ster}$ Classe D^{m-1} und $2(m-2)^{ten}$ Grads $\mathfrak{D}^{2m-4}$, und zwar berührt jede A_s namentlich in demjenigen Puncte, etwa a_0, welcher der Schwerpunct ihrer $m-1$ Schnitte mit den $m-1$ übrigen Asymptoten ist; diese Curve hat, im Allgemeinen, $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ Doppeltangenten, welche solche Durchmesser der Basis sind, D_2, denen zwei verschiedene conjugirte Richtungen entsprechen." Demnach gehen durch jeden *Punct P der Ebene, im Allgemeinen, $m-1$ Durchmesser D der Basis, oder jeder Punct P ist der Schwerpunct A von $m-1$ durch ihn gehenden Transversalen S, welche nämlich jenen Durchmessern beziehlich conjugirt sind; liegt der Punct P insbesondere in einer A_s, so ist diese selbst einer der $m-1$ Durchmesser, und so fällt die ihr conjugirte Transversale S auf sie, und da diese Transversale mit den übrigen, wie zuvor, ihren Schwerpunct in P haben mufs, so kann also jeder Punct P in der Asymptote A_s als Schwerpunct einer auf ihr liegenden Transversale S angesehen werden; wird P in den im Unendlichen liegenden Punct a_x der A_s versetzt, so sind die übrigen $m-2$ Durchmesser D alle mit A_s parallel, die ihnen conjugirten $m-2$ Transversalen fallen sämmtlich auf G_∞ und die der A_s conjugirte liegt auf dieser, wie zuvor; liegt endlich P nach beliebiger Richtung in der Geraden G_∞, so sind eben so alle $m-1$ Durchmesser nach dieser Richtung parallel und die ihnen conjugirten Transversalen fallen alle auf G_∞.*

c. Da die Basis C^m von der $m(m-1)^{sten}$ Classe ist, so hat sie mit der Curve D^{m-1} im Ganzen $m(m-1)\times(m-1)$ Tangenten gemein, d. h. *„Die Basis wird, im Allgemeinen, von $m(m-1)(m-1)$ ihrer Durchmesser berührt;"* zu diesen besondern Durchmessern gehören namentlich die m Asymptoten A_s, deren Berührungspuncte a_x auf G_∞ liegen; die $m^2(m-2)$ übrigen

sollen durch D_0 und ihre Berührungspuncte mit der Basis durch d_0 bezeichnet werden.

II. *a.* „*Wird eine beliebige Transversale* S *um irgend einen in ihr liegenden Pol* P *herumbewegt, so beschreibt ihr Schwerpunct* A *eine Curve* m^{ten} *Grads,* A^m, *und* $2(m-1)^{ster}$ *Classe, welche den Pol zum* $(m-1)$*fachen Punct und in demselben diejenigen* $m-1$ *Transversalen, von denen er der Schwerpunct ist* (I. *b.*), *zu Tangenten hat, und deren* m *Asymptoten* $\mathfrak{A}_s$ *beziehlich den* m A_s *der Basis* C^m *parallel sind, und zwar sind die beiden vollständigen* m*seit,* $m\mathfrak{A}_s$ *und* mA_s, *ähnlich und ähnlichliegend, haben den Pol* P *zum Ähnlichkeitspunct und ihre homologen Dimensionen verhalten sich wie* $1:m$.“ *Somit haben alle solche Curven* A^m, *welchen Polen* P *sie entsprechen mögen, congruente Asymptoten-*m*seit,* $m\mathfrak{A}_s$; *und denkt man sich, nebst der gegebenen Basis* C^m, *beliebige andere Curven* C_1^m, C_2^m, ..., *welche mit ihr die* m A_s *gemein haben, so mufs jedem Pol* P, *in Rücksicht aller dieser Curven, eine und dieselbe Curve* A^m *entsprechen, und eben so haben dieselben alle Durchmesser* D *und deren Enveloppe* D^{m-1} *gemein. Unter den Curven* C_1^m, ..., *welche mit* C^m *die* m *Asymptoten* A_s *gemein haben, giebt es insbesondere eine solche, etwa* C_p^m, *welche den Pol* P *zum* $(m-1)$*fachen Punct hat, und zwar hat dieselbe in diesem Puncte mit der Curve* A^m *die genannten* $m-1$ *Tangenten gemein, so dafs ihre respectiven Zweige einander daselbst berühren, oder mit einem Worte: die Curven* C_p^m *und* A^m *sind ähnlich und ähnlichliegend, haben* P *zum Ähnlichkeitspunct und ihre entsprechenden Dimensionen verhalten sich, wie* $m:1$. — Denkt man sich den Pol P nach irgend einer Richtung ins Unendliche versetzt, so zerfällt die Curve A^m in den der Richtung conjugirten Durchmesser D und in einen andern Theil, welcher ganz im Unendlichen liegt.

b. Da die Ortscurve A^m durch die im Unendlichen, in G_α, liegenden m Puncte a_α der Basis C^m geht (vermöge der Parallelität der Asymptoten), so müssen die übrigen $m(m-1)$ gemeinschaftlichen Puncte, etwa A_1, beider Curven in einer Curve $(m-1)^{sten}$ Grads, A_1^{m-1}, liegen. Oder: „*Durch jeden Pol* P *gehen je* $m(m-1)$ *solche besondere Transversalen* S_1 $(=S)$, *deren Schwerpuncte* A_1 *in der Basis selbst liegen, und zwar ihre Schnitte mit irgend einer Curve* $(m-1)^{sten}$ *Grads,* A_1^{m-1}, *sind.*“ *Liegt der Pol* P *in der Basis selbst, so wird diese in demselben von der Curve* A_1^{m-1} $(m-1)$*punctig berührt; die Berührung wird* m*punctig, wenn eine jener*

$m-1$ Transversalen, welche P zum Schwerpunct haben, auf die Tangente der Basis in P fällt, was jedoch nur für eine bestimmte Zahl (nämlich für $m(m-1)^2$) Pole eintreten kann. Versetzt man den Pol P nach irgend einer Richtung ins Unendliche, so bleiben von den $m(m-1)$ Transversalen S_1 nur noch m wahrnehmbar; sie gehen nach derselben Richtung parallel und ihre m Schwerpuncte A_1 liegen in dem der Richtung conjugirten Durchmesser D und sind dessen Schnitte mit der Basis; die $m(m-2)$ übrigen Transversalen S_1 fallen auf die Gerade G_∞ und ihre Schwerpuncte liegen zu je $m-2$ in den m Puncten a_∞ der Basis, so dafs also in diesem Falle die Curve A_1^{m-1} aus $D+(m-2)G_\infty$ besteht. — Bei dem besondern Falle, in welchem sich die vorgenannten beiden Curven C_p^m und A^m befinden (*a.*), liegen ihre $m(m-1)$ gemeinschaftlichen Puncte A_1 sämmtlich im Pol P, und die Curve A_1^{m-1} zerfällt in ihre $m-1$ Berührungstangenten in demselben.

Wenn insbesondere die Curve A^m die Basis C^m in irgend einem Puncte berührt, so berührt auch die zugehörige Curve A_1^{m-1} im nämlichen Puncte.

c. Bewegt sich der Pol P in irgend einer festen Geraden G, so bilden die ihm, in Bezug auf die gegebene Basis C^m, in obigem Sinne (*a.*) entsprechenden Curven A^m eine solche Curven-Schaar $S(A^m)$, welche, aufser den m Puncten a_∞ der Basis, auch noch den Schwerpunct, etwa A_g, der Geraden G gemein haben, und welche nebstdem die ganze Ebene dergestalt durchziehen, dafs durch jeden beliebigen Punct $\mathfrak{P}$, im Allgemeinen, je $m-1$ derselben gehen, und dafs die Basis in jedem ihrer m Puncte a_∞ von je einer derselben zweipunctig, in ihren m Schnitten mit der Geraden G aber von je einer derselben $(m-1)$punctig und *aufserdem noch von $m(m^2-3)$ derselben in je einem andern Puncte berührt wird. „Zudem haben die $S(A^m)$ die obige Curve D^{m-1} (I. b.) zur gemeinsamen Enveloppe, und zwar wird diese von jeder Curve A^m, im Allgemeinen, in $2m-3$ verschiedenen Puncten berührt; insbesondere giebt es unter denselben $4(m-2)$ solche, welche die Curve D^{m-1} in irgend einem Puncte vierpunctig (also nebstdem nur noch in $2m-5$ Puncten) berühren.*" *„Ferner ist diese Schaar Curven $S(A^m)$ so beschaffen, dafs irgend eine gegebene Curve q^{ten} Grads von $q(q+1)(m-1)$ derselben berührt wird;*" also wird insbesondere jede gegebene Gerade von je $2(m-1)$ derselben berührt. *)

*) *Bewegt sich der Pol P, statt in der Geraden G, in irgend einer Curve n^{ten} Grads G^n, so hat die ihm entsprechende Curven-Schaar $S(A^m)$ folgende Eigen-*

Beachtet man, während der Pol P sich in der Geraden G bewegt, die je $m-1$ Transversalen, von welchen er der Schwerpunct ist (I. *b.*), so sind dieselben zusammen alle Transversalen, deren Schwerpuncte in G liegen; wird jede derselben durch S_g bezeichnet, so hat man den Satz:

„Der Ort aller Transversalen S_g, deren Schwerpuncte A in irgend einer gegebenen Geraden G liegen, ist eine Curve m^{ter} Classe S_g^m und $2(m-1)^{sten}$ Grads, welche die Gerade G_∞ zur $(m-1)$fachen Tangente hat, und welche namentlich die Asymptoten A_s der Basis, so wie auch die Gerade G, und zwar diese in ihrem Schwerpuncte A_g berührt.“

Dieser und der obige erste Satz (*a.*) sind gewissermafsen einander entgegenstehend. Durch Hülfe derselben folgen leicht alle nachstehenden Sätze.

III. *a. „Soll die durch die feste Basis C^m gezogene Transversale S irgend eine andere gegebene Curve n^{ter} Classe K^n berühren, so ist der Ort ihres Schwerpuncts A eine Curve mn^{ten} Grads, A^{mn}, welche die m Puncte a_∞ der Basis zu nfachen Puncten und daher mit jeder A_s der Basis je n parallele Asymptoten $\mathfrak{A}_s$ hat, welche den, nach gleicher Richtung gehenden n Tangenten T der Basis in der Art entsprechen, dafs die Abstände je zweier zusammengehörigen $\mathfrak{A}_s$ und T von A_s sich verhalten wie $m-1:m$.“*

b. „Soll der Schwerpunct A der Transversale S in irgend einer gegebenen Curve n^{ten} Grads G^n liegen, so ist ihr Ort eine Curve mn^{ter} Classe S^{mn} und $n(n-1)(m-1)+2n(m-1)=(m-1)n(n+1)^{ten}$ Grads, welche die m Asymptoten A_s der Basis zu nfachen und die Gerade G_∞ zur

---

schaften: 1°. Sie haben die m Puncte a_∞ der Basis gemein. 2°. Durch jeden Punct P der Ebene gehen, im Allgemeinen, $n(m-1)$ Curven A^m. 3°. Die Basis C^m wird in jedem der m Puncte a_∞ von n derselben einfach, in ihren mn Schnitten mit der Curve G^n von je einer derselben $(m-1)$punctig und aufserdem von $nm(m^2-3)$ derselben in andern bestimmten Puncten einfach berührt. 4°. Irgend eine gegebene Curve q^{ten} Grads Q^q wird, im Allgemeinen, von $nq(q+1)(m-1)$ Curven A^m berührt. 5°. Die Enveloppe der $S(A^m)$ besteht im Ganzen: α) aus den m Puncten a_∞; β) aus der Curve D^{m-1} und zwar wird diese, wie oben, von jeder A^m in $2m-3$ Puncten berührt, insbesondere giebt es $4n(m-2)$ solche Curven A^m, welche dieselbe in irgend einem Puncte vierpunctig berühren; γ) aus der $(m-1)(m-2)$fachen gegebenen Curve G^n; und endlich δ) aus einer bestimmten Curve mn^{ten} Grads, die jedoch von jeder Curve A^m, im Allgemeinen, in nur einem Puncte berührt wird.

Bewegt sich der Pol P in der Basis C^m selbst, so wird diese (abgesehen davon, dafs sie im jedesmaligen Pol von den zugehörigen Curven A^m und A^{m-1} (*b.*) schon $(m-1)$punctig berührt wird, aufserdem) *von $m(m^3-m^2-m-1)$ Curven A^m (und zugehörigen A_1^{m-1}) berührt, und zwar wird sie von $m(m-1)^2$ derselben im jedesmaligen Pol selbst* (also mpunctig), *dagegen von $m(m-2)(m^2+1)$ derselben in andern bestimmten Puncten berührt.*

$n(m-1)$fachen Tangente hat; ihre $n(m-1)$ Berührungspuncte mit der letztern sind durch die conjugirten Richtungen derjenigen n mal $m-1$ Durchmesser D der Basis bestimmt, welche beziehlich den n Asymptoten der gegebenen Curve G^n parallel sind; ihre $n(n-1)(m-1)$ geradlinigen Asymptoten $\mathfrak{A}_s$ aber haben die conjugirten Richtungen derjenigen Durchmesser der Basis, welche die Curve G^n berühren, und gehen beziehlich durch deren Berührungspuncte, so dafs sie dadurch vollkommen bestimmt sind."

IV. „*Der Ort derjenigen Transversale S_1, deren Schwerpunct A_1 in der Basis C^m selbst liegt* (II. *b.*), *also mit einem ihrer m Schnitte a, der a_1 heifsen soll, zusammenfällt, ist eine Curve $m(m-1)^{ster}$ Classe $S_1^{m(m-1)}$ und $m(m^2-3)^{ten}$ Grads, welche die Gerade G_x zur $m(m-2)$fachen Tangente und mit der Basis deren m Asymptoten A_s gemein, jedoch dieselben zugleich zu $(m-1)$fachen Tangenten hat, und welche nebstdem die Basis in $m^2(m-2)$ bestimmten andern Puncten berührt.*" Ferner: „*Die $m(m-2)$ Berührungspuncte der Curve $S^{m(m-1)}$ mit der Geraden G_x werden durch die conjugirten Richtungen derjenigen Durchmesser der Basis angezeigt, welche, zu je $m-2$, mit ihren m Asymptoten A_s parallel sind* (I. *b.*); *die $m(m-1)^2$ geradlinigen Asymptoten der erstern (worunter jene m A_s mit inbegriffen) gehen durch diejenigen Puncte d_0 der Basis, in welchen diese von einzelnen ihrer Durchmesser D_0 berührt wird* (I. *c.*), *und zwar hat jede Asymptote die dem jedesmaligen Durchmesser conjugirte Richtung, so dafs sie bestimmt ist.*

Die Curve $S_1^{m(m-1)}$ hat mit der Basis C^m im Ganzen

$$m(m-1) \times m(m-1)$$

Tangenten gemein; daraus könnte man schliefsen, dafs die Basis eben soviele solche Tangenten, etwa S_1^0, habe, deren Schwerpuncte A_1 in ihr selbst liegen: allein es verhält sich nicht genau so. Sondert man zunächst die m Asymptoten A_s der Basis, wovon jede für m, also alle für m^2 gemeinschaftliche Tangenten zählen, ab, so bleiben noch

$$(m-2)m^3$$

solche gemeinschaftliche Tangenten S_1^0 übrig, deren Berührungspuncte, etwa a_2, mit der Basis nicht im Unendlichen liegen, und in Rücksicht dieser entsteht nun die Frage: ***Bei wievielen derselben fällt der Schwerpunct A_1 mit dem Berührungspuncte a_2, und bei wievielen fällt er mit einem der $m-2$***

Schnitte a, mit a_1, zusammen? Da im Berührungspuncte a_2 zwei der m Schnitte a vereinigt sind, so habe ich die Wahrscheinlichkeit beider Fälle nach dem Verhältnifs von

$$2 : m-2$$

angenommen,*) woraus sich ergiebt, ***dafs von den $(m-2)m^3$ Tangenten S_1^0 der Schwerpunct A_1***

(1.) $2(m-2)m^2$ ***mal in a_2***; und (2.) $(m-2)^2m^2$ ***mal in einem a_1 liegen mufs.*** Wenn aber der Schwerpunct A_1 im Berührungspunct a_2 liegt, ***so mufs die Curve $S^{m(m-1)}$ daselbst nothwendig die S_1^0 und somit auch die Basis C^m berühren,*** so dafs also S_1^0 in diesem Falle (als Berührungs-Tangente) für zwei gemeinschaftliche Tangenten zählt, im Sinne von §. 17. ***eine S_2^0*** ist, ***und folglich der Schwerpunct A_1 nur halb so oft, als eben angegeben worden*** (1.), ***also nur***

(1*.) $(m-2)m^2$ ***mal in a_2***

fällt. Danach reduciren sich die $(m-2)m^3$ Tangenten S_2^0 auf

$$(m-2)(m-1)m^2$$

und mit diesen verhält es sich so:

„Die gegebene Basis C^m hat, im Allgemeinen, aufser den Asymptoten:

a) $(m-2)m^2$ ***solche Tangenten, deren Schwerpunct A_1 mit dem Berührungspunct a_2 zusammenfällt; und***

b) $(m-2)^2m^2$ ***solche Tangenten, deren Schwerpunct A_1 in einem ihrer $m-2$ Schnitte a, in a_1, liegt.“*** **)

Übrigens verhält es sich mit den m Asymptoten A_s eben so. Da jede A_s für m gemeinschaftliche Tangenten zählt, so müssen auch m Schwerpuncte A_1 in ihr und zugleich in der Basis C^m liegen; und zwar vertheilen sich dieselben nach dem Verhältnifs von $2 : m-2$, nämlich 2 sind im Berührungspuncte a_2 $(= a_\infty)$ vereinigt, woselbst sich zugleich die beiden Curven berühren, und die $m-2$ andern fallen in die $m-2$ Schnitte a von A_s und C^m.

---

*) Einen strengen Beweis für die Richtigkeit oder Unrichtigkeit dieser Annahme überlasse ich Andern. Für $m=3$ und $m=4$, d. h. für die Basen C^3 und C^4, stimmt die Annahme mit der Wahrheit überein.

**) Wahrscheinlich können durch die $m^2(m-2)$ Puncte a_2 Curven $m(m-2)^{\text{ten}}$ Grads gehen; und alsdann gehen auch durch die $(m-2)^2m^2$ Puncte a_1 Curven $(m-2)^2m^{\text{ten}}$ Grads. Für die Basen 3ten und 4ten Grads ist es der Fall.

Somit findet für die gesammten $m(m-1)\cdot m(m-1)$ ***gemeinschaftlichen Tangenten*** S_2^0 ***dieselbe Reduction und Vertheilung statt; nämlich sie reduciren sich auf***

$$m(m-1)^3,$$

und von diesen liegt der Schwerpunct A_1

(α.) $m(m-1)^2$ ***mal in*** a_2; ***und*** (β.) $m(m-2)(m-1)^2$ ***mal in*** a_1.

Hierbei, und mehr noch oben (I. *b*.), stellt sich für die Asymptote A_s das Eigenthümliche heraus, dafs ihr Schwerpunct, d. h. der Schwerpunct ihrer m gemeinschaftlichen Puncte a mit der Basis C^m, ***unbestimmt*** ist, in ihr liegen kann, wo man will; wogegen bei jeder mit A_s parallelen Transversale S der Schwerpunct ***bestimmt,*** nämlich im Unendlichen, in a_∞ liegt. Dies erklärt sich einfach aus dem Umstande, dafs man sich bei A_s die zwei in ihrem Berührungspuncte a_2 vereinigten Puncte, etwa a_∞ und a'_∞, nach entgegengesetzten Richtungen im Unendlichen denken kann, wobei sodann jeder beliebige Punct in A_s als in der Mitte zwischen ihnen liegend, also als ihr Schwerpunct anzusehen ist, was somit auch den Schwerpunct aller m Puncte a unbestimmt macht. Eben so ist der Schwerpunct der Asymptote A_s ***bestimmt,*** oder ***unbestimmt,*** wenn sie die Basis im Punctc a_∞ beziehlich ***dreipunctig*** oder ***vierpunctig*** berührt.

V. ***Der Ort der Schwerpuncte*** A_0 ***aller Tangenten*** S_0 ***der Basis*** C^m, ***dieselben als Transversalen*** S ***angesehen, ist eine Curve*** $m(m^2-m-1)^{sten}$ ***Grads,*** $A_0^{m(m^2-m-1)}$, ***welche die*** m ***Puncte*** a_∞ ***der Basis zu*** (m^2-m-1)***fachen Puncten hat, und zwar mit dem einen Zweige daselbst die Basis berührt, dagegen mit den*** m^2-m-2 ***übrigen schneidet, und welche ferner die Basis in den nämlichen vorgenannten*** $(m-2)m^2$ ***Puncten*** a_2 ***berührt und in den*** $(m-2)^2m^2$ ***Puncten*** a_1 ***schneidet*** (IV.). ***Danach hat die Ortscurve mit der Basis deren*** m ***Asymptoten*** A_s ***gemein, aber mit jeder*** A_s ***noch*** m^2-m-2 ***andere Asymptoten*** $\mathfrak{A}_s$ ***parallel, welche den mit derselben*** A_s ***parallelen*** m^2-m-2 ***Tangenten*** T ***der Basis so entsprechen, dafs die Abstände der zusammengehörigen*** $\mathfrak{A}_s$ ***und*** T ***von*** A_s ***sich verhalten wie*** $m-1:m$."

VI. „***Der Ort der Schwerpuncte*** A_d ***aller Durchmesser*** D ***der gegebenen Basis*** C^m, ***dieselben als*** S ***angesehen, ist (aufser den Asymptoten der Basis) eine Curve*** $m(m-2)^{ten}$ ***Grads,*** $A_d^{m(m-2)}$, ***welche die*** m ***Puncte*** a_∞ ***der Basis zu*** $(m-2)$***fachen Puncten und daher mit jeder*** A_s ***der letztern je*** $m-2$ ***parallele Asymptoten*** $\mathfrak{A}_s$ ***hat, die den mit derselben*** A_s ***parallelen***

$m-2$ Durchmessern D (I. b.) in der Art entsprechen, dafs die Abstände der zusammengehörigen $\mathfrak{A}_s$ und D von A_s sich verhalten, wie $m-1:m$; und welche ferner die Enveloppe aller Durchmesser, die Curve D^{m-1} in denselben Puncten a_0 berührt, in welchen diese von den m Asymptoten A_s der Basis berührt wird (I. b.)." Die $m(m-2)\times m$ gemeinschaftlichen Puncte der Curven $A_d^{m(m-2)}$ und C^m sind die Schwerpuncte A_d eben so vieler Durchmesser der letztern; und da $m(m-2)$ derselben in die m Puncte a_∞ fallen, so zeigen die $m(m-1)(m-2)$ übrigen die Zahl derjenigen Durchmesser an, deren Schwerpuncte in der Basis, aber nicht im Unendlichen liegen. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch, wenn man die $m(m-1)^2$ gemeinschaftlichen Tangenten der Curven $S_1^{m(m-1)}$ (IV.) und D^{m-1} berücksichtigt; denn werden von diesen die $(m-1)$fach gezählten Asymptoten A_s weggelassen, so sind die $m(m-1)(m-2)$ übrigen gerade die genannten Durchmesser. Also:

„Die gegebene Basis C^m hat, im Allgemeinen, $m(m-1)(m-2)$ solche Durchmesser, deren Schwerpuncte in ihr selbst, aber nicht im Unendlichen liegen, und durch diese Schwerpuncte können Curven $(m-1)(m-2)^{ten}$ Grads gehen."

In Betracht der Durchmesser D und ihrer Enveloppe D^{m-1} ist noch der folgende Satz hinzuzufügen:

„Wird durch denjenigen Punct a_0, in welchem jeder Durchmesser D der Basis C^m die Enveloppe D^{m-1} berührt, die dem Durchmesser conjugirte Transversale $\mathfrak{S}$ $(=S)$ gezogen, so ist ihr Ort eine Curve $(2m-3)^{ter}$ Classe, $\mathfrak{S}^{2m-3}$, und $4(m-2)^{ten}$ Grads, welche die Gerade G_∞ zur $2(m-2)$fachen Tangente hat und namentlich auch die m Asymptoten der Basis berührt."

VII. Werden die vorstehenden Sätze auf die einfachsten Basen, C^3 und C^4, bezogen, so ergeben sich noch viele Folgerungen aus denselben; wie z. B. die nachstehenden.

a. Für die Basis C^3 sind die meisten Sätze bereits schon oben (§. 15.) unter anderem Gesichtspuncte betrachtet worden; hier soll nur noch Einiges bemerkt werden. Nach (IV.) soll die Ortscurve S_1^6 die Basis C^3 in $(3-2)3^2=9$ Puncten a_2 berühren, welche zugleich die Schwerpuncte A_1 der zugehörigen Tangenten S_1^0 sind; und ferner soll von $(3-2)^2\cdot 3^2=9$ andern Tangenten S_1^0 der Schwerpunct A_1 zugleich im (einzigen) Schnittpuncte a_1 derselben liegen. Diese 2 mal 9 Tangenten S_1^0 reduciren sich aber auf die 9 Wendetangenten $\mathfrak{W}$ der C^3, so dafs in jedem Wendepunct w ein a_2 und ein a_1 zugleich liegen (vergl. §. 15. II. 2.). — Nach (V.) ist der Ort der Schwer-

puncte A_0 aller Tangenten S_0 eine Curve 15ten Grads A_0^{15}, welche die drei Puncte a_x der Basis C^3 zu fünffachen Puncten hat und daselbst mit je einem Zweige die Basis berührt, so dafs sie mit dieser daselbst 18 Puncte gemein hat und sie nebstdem in ihren $9\mathfrak{w}$ dreipunctig berührt, also mit ihr die $9\mathfrak{W}$ gemein hat. Der Schwerpunct A_0 jeder Tangente S_0 liegt im ersten Drittels-Punct vom Berührungspuncte aus. Die Mitte jeder Tangente S_0 heifse M. ***Der Ort aller M ist ebenfalls eine Curve 15ten Grads M^{15}, welche die 3 Puncte a_x zu fünffachen Puncten hat, mit dem einen Zweige daselbst die C^3 berührt und mit dieser nebstdem die $9\mathfrak{w}$ und zugehörigen $9\mathfrak{W}$ gemein hat.*** Daher folgt: ***In der Ebene einer Curve 3ten Grads C^3 giebt es, im Allgemeinen, 120 solche Puncte P (aufser den $3a_x$ und $9\mathfrak{w}$), wovon jeder A_0 und M zugleich, d. h. der Drittels- oder Schwerpunct einer und die Mitte einer andern Tangente zugleich ist.*** — Nach (VI.) ist der Ort der Schwerpuncte A_d aller Durchmesser D eine Curve 3ten Grads A_d^3, welche mit C^3 parallele Asymptoten hat; daher sind die Asymptoten-Dreiecke, $3\mathfrak{A}_s$ und $3A_s$, beider Curven ähnlich und ähnlichliegend, ***und zwar haben sie den Schwerpunct gemein, somit zugleich zum Ähnlichkeitspunct, und zudem verhalten sich ihre entsprechenden Seiten, wie 1 : 3; und ferner berührt die Curve A_d^3 die Seiten des Asymptoten-Dreiecks der Basis in ihren Mitten a_0 und hat ihre eigenen Asymptoten zugleich zu Wendetangenten.*** U. s. w.

b. Bei der Basis C^4 kann, unter andern, Folgendes hervorgehoben werden. Nach (IV.) ist der Ort aller S_1, deren Schwerpuncte A_1 in C^4 selbst liegen, eine Curve 12ter Classe S_1^{12} und 52sten Grads, welche mit der Basis, aufser deren Asymptoten, $(4-2)4^3 = 128$ Tangenten S_1^0 gemein hat, aber von denen 32 Paare zusammenfallen, nur 32 Tangenten S_2^0 bilden, bei welchen der Schwerpunct A_1 im Berührungspuncte a_2 liegt, und über welche das Weitere bereits oben (§. 17.) steht; wogegen bei den $(4-2)^2 \cdot 4^2 = 64$ übrigen S_1^0 der Schwerpunct A_1 sich in einem der zwei Schnitte a, oder a_1, befindet. Bezeichnet man den Berührungspunct jeder der letztern Tangenten durch α und die zwei Schnitte durch β und γ, und nimmt an, der Schwerpunct A_1 liege in β: so mufs β zwischen α und γ liegen, und zwar mufs die Strecke $\beta\gamma = 2\beta\alpha$ sein. Also: ***Eine beliebige Curve 4ten Grads C^4 hat, im Allgemeinen, 64 solche Tangenten, bei denen die beiden Schnitte β und γ auf gleicher Seite vom Berührungspuncte α liegen, und wobei der eine Schnitt gerade dreimal so weit vom Berührungspunct abliegt,***

als der andere, $\alpha\gamma = 3\alpha\beta$." ***Durch die 64 Puncte a_1 (oder β) können Curven 16ten Grads gehen.*** — Die Schwerpuncte A_0 aller Tangenten S_0 der C^4 liegen in einer Curve 44sten Grads (V.). Der Ort der Schwerpuncte A_d aller Durchmesser D ist eine Curve 8ten Grads A_d^8, welche die 4 Puncte a_∞ und die drei Schnitte der drei Paar conjugirten Durchmesser der Basis (§. 17.) zu Doppelpuncten hat. Es giebt (aufser den $4A_s$) 24 solche Durchmesser D, deren Schwerpuncte A_d in C^4 selbst liegen, und durch die 24 A_d können Curven 6ten Grads gehen (VI.).

Bemerkung. Durch Projection erhalten die vorstehenden Sätze ein allgemeineres Ansehen; nämlich an die Stelle des betrachteten Schwerpunctes tritt ein *„mittlerer harmonischer Punct,"* welcher übrigens auf die Art zu bestimmen ist, wie bereits *Poncelet* in seiner interessanten Abhandlung *„sur les centres de moyennes harmoniques"* (Bd. 3. S. 213 d. Journ.) gezeigt hat.

§. 26.

I. Die m Schnitte $a, b, c, d, \ldots$ der Basis C^m und irgend einer Transversalen S begrenzen in der letztern $\frac{1}{2}m(m-1)$ Strecken $ab, ac, ad, \ldots, bc, bd, \ldots, cd, \ldots$; die Mitte jeder Strecke heifse Q. Jede Strecke ist rücksichtlich ihrer Mitte eine einfache Sehne, etwa s (statt S) (§. 13.), und somit liegen in jeder Transversale S, im Allgemeinen, $\frac{1}{2}m(m-1)$ einfache Sehnen s, und eben soviele Mitten Q. Wenn insbesondere S die Basis berührt, so liegt eine Mitte Q im Berührungspunct, etwa (ab), und $m-2$ Paare fallen zusammen. Ist ferner insbesondere S einer Asymptote A_s der Basis parallel, so hat man sich $m-1$ Puncte Q als in a_∞ liegend zu denken; und fällt S auf A_s, so liegen $2(m-2)$ Puncte Q in a_∞, ein anderer Punct Q aber, nämlich die Mitte der im Berührungspuncte a_∞ vereinigten zwei Puncte a und b, bleibt hierbei unbestimmt, er kann jeder beliebige Punct in A_s sein (vergl. §. 25. IV.); die noch übrigen $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ Puncte Q sind bestimmt, wie zuvor. Wird S ins Unendliche versetzt, soll $S = G_\infty$ sein, so sind die Puncte Q unbestimmt, weil die Richtung von G_∞ unbestimmt ist; sobald aber die Richtung von G_∞ festgestellt wird, so sind auch alle $\frac{1}{2}m(m-1)$ Puncte Q bestimmt, nämlich durch Hülfe der m Asymptoten A_s der Basis. Diese Unbestimmtheit der Richtung von G_∞ bewirkt, dafs jeder nach irgend einer gegebenen Richtung in G_∞ liegende Punct Q_∞ nach Belieben als die Mitte von jeder durch die Puncte $a_\infty, b_\infty, c_\infty, d_\infty, \ldots$ begrenzten $\frac{1}{2}m(m-1)$ Strecken angesehen werden kann. — Mit Bezug auf alle diese Umstände hat man folgende Sätze.

II. *a.* „*Wird die beliebige Transversale* S *sich selbst parallel bewegt, so beschreiben ihre* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *Mitten* Q *insgesammt eine Curve* $\frac{1}{2}m(m-1)^{sten}$ *Grads,* $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$, *und* $m(m-1)(m-2)^{ter}$ *Classe, welche* $\frac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$ *Doppelpuncte* Q_2, *so wie* $m(m-1)$, *auch die Basis berührende,* $(m-2)$*fache Tangenten hat, und deren Asymptoten* $\mathfrak{A}_s$ *beziehlich durch die* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *gegenseitigen Schnitte der* m *Asymptoten* A_s *der Basis gehen, und zu diesen mit der Richtung von* S *zugeordnet harmonisch sind, so dafs, wenn etwa* A_s *und* B_s *zwei Asymptoten der Basis sind, welche dieselbe in* a_∞ *und* b_∞ *berühren und irgend eine der parallelen Transversalen* S *in* a_1 *und* b_1 *schneiden, dafs dann die aus dem Schnitte* A_sB_s *durch die Mitte* Q_1 *der Strecke* a_1b_1 *gezogene Gerade* $\mathfrak{A}_s$ *eine Asymptote der Ortscurve ist und sie in der Mitte* Q_∞ *der Strecke* $a_\infty b_\infty$ *berührt.* Übrigens werden alle andere Tangenten der Ortscurve durch eine gleiche Construction erhalten. *Denkt man sich in irgend zwei Schnitten, etwa a und b, von* S *und* C^m *die Tangenten A und B der letztern, so berührt die aus dem Schnitt AB durch die Mitte Q der Strecke ab gehende Gerade* $\mathfrak{A}$ *die Ortscurve in Q.*

„*Bewegt sich die Transversale* S *insbesondere einer Asymptote* A_s *der Basis parallel, so wird die Ortscurve um einen Grad niedriger, oder vielmehr so besteht sie aus der Asymptote* A_s *und aus einer Curve* $\frac{1}{2}m(m-1)-1=\frac{1}{2}(m+1)(m-2)^{ten}$ *Grads, welche die* A_s *zur* $(m-2)$*fachen Asymptote hat, und zwar dieselbe im Puncte* a_∞ *mit* $m-2$ *Zweigen berührt, die somit einander daselbst ebenfalls berühren.*"

b. „*Giebt man der Transversale* S *nacheinander alle Richtungen, so entsteht eine Curven-Schaar,* $S(Q^{\frac{1}{2}m(m-1)})$, *welche die ganze Ebene so bedecken, dafs durch jeden Punct P, im Allgemeinen, je* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *derselben gehen.*" *) Während die Transversale S ihre Richtung ändert, drehen sich die $\frac{1}{2}m(m-1)$ Asymptoten $\mathfrak{A}_s$ der veränderlichen Curve $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ um die festen Schnittpuncte der m Asymptoten A_s der Basis und bilden eben

*) Diejenigen Puncte P, durch welche eine Curve weniger geht, liegen in der Enveloppe E^z der Curven-Schaar, welche von jeder der letztern in $\frac{1}{4}m^2(m-1)^2$ Puncten berührt wird. *Woraus besteht diese Enveloppe* E^z, *oder welche Eigenschaften hat dieselbe?* — Besteht sie nicht aus zwei getrennten Theilen, nämlich 1) aus dem Ort aller Doppelpuncte Q_2 der Curven-Schaar, etwa aus einer Curve x^{ten} Grads Q_2^x, und zwar diese doppelt genommen; und 2) aus dem Ort der Mitten Q_0 aller derjenigen einfachen Sehnen $\mathfrak{S}$ der Basis, welche die Berührungspuncte paralleler Tangenten der letztern verbinden (vergl. §. 15. IV. u. §. 21. I.), [welchen Ort ich als vom $m(m+1)(m-2)^{ten}$ Grad, also $Q_0^{m(m+1)(m-2)}$ gefunden habe]? Demnach bestände die Enveloppe E^z aus

soviele unter sich projectivische Strahlenbüschel, welche theils perspectivisch, theils schief liegen, also theils perspectivische Durchschnitte G haben und theils Kegelschnitte K^2 erzeugen; nämlich jeder Strahlbüschel ist mit $2(m-2)$ andern perspectivisch und mit $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ befindet er sich in schiefer Lage. Die genannten G und K^2 haben unter sich ebenfalls mannichfaltige Beziehungen, welche jedoch hier aufser Acht gelassen werden.

III. *a.* ***„Wird die Transversale S um einen in ihr beliebig gewählten Pol P herumbewegt, so beschreiben die*** $\frac{1}{2}m(m-1)$ ***Mitten Q eine Curve*** $m(m-1)^{ster}$ ***Grads*** $Q^{m(m-1)}$ ***und*** $(m-1)^2 m^{ter}$ ***Classe, welche den Pol P zum*** $\frac{1}{2}m(m-1)$***fachen Punct und nebstdem noch*** $\frac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$ ***Doppelpuncte*** Q_2 ***hat, so wie ferner in jedem der m Puncte*** a_∞ ***der Basis*** C^m ***sich selbst*** $(m-1)$ ***mal berührt, so dafs sie nur*** m ***Asymptoten*** $\mathfrak{A}_s$ ***hat, aber jede derselben*** $(m-1)$***fach zu zählen ist, und zwar sind diese Asymptoten beziehlich den Asymptoten*** A_s ***der Basis parallel, und liegen halb so weit vom Pol ab, als diese, so dafs also die beiden Asymptotenmseit,*** $m\mathfrak{A}_s$ ***und*** mA_s***, ähnlich sind, den Pol P zum Ähnlichkeitspunct haben und ihre entsprechenden Dimensionen sich verhalten, wie 1 : 2.“***

„Liegt der Pol P insbesondere in der Basis selbst, so zerfällt die Ortscurve in zwei Theile $Q^m + Q^{m(m-2)}$***. Die Curve*** Q^m ***ist der Basis ähnlich und mit ihr ähnlich liegend; beide berühren einander im Pol P, der ihr Ähnlichkeitspunct ist, und ihre entsprechenden Dimensionen verhalten sich, wie 1 : 2; so dafs also ihre Asymptoten parallel sind und nach diesem Verhältnifs vom Pol abstehen. Die andere Curve*** $Q^{m(m-2)}$ ***hat den Pol zum*** $\frac{1}{2}(m+1)(m-2)$***fachen Punct, so wie die m Asymptoten*** $\mathfrak{A}_s$ ***der ersten Curve*** Q^m ***zu*** $(m-2)$***fachen Asymptoten; und nebstdem hat sie noch*** $\frac{1}{8}(3m+1)(m-2)(m-3)(m-4)$ ***Doppelpuncte*** Q_2.“

b. ***Soll die Ortscurve*** $Q^{m(m-1)}$ ***durch irgend einen gegebenen Punct*** $\mathfrak{P}$ ***gehen und ihren Pol P in einer gegebenen Geraden G haben, so finden*** $\frac{1}{2}m(m-1)$ ***Lösungen statt.*** Oder: ***Bewegt sich der Pol P in einer festen***

$2Q_2^\varkappa + Q_0^{m(m+1)(m-2)}$, und jede Curve $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ der obigen Schaar hätte $\frac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$ Doppelpuncte Q_2 in $Q_2^\varkappa$, was für $\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3)$ Berührungen zählte, und somit müfste der andere Theil, $Q_0^{m(m+1)(m-2)}$, von jeder Curve $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ in $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)$ Puncten berührt werden.

Für die Basis C^3 bestände $E^\varkappa$ nur allein aus Q_0^{12} (§. 15. IV.) und diese würde von jeder Q^3 in 9 Puncten Q_0 berührt.

Für die Basis C^4, wo $Q_2^\varkappa = Q_2^{10}$ (§. 17.), wäre $E^\varkappa = 2Q_2^{10} + Q_0^{10}$, und jede Curve Q^6 hätte 3 Doppelpuncte Q_2 in Q_2^{10} und berührte die Curve Q_0^{10} in 30 Puncten Q_0.

Geraden G, so ist die ihm entsprechende Curven-Schaar $S(Q^{m(m-1)})$ so beschaffen, dafs durch jeden Punct $\mathfrak{P}$ der Ebene, im Allgemeinen, je $\frac{1}{2}m(m-1)$ derselben gehen, und dafs jede gegebene Gerade G von je $m(m^2-3)$ derselben berührt wird. Die Enveloppe dieser Curven-Schaar enthält dieselben Bestandtheile, wie die vorige (II. *b.* Note), aber aufserdem noch verschiedene andere Theile.

IV. Die in den vorstehenden Sätzen genannten Doppelpuncte Q_2 (II. *a.* u. III. *a.*) zeigen diejenigen Transversalen S an, in welchen von den $\frac{1}{2}m(m-1)$ Strecken irgend zwei, etwa *ad* und *bc*, dieselbe Mitte Q_2 haben, und somit, nach der früheren Erklärung und Bezeichnung, eine durch den jedesmaligen Pol P gehende Doppelsehne S_2 bilden. Daher:

a. „Der Ort aller Doppelsehnen S_2 einer gegebenen Curve m^{ten} Grads C^m ist eine Curve $\frac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)^{ter}$ Classe

$$S_2^{\frac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)},$$

welche die Gerade G_∞ zur $\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3)$fachen, so wie auch jede Asymptote der Basis zur vielfachen Tangente hat,) und welche namentlich auch die $\frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9)$ Doppeltangenten der Basis berührt.*" Die Richtungen, nach welchen die $\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3)$ Berührungspuncte der Ortscurve und der Geraden G_∞ liegen, werden erhalten, wenn man zu je 4 der m Asymptoten A_s der Basis C^m gleicherweise drei Paar harmonische Strahlen X und X_1, Y und Y_1, Z und Z_1 construirt, wie oben zu den $4A_s$ der Basis C^4 (§. 17. S. 48). Durch jeden beliebigen Pol P gehen, im Allgemeinen, $\frac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$ Doppelsehnen S_2; liegt der Pol in G_∞, so sind nur noch ein Drittel derselben wahrnehmbar, indem die übrigen auf G_∞ fallen. *Liegt der Pol P irgendwo in der Basis, so ist er selbst ein Endpunct, etwa a, von $\frac{1}{2}(2m+1)(m-2)(m-3)$ Doppelsehnen, deren Mitten Q_2 in der obigen Ortscurve Q^m liegen* (III. *a.*), *so wie auch in einer andern Curve $(m-1)(m-3)^{ten}$ Grads, welche die Q^m im Pol $\frac{1}{2}(m+2)(m-3)$punctig berührt.*

b. „Der Ort der Mitten Q_2 aller Doppelsehnen S_2 der gegebenen Basis C^m ist eine Curve $\frac{1}{4}m(m+1)(m-2)(m-3)^{ten}$ Grads

$$Q_2^{\frac{1}{4}m(m+1)(m-2)(m-3)},$$

---

*) Zu wievielfachen Tangenten hat sie jede Asymptote A_s der Basis? Etwa zu $(m-2)(m-3)$fachen? und berührt sie jede $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ mal im Puncte a_∞, so dafs sie dieselbe zugleich zur $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$fachen Asymptote hat, und nebstdem in eben sovielen, nicht im Unendlichen liegenden Puncten berührt?

welche die Asymptoten A_s der Basis zu vielfachen [$\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$fachen?] Asymptoten hat, und die Gerade G_∞ nebstdem in denselben Puncten schneidet, in denen diese von der Ortscurve der S_2 berührt wird, und welche ferner insbesondere auch durch die Mitten der Doppeltangenten der Basis geht."

Liegt von den $\frac{1}{2}m(m-1)$ Mitten Q einer Transversale S irgend eine, die Q_1 heifsen soll, in der Basis selbst (ohne dafs die zugehörige Strecke $=0$ ist), z. B. liegt die Mitte Q_1 der Strecke ac im Schnitt b, und wird dabei, wie früher (§. 15. II.), die Transversale oder die einfache Sehne ac durch S_1 bezeichnet, so ergiebt sich durch die obigen Sätze ferner leicht der folgende Satz.

c. „*Der Ort aller einfachen Sehnen S_1 der gegebenen Basis C^m, deren Mitten Q_1 in der Basis selbst liegen, ist eine Curve $m(m-1)(m-2)^{ter}$ Classe*

$$S_1^{m(m-1)(m-2)},$$

welche die Gerade G_∞ zur $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)$fachen Tangente, so wie auch die m Asymptoten A_s der Basis zu $2(m-2)$fachen Tangenten und zu $(m-2)$fachen Asymptoten hat, und welche die Basis in ihren $3m(m-2)$ Wendepuncten berührt." Die Richtungen, nach welchen die Berührungspuncte dieser Curve und der Geraden G_∞ liegen, sind gleicherweise durch die Asymptoten der Basis bestimmt, wie früher bei der Basis C^3 (§. 15. II. 5.); nämlich die in jedem durch irgend drei Asymptoten der Basis C^m gebildeten Dreieck aus den Ecken durch die Mitten der Gegenseiten gezogenen drei Strahlen sind nach drei jener Berührungspuncte gerichtet. Eben so ist der Berührungspunct, s, jeder Sehne S_1 mit der Ortscurve, hier auch durch dieselbe einfache Construction zu finden, wie dort (§. 15. II. 7.). — Durch jeden beliebigen Pol P gehen $m(m-1)(m-2)$ Sehnen S_1: *ihre $m(m-1)(m-2)$ Mitten Q_1 liegen allemal in irgend einer Curve $(m-1)(m-2)^{ten}$ Grads $Q_1^{(m-1)(m-2)}$.* Liegt der Pol P in der Basis selbst, *so ist er einerseits die Mitte $b=Q_1$ von $\frac{1}{2}(m+1)(m-2)$ Sehnen $ac=S_1$, und andererseits ein Endpunct a von $(m+1)(m-2)$ andern Sehnen S_1: die $(m+1)(m-2)$ Mitten der letztern liegen in der obigen Curve Q^m* (III. *a.*), welche die Basis in P berührt. Liegt ferner der Pol P im Unendlichen, in G_∞, so sind nur noch $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)$ Sehnen S_1 wahrnehmbar (indem eben soviele auf G_∞ fallen), *und durch ihre Mitten Q_1 können Curven $Q_1^{\frac{1}{2}(m-1)(m-2)}$ gehen.* Bewegt sich P in der Geraden G_∞, so entsteht eine Curven-Schaar $S(Q_1^{\frac{1}{2}(m-1)(m-2)})$. *So oft eine dieser Curven die Basis berührt, wobei zwei*

der genannten Sehnen S_1 in eine, S_1^0, zusammenfallen, ist diese eine Asymptote der Curve $S_1^{m(m-1)(m-2)}$ und berührt sie im entsprechenden Pol P; zudem hat jede solche Sehne S_1^0 die Eigenschaft, dafs die in ihren Endpuncten a, c und in ihrer Mitte b an die Basis gelegten Tangenten A, C und B sich in irgend einem Puncte $\mathfrak{P}$ treffen. — 1) Welche Enveloppe hat die Curven-Schaar $S(Q_1^{\frac{1}{2}(m-1)(m-2)})$? 2) Von welchem Grad ist die Curve $S_1^{m(m-1)(m-2)}$?

V. Es folgt weiter:

a. „Der Ort aller Transversalen S in Bezug auf die gegebene Basis C^m, welche eine ihrer Mitten Q in einer gegebenen Geraden G haben, oder schlechthin, der Ort aller einfachen Sehnen $ab = S$, deren Mitten in der gegebenen Geraden G liegen, ist eine Curve $m(m-1)^{ster}$ Classe

$$S^{m(m-1)}$$

und $m(m^2-3)^{ten}$ Grads, welche die Geraden G und G_x zu $\frac{1}{2}m(m-1)$-fachen Tangenten, so wie zudem noch $\frac{1}{4}m(m+1)(m-2)(m-3)$ Doppeltangenten hat, und welche insbesondere auch die m Asymptoten der Basis nebst deren m Tangenten in ihren Schnitten mit G, so wie ferner auch die Basis selbst in $m(m+2)(m-2)$ bestimmten Puncten berührt." Nämlich die genannten Doppeltangenten bestehen aus denjenigen Doppelsehnen S_2 der Basis, deren Mitten Q_2 in G liegen, und die Ortscurve berührt die Basis in den Berührungspuncten a_0 aller derjenigen Tangenten-Sehnen ba_0 (§. 21. I.), welche ihre Mitte gleichfalls in G haben. Die Ortscurve berührt die Gerade G in $\frac{1}{2}m(m-1)$ Puncten und schneidet sie also noch in $m(m+1)(m-2)$ andern Puncten Q_0: ihre Tangenten in diesen Puncten Q_0 sind solche besondere Sehnen $ab = \mathfrak{S}$ $(= S)$, in deren Endpuncten a, b die Tangenten A, B an die Basis parallel sind und sich in einem Puncte auf G_x treffen; und gleicherweise sind die Tangenten der Ortscurve in ihren $m(m+1)(m-2)$ Schnitten mit der Geraden G_x, also ihre geradlinigen Asymptoten, solche Sehnen ab, in deren Endpuncten die Tangenten an die Basis sich auf der Geraden G treffen, so dafs also in diesem Betracht zwischen G und G_x Reciprocität statt findet.

b. „Der Ort aller derjenigen Transversalen S der gegebenen Basis C^m, welche eine ihrer Mitten Q in einer gegebenen Curve n^{ten} Grads G^n haben, ist eine Curve $nm(m-1)^{ster}$ Classe, welche die Gerade G_x zur $\frac{1}{2}nm(m-1)$fachen Tangente hat, und von welcher ferner angegeben

werden kann, wieviele Doppeltangenten sie habe, wie oft sie die Curven C^m *und* G^n *berühre, u. s. w.*"

c. „*Der Ort der* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *Mitten* Q *derjenigen Tansversale* S *der Basis* C^m, *welche eine gegebene Curve* n^{ter} *Classe* K^n *berührt, ist eine Curve* $nm(m-1)^{sten}$ *Grads, welche mit jeder der* m *Asymptoten der Basis* n *parallele aber zugleich* $(m-1)$*fache Asymptoten hat, u. s. w.*"

d. „*Der Ort der Mitten* Q_0 *aller solchen einfachen Sehnen* $ab = \mathfrak{S}$ *der Basis* C^m, *in deren Endpuncten* a, b *die Tangenten* A, B *parallel sind, oder der Ort desjenigen Pols* Q_0, *dessen innere Polare* J^{m-1} *die Basis in irgend zwei Puncten* a, b *berührt* (§. 21. I.), *ist eine Curve* $m(m+1)(m-2)^{ten}$ *Grads*

$$Q_0^{m(m+1)(m-2)},$$

welche die Basis in ihren $3m(m-2)$ *Wendepuncten berührt und ihre* m *Puncte* a_x *zu* $(m+1)(m-2)$*fachen Puncten, also mit jeder* A_s *der Basis eben soviele parallele Asymptoten hat, die beziehlich in der Mitte zwischen* A_s *und den mit ihr parallelen Tangenten der Basis liegen.*" Demzufolge giebt es, im Allgemeinen, $m(m-2)(m^2-7)$ solche Sehnen $\mathfrak{S}$, welche ihre Mitte Q_0 in der Basis selbst, aber weder in einem der Puncte a_x, noch in einem Wendepunct derselben haben. (Für $m=3$ kommt $6\mathfrak{S}$ oder $6Q_0$, wie §. 15. IV.) Hier entsteht die Frage: ***Welches ist der Ort,*** $\mathfrak{S}^x$, ***aller Sehnen*** $\mathfrak{S}$? *) Der Berührungspunct jeder Sehne $\mathfrak{S}$ mit der Ortscurve $\mathfrak{S}^x$ ist übrigens durch dieselbe einfache Bedingung bestimmt, wie oben (§. 15. IV.) bei der Basis C^3.

VI. Der Ort der Mitten Q aller Transversalen S, welche die Basis C^m berühren, also aller Tangenten der letztern, zerfällt in drei Theile, wovon der eine die Basis selbst ist und nur die im Berührungspunct, etwa a_0, liegende *eine* Mitte enthält; dagegen enthält ein anderer Theil die Mitten, etwa T_0 (statt Q), derjenigen $m-2$ Strecken, welche zwischen dem Berührungspunct a_0 und den $m-2$ Schnitten b, c, d, ... liegen (wobei eigentlich in jedem T_0 ein Paar Q vereint sind (I.)); und der dritte Theil enthält die Mitten T $(=Q)$ der von diesen $m-2$ Schnitten begrenzten Strecken. Somit liegen in jeder Tangente $m-2$ Mitten T_0 und $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ Mitten T; ihre respectiven Örter aber sind folgende.

---

*) Bei einem Versuch, diesen Ort zu bestimmen, fand ich $x=\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)$.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

α. *„Der Ort der Mitten T_0 rücksichtlich aller Tangenten der gegebenen Basis C^m ist eine Curve $m(m+2)(m-2)^{ten}$ Grads*

$$T_0^{m(m^2-4)},$$

welche die m Puncte a_x der Basis zu $m(m-1)$fachen Puncten und jede A_s derselben zur $(m-2)$fachen Asymptote hat, d. h., welche jede A_s der Basis in deren Punct a_x mit $m-2$ Zweigen berührt und mit $(m+1)(m-2)$ andern Zweigen schneidet, und welche ferner mit der Basis deren $3m(m-2)$ Wendepuncte und Wendetangenten gemein hat, so wie jede Doppeltangente derselben in ihrer Mitte berührt.“ Daraus folgt: *„Eine beliebige Curve C^m hat, im Allgemeinen, $m(m+4)(m-2)(m-3)$ solche Tangenten, bei welchen ein Schnittpunct b in der Mitte zwischen dem Berührungspunct a_0 und einem andern Schnittpunct c liegt.“*

β. *„Der Ort der Mitten T aller Tangenten der Basis C^m ist eine Curve $m(m+1)(m-2)(m-3)^{ten}$ Grads*

$$T^{m(m+1)(m-2)(m-3)},$$

welche die m Puncte a_x der Basis zu $(m+1)(m-2)(m-3)$fachen Puncten hat, durch die Berührungspuncte ihrer $\frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9)$ Doppeltangenten geht und nebstdem jede dieser Doppeltangenten in $2(m-4)$ Puncten berührt.“ Folgerung: *„Eine beliebige Curve C^m hat, im Allgemeinen, $m(m-2)(m-3)(m^2-m-4)$ solche Tangenten, bei welchen von den $m-2$ Schnitten irgend zwei, c und d, gleichweit von einem dritten, b, oder vom Berührungspunct, a_0, abstehen; wobei jedoch der letztere Fall für 2 zu zählen ist.“*

Für die Basis C^3 hat man als Ort der Mitten T_0 aller Tangenten eine Curve T_0^{12} $(=12)$ wie oben (§. 15. IV.).

Bei der Basis C^4 sind die Ortscurven T_0^{48} und T^{40}, und es folgt:

(α^0.) *„Eine beliebige Curve 4ten Grads C^4 hat, im Allgemeinen, 64 solche Tangenten, bei welchen einer der beiden Schnitte, etwa b, in der Mitte zwischen dem andern c und dem Berührungspuncte a_0 liegt.“* Und

(β^0.) *„Dieselbe Curve mufs $64:2=32$ solche Tangenten haben, bei welchen die beiden Schnitte b und c gleichweit vom Berührungspunct a_0 abstehen (wie §. 17.).“* Also: *Die Ortscurve T^{40} hat die 4 Puncte a_∞ der Basis C^4 zu 10fachen Puncten, geht durch die 56 Berührungspuncte ihrer 28 Doppeltangenten und berührt dieselbe in den oben näher beschriebenen 32 Puncten P^0* (§. 17.).

Ist $m > 4$, so wird die Basis C^m von der Ortscurve der T (aufser den im Satze (β.) namhaft gemachten Puncten, noch) in x Puncten berührt und in y Puncten geschnitten, wobei

$$2x + y = m(m-2)(m-3)(m^2-m-4)$$

sein mufs: ***Diese zwei Zahlen x und y zu finden?*** [Ist nicht $y = (m-4)x$? wie ein gewisser Wahrscheinlichkeits-Grund es erheischt. Dann wäre

$$x = m(m-3)(m^2-m-4) \quad \text{und} \quad y = m(m-3)(m-4)(m^2-m-4),$$

und die Basis C^m hätte $m(m-3)(m^2-m-4)$ solche Tangenten, bei welchen zwei Schnitte c und d gleichweit vom Berührungspunct a_0 abständen, und ferner $m(m-3)(m-4)(m^2-m-4)$ solche Tangenten, bei welchen ein Schnitt b in der Mitte zwischen zwei andern c und d läge.]

VII. In der gegebenen Basis C^m giebt es auch solche besondere Transversalen, bei welchen der Schwerpunct A ihrer m Schnitte (§. 25.) mit einer ihrer $\frac{1}{2}m(m-1)$ Mitten Q zusammenfällt. Jede solche Transversale heifse S_a und ihr Schwerpunct Q_a; so sind die respectiven Örter derselben

$$S_a^{\frac{1}{2}m(m-1)^2} \quad \text{und} \quad Q_a^{\frac{1}{2}m(m+1)(m-2)},$$

d. h.: ,,***Bei einer beliebigen Curve C^m ist der Ort derjenigen Transversale S_a, deren Schwerpunct Q_a in der Mitte zwischen irgend zwei Schnitten liegt, eine Curve $\frac{1}{2}m(m-1)(m-1)^{ster}$ Classe und der Ort des Schwerpuncts ist eine Curve $\frac{1}{2}m(m+1)(m-2)^{ten}$ Grads.***"

Für die Basis C^3 sind danach die Ortsurven: S_a^6 und Q_a^6; die erste ist die obige Curve S_1^6 (§. 15. II.), und die andere bedeutet die doppelte Basis C^3, indem in der That jeder Punct in C^3 die Mitte ($= Q_a$) zweier Sehnen S_1 ist (§. 15.).

Bei der Basis C^4 sind die Ortscurven: S_a^{18} und Q_a^{20}; aber jede ist eine doppelte Curve, indem hier jede Transversale S_a eine Doppelsehne S_2 ist, und daher zwei Mitten Q im Schwerpuncte Q_a liegen; die einfachen Örter sind somit nur S_a^9 und Q_a^{10}; wie wir sie bereits aus §. 17. kennen. — Für $m > 4$ hören diese Reductionen der Ortscurven auf.

Bei der Basis C^5 hat man: S_a^{40} und Q_a^{45}. Die Basis hat mit der ersten 800 Tangenten S_a^0 ($= S_a$) und mit der andern 225 Puncte Q_a^0 ($= Q_a$) gemein. Nimmt man an, Q_a liege in der Mitte zwischen den Schnitten a und b, so ist er zugleich der Schwerpunct der drei übrigen Schnitte c, d und e; und wird der Berührungspunct jeder S_a^0 mit C^5 durch B_0 bezeichnet, so können folgende verschiedene Umstände statt finden.

A. In Betreff der 800 S_a^0 sind drei Fälle möglich, entweder liegen:

α) etwa c und d (oder ce oder de) in B_0, oder

β) etwa a und e (oder ac, ad, bc, bd, be) in B_0, oder

γ) a und b in B_0 und somit auch Q_a^0 in B_0; und

B. In Betracht der 225 Q_a^0 sind 2 Fälle möglich; entweder liegt:

δ) Q_a^0 in e (oder c, d) und ist nicht allein die Mitte von ab, sondern auch von cd, so dafs die zugehörige $S_a = S_2$ wird, oder

ε) Q_a^0 in a und b vereint, also in B_0, wie Fall (α.), so dafs die zugehörige $S_a = S_a^0$ wird, d. h. die C^5 in $(ab) = Q_a^0$ berührt.

Dabei entsteht die Frage: ***Wie oft tritt jeder dieser Fälle ein?*** und namentlich: ***Wieviele der 225 Puncte Q_a^0 gehören dem Falle (δ) und wieviele dem Falle (ε) an?*** Der Fall (δ) enthält die oben (§. 19.) verlangten Puncte, und bestätigt die dortige Angabe über ihre Anzahl. — Analoge Fragen sind bei der allgemeinen Basis C^m zu stellen.

§. 27.

Durch Projection gehen die vorigen Sätze (§. 26.) in solche andere Sätze über, bei welchen die betrachteten Mitten Q durch gewisse harmonische Puncte N vertreten werden, nämlich bei welchen nebst der Basis C^m noch irgend eine Gerade G gegeben ist (dort war es G_∞), und wobei dann zu dem Schnitt R der Transversale S und dieser Geraden G in Bezug auf je zwei der m Schnitte a, b, c, d, ... von S und C^m der vierte harmonische Punct N genommen wird.

Es können aber in der Transversale ferner auch harmonische Puncte auf andere Weise bestimmt werden, wie z. B. so: dafs man zu je drei ihrer m Schnitte a, b, c, d, ... mit C^m die drei vierten harmonischen Puncte N nimmt (§. 11. III.), wodurch man in jeder Transversale im Ganzen $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)$ Puncte N erhält. Und wird sodann die Transversale geeigneten Bedingungen unterworfen, so gelangt man zu neuen Curven, so wie zu neuen Eigenschaften der Basis C^m. Ich mufs mich jedoch darauf beschränken, hier nur einige leichtere Resultate kurz mitzutheilen.

I. Es kann verlangt werden, dafs von den m Schnitten a, b, c, d, ... irgend vier unter sich harmonisch sein sollen. Dies führt zu dem folgenden Satze.

„Der Ort derjenigen Transversale S, welche eine gegebene Curve m^{ten} Grads C^m in irgend 4 harmonischen Puncten schneidet, ist eine Curve $\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3)^{ter}$ Classe

$$S^{\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3)}$$

welche die Basis in jedem ihrer Wendepuncte mit je $m-3$ Zweigen, so wie nebstdem (wenn $m>4$) noch in vielen andern Puncten berührt." Der Berührungspunct jeder S mit der Ortscurve ist durch Hülfe der in den vier harmonischen Schnittpuncten an die Basis gelegten vier Tangenten leicht zu construiren. Aufgabe: *Den Grad der Ortscurve zu bestimmen.*

Bei der Basis C^4 ist demnach der Ort der Geraden S, welche dieselbe in 4 harmonischen Puncten $abcd$ schneidet, eine Curve 6ter Classe S^6, welche die Basis in ihren 24 Wendepuncten berührt. Die $12\cdot 6=72$ gemeinschaftlichen Tangenten beider Curven bestehen daher nur aus den 24 Wendetangenten der Basis, indem jede für 3 zählt. *Die Curve S^6 ist vom 30sten Grad; sie hat daher mit der Basis, aufser jenen 24 Berührungspuncten, noch 72 Puncte (Schnitte) $a_0\,(=a)$ gemein, und ihre Tangente S in jedem dieser a_0 schneidet die Basis, aufser daselbst, in drei solchen Puncten b, c, d (die mit a_0 harmonisch sind und) deren zugehörige Tangenten B, C, D sich in irgend einem Puncte p treffen. Durch die 72 Puncte a_0 können Curven 18ten Grads gehen. „Welche Lage haben die 72 Puncte p?"* — Besteht insbesondere die Basis C^4 aus 4 Geraden A, B, C und D, so zerfällt die Ortscurve S^6 in die dem Vierseit $ABCD$ eingeschriebenen drei harmonischen Kegelschnitte. (Systemat. Entw. der Abhäng. geom. Gestalten. §. 43.) Gleicherweise ergeben sich specielle Resultate, wenn die Basis C^4 aus C^2+2C^1, oder $C^2+C_1^2$, oder C^3+C^1 besteht.

Bei der Basis C^5 ist die Ortscurve $=S^{30}$; sie berührt die Basis in jedem ihrer 45 Wendepuncten mit zwei Zweigen, und nebstdem berührt sie dieselbe noch in 165 andern Puncten a. Daher:

„Eine beliebige Curve 5ten Grads hat, im Allgemeinen, 165 solche harmonische Tangenten, bei welchen der Berührungspunct a und die drei Schnittpuncte b, c, d harmonisch sind."

Bei der Basis C^m findet man auf diese Weise, aufser den Wendetangenten,

$$\tfrac{1}{4}m(m-2)(m-3)[m(m-1)^2-36]$$

solche Tangenten, bei welchen von den $m-1$ Puncten, nämlich dem Berührungspunct a und den $m-2$ Schnitten b, c, d, ..., irgend 4 harmonisch sind, wobei jedoch jeder Fall, wo sich a unter den harmonischen Puncten befindet, für 2 zu zählen ist, so dafs, wenn die Zahl der Fälle, welche a enthalten, durch x und die ohne a durch y bezeichnet werden, dann $2x+y$ der vorstehenden Zahl gleich ist. Dabei wird die Basis von der Ortscurve in den x Puncten a berührt. — *Diese Zahlen x und y zu bestimmen.*

II. Wird die gegebene Basis C^4 von einer Tangente S in a berührt und in b, c geschnitten, und man denkt sich zu diesen 3 Puncten die 3 vierten harmonischen Puncte α, β, γ und zwar so, dafs

$$ab\alpha c; \quad abc\beta; \quad a\gamma bc$$

harmonisch sind:

„So ist der Ort des Puncts α eine Curve 32sten Grads, welche die Basis in ihren Wendepuncten dreipunctig berührt und durch die Berührungspuncte ihrer Doppeltangenten geht (s. S. 47 Note)." Und

„So ist der gemeinsame Ort der beiden Puncte β und γ eine Curve 64sten Grads, welche die Basis in jedem ihrer 24 Wendepuncte mit zwei Zweigen dreipunctig, so wie in jedem der 56 Berührungspuncte ihrer 28 Doppeltangenten (zweipunctig) berührt. Daraus folgt ferner:

„Dafs die Curve 4ten Grads C^4, im Allgemeinen, 64 solche Tangenten hat, bei welchen der eine Schnittpunct, b, in der Mitte zwischen dem andern, c, und dem Berührungspunct, a, liegt (wie §. 26. VI. α^o.), und dafs diese besondern Tangenten den Asymptoten der genannten Curve 64sten Grads parallel sind."

Wird die gegebene Basis C^5 von einer Tangente S in a berührt und in b, c, d geschnitten und man bestimmt die drei Puncte δ, γ, β so, dafs

$$ab\delta c; \quad ab\gamma d; \quad ac\beta d$$

harmonisch sind:

So ist der gemeinsame Ort der 3 Puncte β, γ, δ eine Curve x^{ten} Grads, welche die Basis in jedem ihrer 45 Wendepuncte mit zwei Zweigen dreipunctig berührt und dieselbe in den $165 \cdot 3 = 495$ *Schnitten (b, c, d) der vorgenannten 165 harmonischen Tangenten* (I.), *so wie in den 240 Berührungspuncten ihrer 120 Doppeltangenten schneidet, und welche ferner auch diese Doppeltangenten doppelt berührt. Jede Tangente der Basis, bei welcher irgend zwei der drei Schnitte b, c und d gleichweit vom Berührungspunct a abstehen, ist einer Asymptote der genannten Ortscurve parallel. — Den Grad x zu bestimmen.*

III. Durch jede 4 in einer Geraden liegenden Puncte, nach ihrer Reihenfolge a, b, c und d, sind drei verschiedene (von mir sogenannte) Puncten-Systeme (Involutions-Systeme) bestimmt, indem man dieselben auf drei Arten als zwei Paar conjugirte Puncte ansehen kann, nämlich

1. ab und cd; 2. ad und bc; 3. ac und bd.

Die zu beiden Paaren jedes Systems gehörigen harmonischen Puncte, bezieh-

lich x und x_1, y und y_1, z und z_1, wobei $axbx_1$ und $cxdx_1$, $aydy_1$ und $bycy_1$, $azcz_1$ und $bzdz_1$ harmonisch sind (§. 17.), habe ich „*Asymptoten-Puncte*" und die beiden ersten Systeme, bei denen die Asymptoten-Puncte reell sind, „*hyperbolisch*" dagegen das dritte (3.), bei welchem dieselben imaginär sind, „*elliptisch*" genannt.

Denkt man sich zu je 4 der m Puncte $a, b, c, d, \ldots$, welche die gegebene Basis C^m mit irgend einer Transversale S gemein hat, die drei Paar Asymptoten-Puncte x und x_1, y und y_1, z und z_1, so hat man im Ganzen $\frac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3) = \mu$ Paare, oder $\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3) = 2\mu$ einzelne Asymptoten-Puncte, von denen jeder durch X bezeichnet werden soll.

„*Wird die Transversale S um einen in ihr beliebig gewählten Pol P herumbewegt, so beschreiben die 2μ Puncte X insgesammt eine Curve $3\mu^{ten}$ Grads*

$$X^{\frac{3}{8}m(m-1)(m-1)(m-2)(m-3)},$$

welche den Pol P zum μfachen Punct hat, u. s. w."

Es kann solche besondere Transversalen $S_x\ (= S)$ geben, bei welchen ein Asymptoten-Punct mit einem ihrer m Schnittpuncte zusammenfällt, z. B. der Schnitt e kann x sein, so dafs $aebx_1$ und $cedx_1$ harmonisch sind, also das durch die Paare a und b, c und d bestimmte Puncten-System den Schnitt e zum Asymptoten-Punct hat, oder diese 5 Schnitte Involution bilden.

„*Der Ort derjenigen Transversale S_x, bei welcher ein Asymptoten-Punct X in der Basis C^m selbst liegt, oder von deren m Schnitten irgend 5 Involution bilden, ist eine Curve*

$$S_x^{\frac{3}{5}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}."$$

Rücksichtlich aller dieser Transversalen S_x, welche einen Asymptoten-Punct x in einem Schnitt e (aber nicht in einem Berührungspunct) der Basis haben, kann gefragt werden: *Welchen Ort der dem $x\ (= e)$ zugehörige andere Asymptoten-Punct x_1 habe?* Dieser Ort wird irgend eine Curve n^{ten} Grads X_1^n sein; ihre Schnitte mit der Basis C^m bestimmen diejenigen *einzelnen* Transversalen S_{xx_1}, welche ein Paar conjugirte Asymptoten-Puncte x und x_1 in der Basis haben. Die Beantwortung der Aufgabe wird erleichtert, wenn zuvor die folgende gelöst ist: *Wenn in jeder Tangente S der Basis C^m zu dem Berührungspunct a in Bezug auf je zwei der $m-2$ Schnitte $b, c, d, \ldots$ der vierte harmonische Punct α gedacht wird, so soll der gemeinsame Ort aller dieser Puncte α bestimmt werden.*

Bemerkung. Ich will hier noch bemerken, dafs ich einige in dieser Abhandlung aufgestellten Sätze nicht genügend bewiesen habe, so dafs dieselben möglicherweise fehlerhaft sein können. Sollte dies der Fall sein, so mag die Neuheit und Schwierigkeit des Gegenstandes, zumal im Vergleich mit der von mir befolgten synthetischen Betrachtungsweise, mich einigermafsen entschuldigen. Namentlich in den drei letzten Paragraphen habe ich mir einige gewagte Schlüsse erlaubt; so z. B. um den Satz (V. *d.*) in §. 26. zu erhalten. Ist dieser Satz nicht allgemein wahr, so sind auch mehre ihm vorhergehende Sätze nicht in allen Theilen richtig.

3.

Aufgaben und Sätze, bezüglich auf die vorstehende Abhandlung.

(Vom Herrn Professor *J. Steiner*, zu Berlin.)

Zu den in der Abhandlung bereits gelegentlich aufgeworfenen zahlreichen Fragen mögen hier noch folgende hinzugefügt werden.

1. Wenn eine Curve 4ten Grads einen Mittelpunct $\mathfrak{M}$ haben und durch gegebene 9 Puncte p gehen soll: welches ist dann der Ort von $\mathfrak{M}$? Und: Wieviele Curven 4ten Grads, welche Mittelpuncte haben, gehen durch 10 gegebene Puncte p? (§. 5. und vergl. §. 7.) — Die analogen Fragen bei höheren Curven.

2. Wieviele Durchmesser $\boldsymbol{D}$ hat die Curve 4ten Grads, welche mit ihrer conjugirten Richtung irgend einen gegebenen Winkel α bilden? Wieviele, wo $\alpha = 90^0$? Für $\alpha = 0$, sind es die 4 Asymptoten (§. 17.).

3. Wieviele Paare conjugirte Durchmesser hat die Curve m^{ten} Grads $\boldsymbol{C}^m$? Der Kegelschnitt $\boldsymbol{C}^2$ hat unendlich viele; die $\boldsymbol{C}^3$ hat keine; die $\boldsymbol{C}^4$ hat 3 Paar (§. 17.); wie geht es weiter?

4. Welches ist, in Bezug auf eine gegebene Basis 3ten Grads $\boldsymbol{C}^3$, der Ort desjenigen Pols $\boldsymbol{P}$, dessen beide Polaren $\boldsymbol{A}^2$ und $\boldsymbol{J}^2$ einander berühren (§. 15.)? — Die entsprechende Frage, bei höhern Basen.

5. Werden aus einem festen Punct $\boldsymbol{P}$ beliebige Transversalen $\boldsymbol{S}$ durch eine gegebene Curve m^{ten} Grads $\boldsymbol{C}^m$ gezogen und an diese in den m Schnitten $a, b, c, \ldots$ die Tangenten $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \ldots$ gelegt, die einander in $\frac{1}{2}m(m-1)$ Puncten $\boldsymbol{Q}$ schneiden: so ist der Ort dieser Puncte irgend eine Curve x^{ten} Grads $\boldsymbol{Q}^x$. Und werden aus jedem Puncte $\boldsymbol{P}$ einer festen Geraden $\boldsymbol{G}$ an dieselbe gegebene Curve $\boldsymbol{C}^m$ die $m(m-1)$ Tangenten gezogen, deren Berührungspuncte im Ganzen $\frac{1}{2}m(m-1)[m(m-1)-1]$ Berührungssehnen $\mathfrak{S}$ bestimmen: so ist der Ort dieser Sehnen eine Curve x^{ter} Classe $\mathfrak{S}^x$. In beiden Fällen hat x denselben Werth. Die Zahl x zu finden. — Für $m = 3$ ist $x = 9$ (§. 15.).

6. Den Ort derjenigen Transversale S zu finden, welche eine gegebene Curve m^{ten} Grads in irgend drei Paar Puncten schneidet, die zu einem Puncten-System gehören (Involution bilden).

7. In §. 15. II. (S. 38 Note) wurde bemerkt, dafs die beiden Polaren A^2 und J^2 desselben Pols P in Bezug auf die gegebene Basis C^3, Kegelschnitte jeder Art sein können, je nach der Lage des Pols gegen den dort näher beschriebenen Kegelschnitt E^2. In der That können dieselben nicht allein Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln sein, sondern als solche auch jede beliebige Form haben; und zwar verhält es sich damit näher wie folgt.

a. Sollen die Polaren A^2 und J^2 Parabeln sein, so ist der Ort des Pols P die Curve E^2. b. Sollen dieselben gleichseitige Hyperbeln sein, so ist der Ort des Pols eine bestimmte Gerade H. c. Sollen dieselben Kreise sein, so giebt es nur einen einzigen Pol P_0 $(= P)$, der genügt; derselbe ist zugleich der Pol der Geraden H in Bezug auf den Kegelschnitt E^2. d. Sollen A^2 und J^2 irgend einem gegebenen Kegelschnitte C^2 ähnlich sein, so ist der Ort des Pols P jedesmal ein solcher Kegelschnitt P^2, welcher den Kegelschnitt E^2 (imaginär) doppelt berührt, und zwar mit ihm jene Gerade H zur (ideellen) Berührungssehne hat. — Giebt man also dem Kegelschnitte C^2 nach einander alle verschiedenen Formen, so entstehen für den Pol P eine Schaar Ortscurven P^2, oder vielmehr ein Büschel $B(P^2)$, welche sich insgesammt in denselben zwei Puncten berühren, die Gerade H zur Berührungssehne und dieselbe mit jenem Pol P_0 gemeinsam zu Polare und Pol haben, und zu welchen insbesondere auch die Curve E^2, so wie die Gerade H und der Pol P_0 selbst als Übergangs- und Grenzglieder gehören, nämlich E^2 als Übergang der Polaren A^2 und J^2 von Hyperbeln zu Ellipsen, dagegen H als Grenze der Hyperbeln und P_0 als Grenze der Ellipsen.

Hat die gegebene Curve C^3 drei reelle Asymptoten A, B und C, so sind die Gerade H und der Pol P_0 wie folgt zu finden. Sind α, β, γ die Fufspuncte der aus den Ecken a, b, c, des Dreiseits ABC auf die Gegenseiten A, B, C gefällten Perpendikel: so liegen die Schnitte der 3 Paar Geraden $\alpha\beta$ und C, $\alpha\gamma$ und B, $\beta\gamma$ und A auf der verlangten Geraden H; oder diese Gerade ist auch die Linie der gleichen Potenzen der den Dreiecken abc und $\alpha\beta\gamma$ umgeschriebenen Kreise. Und legt man in den Ecken des Dreiecks abc an den ihm umschriebenen Kreis die Tangenten, die ein neues Dreieck $a_1b_1c_1$ bilden: so schneiden sich die drei Geraden aa_1, bb_1, cc_1 in dem

verlangten Pol P_0. — Ist insbesondere das Asymptoten-Dreieck $ABC = abc$ *gleichseitig*, also E^2 der ihm eingeschriebene Kreis, so sind alle Ortscurven, $B(P^2)$, mit demselben concentrische Kreise und P_0 ist ihr gemeinsamer Mittelpunct, und die Gerade H ist $= G_\infty$. Daher: ***Bei einer Curve 3ten Grads, deren Asymptoten ein gleichseitiges Dreieck abc bilden, liegen die Berührungspuncte von je 6 parallelen Tangenten in einer gleichseitigen Hyperbel. Werden aus einem Puncte des dem Dreieck abc umschriebenen Kreises 6 Tangenten an die Curve gelegt, so liegen die Berührungspuncte in einer Hyperbel, deren Asymptoten-Winkel*** $= 60^0$ ***ist; und werden aus dem Mittelpuncte*** P_0 ***dieses Kreises die 6 Tangenten an die Curve gelegt, so liegen die Berührungspuncte in irgend einem Kreise.***

Wie mufs das Asymptoten-Dreieck abc beschaffen sein, damit der Pol P_0 Brennpunct des Kegelschnitts E^2 (und damit zugleich auch aller Kegelschnitte P^2) wird?

Für alle Curven 3ten Grads, welche mit der gegebenen gemeinschaftliche Asymptoten haben (mögen diese reell oder imaginär sein), bleiben die Ortscurven $B(P^2)$ die nämlichen (§. 22.); was zu weitern Folgerungen führt, wenn die speciellen Curven 3ten Grads berücksichtigt werden.

8. *„Alle Curven 3ten Grads, welche durch folgende 7 Puncte eines gegebenen Dreiecks gehen, nämlich 1) durch den Schwerpunct, 2) durch die Ecken, und 3) durch die im Unendlichen liegenden Puncte der Seiten, haben congruente Asymptoten-Dreiecke, und zwar sind dieselben dem gegebenen Dreieck ähnlich, mit ihm ähnlichliegend und ihre Seiten verhalten sich zu den entsprechenden Seiten des letztern, wie 2 : 3.“* — Es giebt einen analogen Satz über das vollständige $m$seit und die Curven m^{ten} Grads. Z. B. beim vollständigen Vierseit müssen die Curven 4ten Grads, aufser durch die 6 Ecken und durch die im Unendlichen liegenden Puncte der 4 Seiten, auch noch durch die oben §. 18. II. (S. 60) beschriebenen 3 Puncte p, also im Ganzen durch 13 gegebene Puncte gehen.

4.

Nouvelles recherches sur les Covariants.

(Par Mr. *A. Cayley* à Londres.)

Je me sers de la notation

$$(a_0, a_1, \ldots a_n)(x, y)^n$$

pour représenter la fonction

$$a_0 x^n + \frac{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n,$$

en supposant que les coefficients a'_0, a'_1 etc. soient donnés par l'équation

$$(a_0, a_1, \ldots a_n)(\lambda x + \mu y, \lambda' x + \mu' y)^n = (a'_0, a'_1, \ldots a'_n)(x, y)^n,$$

supposée identique par rapport à x, y.

Soit $\varphi(a_0, a_1, \ldots a_n; x, y)$ une fonction des coefficients et des variables, telle que

$$\varphi(a'_0, a'_1, \ldots a'_n; x, y) = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^p . \varphi(a_0, a_1, \ldots a_n; \lambda x + \mu y, \lambda' x + \mu' y).$$

Cette fonction φ sera généralement un „*Covariant*," et dans le cas particulier, où φ est fonction des seuls coefficients, un „*Invariant*" de la fonction donnée.

Je suppose d'abord que les nouveaux coefficients soient donnes par l'équation

$$(a_0, a_1, \ldots a_n)(x + \lambda y, y)^n = (a'_0, a'_1, \ldots a'_n)(x, y)^n.$$

Cela donne les relations

$$\begin{aligned} a'_0 &= a_0, \\ a'_1 &= a_1 + \lambda a_0, \\ a'_2 &= a_2 + 2\lambda a_1 + \lambda^2 a_0, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Il faut donc que le *covariant* φ satisfasse à l'équation

$$\varphi(a'_0, a'_1, \ldots a'_n; x, y) = \varphi(a_0, a_1, \ldots a_n; x + \lambda y, y),$$

qui peut aussi être écrite comme suit:

$$(X) \qquad \varphi(a'_0, a'_1, \ldots a'_n; x - \lambda y, y) = \varphi(a_0, a_1, \ldots a_n; x, y).$$

De même, en fesant

$$(a_0, a_1, \ldots a_n)(x, \mu x + y)^n = (a'_0, a'_1, \ldots a'_n)(x, y)^n,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} a_n' &= a_n, \\ a_{n-1}' &= a_{n-1} + \mu a_n, \\ a_{n-2}' &= a_{n-2} + 2\mu a_{n-1} + a_n, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

le *covariant* φ doit satisfaire aussi à l'équation

$$(Y) \qquad \varphi(a_0', a_1', \ldots a_n'; x, -\mu x + y) = \varphi(a_0, a_1, \ldots a_n; x, y);$$

et récipoquement, toute fonction φ homogène par rapport aux coefficients et aussi par rapport aux variables, qui satisfait à ces équations (X, Y), sera un *covariant* de la fonction donnée.

Éxaminons d'abord l'équation (X) que je représente par $\varphi' = \varphi$. Soit pour le moment, $a_1' - a_1 = \lambda\alpha_1$, $a_2' - a_2 = \lambda\alpha_2$ etc. Alors on aura, comme à l'ordinaire, l'équation symbolique

$$\varphi' = e^{\lambda(\alpha_1\partial_{a_1} + \alpha_2\partial_{a_2} \ldots + \alpha_n\partial_{a_n} - y\partial_x)}\varphi,$$

où les quantités a_1, a_2 etc., en tant qu'elles entrent dans α_1, α_2 etc., ne doivent pas être affectées par les symboles ∂_{a_1}, ∂_{a_2} etc. de la différentiation. En substituant les valeurs de α_1, α_2, ... et en ordonnant selon les puissances de λ, cette équation donne

$$\varphi' = e^{\lambda\dot{\square} + \lambda^2\dot{\square}_1 \ldots + \lambda^n\dot{\square}_{n-1} - \lambda y\partial_x}\varphi,$$

où les symboles $\dot{\square}$, $\dot{\square}_1$ etc. sont données par

$$\begin{aligned} \dot{\square} &= a_0\partial_{a_1} + 2a_1\partial_{a_2} \cdots + na_{n-1}\partial_{a_n}, \\ \dot{\square}_1 &= a_0\partial_{a_2} + 3a_1\partial_{a_3} \cdots + \frac{n.n-1}{1.2}a_{n-2}\partial_{a_n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{\square}_{n-1} &= a_0\partial_{a_n}, \end{aligned}$$

et les quantités a_1, a_2 etc., en tant qu'elles entrent dans les symboles $\dot{\square}$, $\dot{\square}_1$ etc., ne doivent pas être affectées par les symboles ∂_{a_1}, ∂_{a_2} etc. de la différentiation. Il est assez remarquable que l'équation symbolique peut aussi être écrite sous la forme plus simple

$$\varphi' = e^{\lambda(\dot{\square} - y\partial_x)}\varphi,$$

où les quantités a_1, a_2, ..., en tant qu'elles entrent dans le symbole $\dot{\square}$, sont censées affectées des symboles ∂_{a_1}, ∂_{a_2} etc. de la différentiation; de manière que dans le développement, $\dot{\square}^2.\varphi$ par exemple, signifie $\dot{\square}.\dot{\square}\varphi$, et ainsi de suite. Je ne m'arrête pas sur ce point, parceque pour ce que je vais démontrer

de plus important, il suffit de faire attention à la ***première*** puissance de λ. D'ailleurs l'intelligibilité des équations dont il s'agit, sera facilitée en faisant les développements et en comparant les puissances correspondantes de λ. Cela donne par exemple:

$$\dot{\square}^2 = \dot{\square}^2 + 2\dot{\square}_1, \quad \dot{\square}^3 = \dot{\square}^3 + 3\dot{\square}\dot{\square}_1 + 6\dot{\square}_2, \text{ etc.}$$

où les symboles $\dot{\square}^2$, $\dot{\square}^3$ etc. à gauche de ces équations dénotent la double, triple etc. répétition de l'opération $\dot{\square}$, tandis qu'à côté droit des équations, les quantités $a_1, a_2, \ldots$ etc., en tant qu'elles entrent dans les symboles $\dot{\square}$, $\dot{\square}_1$ etc. sont censées non pas être affectées des symboles ∂_{a_1}, ∂_{a_2} etc. de la différentiation. Dans la suite, si le contraire n'est pas dit, je me servirai des expressions $\dot{\square}^2$, $\dot{\square}^3$ etc. pour dénoter les répétitions de l'opération, et de même pour les combinaisons de deux ou de plusieurs symboles.

Cela étant, l'équation $\varphi' = e^{\lambda(\dot{\square} - y\partial_x)}\varphi = \varphi$ donne

$$\varphi = \{1 + \lambda(\dot{\square} - y\partial_x) + \frac{\lambda^2}{1.2}(\dot{\square} - y\partial_x)^2 + \cdots\}\varphi,$$

où $(\dot{\square} - y\partial_x)^2.\varphi$ (je le repète) équivaut à $(\dot{\square} - y\partial_x).(\dot{\square} - y\partial_x)\varphi$; et ainsi de suite. Il faut d'abord que le coefficient de λ s'évanouisse, ce qui donne $(\dot{\square} - y\partial_x)\varphi = 0$; et cette condition étant satisfaite, les coefficients des puissances supérieures s'évanouissent d'elles mêmes; c'est à dire, l'équation (X) sera satisfaite en supposant que φ satisfait à l'équation aux différences partielles $(\dot{\square} - y\partial_x)\varphi = 0$.

En posant

$$\begin{aligned}
\dot{\square} &= a_n\partial_{a_{n-1}} + 2a_{n-1}\partial_{a_{n-2}} \cdots + na_1\partial_{a_0}, \\
\dot{\square}_1 &= a_n\partial_{a_{n-2}} + 3a_{n-1}\partial_{a_{n-3}} \cdots + \frac{n(n-1)}{1.2}a_2\partial_{a_0}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dot{\square}_{n-1} &= a_n\partial_{a_0},
\end{aligned}$$

on fera un raisonnement analogue par rapport à l'équation (Y); et il sera ainsi demontré que φ doit satisfaire aussi à l'équation à différences partielles $(\dot{\square} - x\partial_y)\varphi = 0$; donc enfin, on a le suivant

Théorème. Tout ***covariant*** φ de la fonction

$$(a_0, a_1, \ldots a_n)(x, y)^n,$$

satisfait aux deux équations à différences partielles

$$(A.) \quad (\dot{\square} - y\partial_x)\varphi = 0, \quad (\dot{\square} - x\partial_y)\varphi = 0,$$

où

$$\Box = a_0\partial_{a_1} + 2a_1\partial_{a_2} \cdots + na_{n-1}\partial_{a_n},$$
$$\dot{\Box} = na_1\partial_{a_0} + (n-1)a_2\partial_{a_1} \cdots + a_n\partial_{a_{n-1}}.$$

Et réciproquement toute fonction, homogène par rapport aux coefficients et par rapport aux variables, qui satisfait à ces équations, est un ***covariant*** de la fonction donnée.

Par exemple, *l'invariant* $\varphi = ac - b^2$ de la fonction $ax^2 + 2bxy + cy^2$ satisfait aux équations

$$(a\partial_b + 2b\partial_c)\varphi = 0, \quad (2b\partial_a + c\partial_b)\varphi = 0,$$

et le ***covariant*** $\varphi = (ac - b^2)x^2 + (a\partial - bc)xy + (b\partial - c^2)y^2$ de la fonction $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ satisfait aux équations

$$(a\partial_b + 2b\partial_c + 3c\partial_d - y\partial_x)\varphi = 0, \quad (3d\partial_c + 2c\partial_b + b\partial_a - x\partial_y)\varphi = 0.$$

Il est clair qu'en ne considérant que les fonctions qui restent les mêmes en prenant dans un ordre inverse les coefficients a_0, a_1, ... a_n et les variables x, y, respectivement, les ***covariants*** seront définis par l'une ou l'autre des équations (A), et qu'il n'est plus nécessaire de considérer les deux équations. Cela posé, on trouve assez facilement les ***covariants*** par la méthode des coefficients indéterminés. Mais il y a à remarquer une circonstance de la plus grande importance dans cette théorie, savoir, que l'on obtient de cette manière un nombre d'équations plus grand qu'il n'en faut pour déterminer les coefficients dont il s'agit. Ces équations cependant, étant liées entre elles, se réduisent au nombre nécessaire d'équations indépendentes.

Cherchons par exemple pour la fonction $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ un *invariant* φ de la forme

$$\varphi = Aa^2d^2 + Babcd + Cac^3 + Cb^3d + Db^2c^2,$$

contenant les quatre coefficients indéterminés A, B, C, D. En substituant dans l'équation $(a\partial_b + 2b\partial_c + 3c\partial_d)\varphi = 0$, on obtient

$$(3C + 2B)ab^2d + (3B + 6C + 2D)abc^2 + (6A + B)ac^2d + (3C + 4D)b^3c = 0.$$

Or les ***quatre*** équations données par cette condition, se réduisent à ***trois*** équations indépendantes, de sorte qu'en faisant par exemple $A = -1$, les autres coefficients seront déterminés, et l'on obtient le résultat connu:

$$\varphi = -a^2d^2 + 6abcd - 4ac^3 - 4b^3d + 3b^2c^2.$$

La circonstance mentionnée ci-dessus s'oppose à resoudre de la manière dont il s'agit, le problème de trouver le nombre des ***invariants*** d'un ordre donné: problème qui a toujours bravé mes efforts.

Avant d'entamer la solution des équations (***A***), je vais démontrer quelques propriétés générales des ***covariants,*** et des ***invariants.*** Pour abréger, je me servirai du mot „***pesanteur***", en disant que les coefficients a_0, a_1 etc. ont respectivement les ***pesanteurs*** $0-\frac{1}{2}n$, $1-\frac{1}{2}n$, etc. que les variables x, y ont respectivement les pesanteurs $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, et que la ***pesanteur*** d'un produit est égale à la somme des ***pesanteurs*** des facteurs. Cela posé, je dis que tout ***covariant*** est composé de termes dont chacun à la pesanteur ***zéro.*** Pour démontrer cela, j'écris:

$$(\dot{\square}-y\partial_x)(\dot{\square}-x\partial_y) = \dot{\square}\dot{\square}-y\partial_x\dot{\square}-x\partial_y\dot{\square}+xy\,\partial_x\partial_y+y\partial_y,$$
$$(\dot{\square}-x\partial_y)(\dot{\square}-y\partial_x) = \dot{\square}\dot{\square}-y\partial_x\dot{\square}-x\partial_y\dot{\square}+xy\,\partial_x\partial_y+x\partial_x.$$

Cela donne

$$(\dot{\square}-y\partial_x)(\dot{\square}-x\partial_y)-(\dot{\square}-x\partial_y)(\dot{\square}-y\partial_x) = \dot{\square}\dot{\square}-\dot{\square}\dot{\square}+y\partial_y-x\partial_x.$$

Or, en fesant attention aux valeurs de $\dot{\square}$, $\dot{\square}$, savoir

$$\dot{\square}\dot{\square} = (\dot{\square}\dot{\square})+na_0\partial_{a_0}+2(n-1)a_1\partial_{a_1}\cdots+n.1.a_{n-1}\partial_{a_{n-1}},$$
$$\dot{\square}\dot{\square} = (\dot{\square}\dot{\square})+\qquad\qquad n.1.a_1\partial_{a_1}\cdots+2(n-1)a_{n-1}\partial_{a_{n-1}}+1.na_n\partial_{a_n},$$

où, en formant les produits $(\dot{\square}\dot{\square})$, $(\dot{\square}\dot{\square})$, les quantités a_0, a_1, ... a_n sont censées non affectées par les symboles ∂_{a_0}, ∂_{a_1}, ... ∂_{a_n} de la différentiation, on en tire

$$\dot{\square}\dot{\square}-\dot{\square}\dot{\square} = n.a_0\partial_{a_0}+(n-2)a_1\partial_{a_1}\cdots-na_n\partial_{a_n}$$
$$= -2.\{(0-\tfrac{1}{2}n)a_0\partial_{a_0}+(1-\tfrac{1}{2}n)a_1\partial_{a_1}\cdots+(n-\tfrac{1}{2}n)a_n\partial_{a_n}\} = -2\Theta,$$

en représentant par Θ l'expression symbolique entre les crochets. Delà enfin on obtient:

$$(\dot{\square}-y\partial_x)(\dot{\square}-x\partial_y)-(\dot{\square}-x\partial_y)(\dot{\square}-y\partial_x) = -2(\Theta+\tfrac{1}{2}x\partial_x-\tfrac{1}{2}y\partial_y).$$

Or en supposant les deux parties de cette équation symbolique appliquées au ***covariant*** φ_1, la partie gauche de l'équation s'évanouit en vertu des équations (***A***) et l'équation se réduit à

$$(\boldsymbol{B}) \qquad (\Theta+\tfrac{1}{2}x\partial_x-\tfrac{1}{2}y\partial_y)\varphi = 0;$$

ce qui est une nouvelle équation à différences partielles, à laquelle satisfait le ***covariant*** φ. Or il est aisé de voir que cette équation exprime le théorème

énoncé ci-dessus, savoir que tout ***covariant*** est composé de termes de la pesanteur *zéro.*

Il suit de là, en considérant un ***covariant***

$$\varphi = (A_0, A_1, \ldots A_s)(x, y)^s$$

qu'un coefficient quelconque A_i aura la pesanteur $i - \frac{1}{2}s$, ou bien que les *pesanteurs* forment une progression arithmétique aux différences 1, et dont les termes extrêmes sont $-\frac{1}{2}s$, $+\frac{1}{2}s$.

Substituons maintenant cette valeur de φ dans les équations (A). La première équation donne d'abord:

$$(\alpha) \qquad \Box A_0 = 0,\ \Box A_1 = A_0,\ \Box A_2 = 2A_1,\ \ldots\ \Box A_s = sA_{s-1}.$$

Cela est un système qui équivaut aux deux équations

$$(\alpha') \qquad \Box^s . A_s = 0, \quad \varphi = y^s . e^{\Box \frac{x}{y}} . A_s.$$

De même, la seconde équation donne

$$(\beta) \qquad \dot{\Box} A_s = 0,\ \dot{\Box} A_{s-1} = A_s,\ \dot{\Box} A_{s-2} = 2A_{s-1},\ \ldots\ \dot{\Box} A_0 = sA_1:$$

système qui équivaut aux deux équations

$$(\beta') \qquad \dot{\Box}^{s+1} A_0 = 0, \quad \varphi = x^s e^{\dot{\Box} \frac{y}{x}} . A_0.$$

On voit que A_0 satisfait aux deux équations

$$(\gamma) \qquad \Box A_0 = 0, \quad \dot{\Box}^{s+1} A_0 = 0,$$

et en supposant que cette quantité soit connue, on trouve les autres coefficients $A_1, A_2, \ldots A_s$ par la seule différentiation, au moyen des équations (β). Or cela étant, je dis que les équations (α) seront satisfaites d'elles mêmes. En effet: des équations $\Box A_0 = 0$, $\dot{\Box} A_0 = sA_1$ on tire $\dot{\Box}\Box A_0 = 0$, $\Box\dot{\Box} A_0 = s\Box A_1$, et delà $(\dot{\Box}\Box - \Box\dot{\Box}) A_0 = -s\Box A_1$.

Or nous avons déjà vu que $\dot{\Box}\Box - \Box\dot{\Box} = 2\Theta$, et l'équation (B) donne $\Theta . A_0 + \frac{1}{2}s . A_0 = 0$: donc l'équation $(\dot{\Box}\Box - \Box\dot{\Box}) A_0 = -s\Box A_1$ se réduit à $A_0 = \Box A_1$: équation du système (α). De la même manière on obtient les autres équations de ce système. On peut dire que l'on aurait pû déterminer également le coefficient A_s au moyen des équations

$$(\delta) \qquad \dot{\Box} A_s = 0, \quad \Box^s . A_s = 0,$$

et delà les coefficients $A_{s-1}, \ldots A_0$ par les équations (α).

Prenons par exemple un *covariant* $(A_0, A_1, A_2)(x, y)^2$ de la fonction $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$. A_0 doit satisfaire aux deux équations

$$(a\partial_b + 2b\partial_c + 3c\partial_d) A_0 = 0, \quad (3b\partial_a + 2c\partial_b + d\partial_c)^3 A_0 = 0.$$

Ces équations sont en effet satisfaites en mettant $A_0 = ac - b^2$. On a donc les équations

$$2A = (3b\partial_a + 2c\partial_b + d\partial_c) A_0, \quad A_2 = (3b\partial_a + 2c\partial_b + d\partial_c) A_1$$

pour déterminer A_1, A_2; ce qui donne $2A_1 = a\partial - bc$, $A_2 = b\partial - c^2$, et on est conduit ainsi au *covariant* mentionné ci-dessus, savoir à

$$(ac - b^2)x^2 + (a\partial - bc)xy + (b\partial - c^2)y^2.$$

Soit maintenant

$$x^n \partial_{a_n} - x^{n-1} y \partial_{a_{n-1}}, \cdots \pm y^n . \partial_{a_0} = \Lambda,$$

on aura

$$\square \Lambda = (\square \Lambda), \quad \Lambda \square = (\Lambda \square) - y \frac{\partial \Lambda}{\partial x},$$

où dans $(\square \Lambda)$, $(\Lambda \square)$ les quantités a_0, a_1, ... sont censées non affectées par les symboles ∂_{a_1}, ∂_{a_2} etc., de la différentiation. Cela donne

$$\square \Lambda - \Lambda \square = y \frac{d\Lambda}{\partial x}.$$

Or $\partial_x \Lambda - \Lambda \partial_x = \frac{d\Lambda}{\partial x}$, donc:

$$(\square - y\partial_x) . \Lambda = \Lambda (\square - y \partial_x),$$

et de même:

$$(\dot{\square} - x\partial_y) \Lambda = \Lambda (\dot{\square} - x\partial_y).$$

Appliquons ces deux équations symboliques à un *covariant* φ. Les termes à droite s'évanouissent à cause des équations (A), et l'on obtient les deux équations

$$(\square - y\partial_x) \Lambda\varphi = 0, \quad (\dot{\square} - x\partial_y) \Lambda\varphi = 0,$$

c'est à dire: $\Lambda\varphi$ sera aussi un *covariant* de la fonction donnée. Par exemple de *l'invariant*

$$\varphi = -a^2 d^2 + 6abcd - 4ac^3 - 4b^3 d + 3b^2 c^2,$$

on tire le *covariant*

$$(x^3 \partial_d - x^2 y \partial_c + xy^2 \partial_b - y^3 \partial_a) \varphi;$$

savoir :

$$\begin{aligned}&(-a^2d+3abc-2b^3)x^3\\&-3.(ab\partial-2ac^2+b^2c)x^2y\\&+3.(acd-2b^2\partial+bc^2)xy^2\\&-(-a\partial^2+3ac\partial-2c^3)y^3;\end{aligned}$$

résultat déjà connu.

Essayons maintenant à intégrer les équations (*A*); savoir :

$$(\dot{\square}-y\partial_x)\varphi=0,\quad(\dot{\square}-x\partial_y)\varphi=0.$$

Pour intégrer la première, je reviens à une notation dont je me suis déjà servi dans ce mémoire et j'écris

$$\begin{aligned}a'_0&=a_0,\\a'_1&=a_1+\lambda a_0,\\a'_2&=a_2+2\lambda a_1+\lambda^2 a_0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a'_n&=a_n+n\lambda a_{n-1}\cdots+\lambda^n a_0.\end{aligned}$$

En faisant $\lambda=-\frac{a_1}{a_0}$, ce qui donne $a'_0=0$, on voit sans peine que l'on satisfera à l'équation, en mettant pour φ une fonction quelconque des quantités $a'_0, a'_0, \ldots a'_n, x+\lambda y, y$; le nombre de ces quantités étant $n+2$. Et cela est la solution générale de l'équation.

Ce résultat doit être substituée dans la seconde équation, savoir dans $(\dot{\square}-x\partial_y)\varphi=0$. Pour cela, imaginons que les quantités $a_0, a_1, \ldots a_n, x, y$ soient exprimées en fonction de $a'_0, a'_2, \ldots a'_n, x, y$ et a_1, puisque φ est fonction des seules quantités $a'_0, a'_2, \ldots a'_n, x, y$. L'équation résultante doit être satisfaite, quelle que soit la valeur de a_1. Or on trouve que cette équation résultante a la forme $L+Ma_1=0$: donc il faut qu'on aie à la fois les deux équations $L=0$, $M=0$. (Je renvois à une note les détails de la réduction.) En dernière analyse, et en remettant dans les équations $L=0$, $M=0$ les quantités $a_0, a_2, \ldots a_n$ au lieu de $a'_0, a'_2, \ldots a'_n$, je trouve les résultats suivants très simples, savoir, en écrivant

$$\begin{aligned}\overline{\Theta}&=(0-\tfrac{1}{2}n)a_0\partial_{a_0}+(2-\tfrac{1}{2}n)a_2\partial_{a_2}+(3-\tfrac{1}{2}n)a_3\partial_{a_3}\cdots+(n-\tfrac{1}{2}n)a_n\partial_{a_n}:\\\cdot\dot{\square}&=3a_2\partial_{a_3}+4a_3\partial_{a_4}\cdots+na_{n-1}\partial_{a_n},\\\cdot\dot{\square}&=(n-2)a_3\partial_{a_2}+(n-3)a_4\partial_{a_3}\cdots+a_n\partial_{a_{n-1}}.\end{aligned}$$

Les équations dont il s'agit sont

$$(C) \quad \{(n-1)a_2(\cdot\square - y\partial_x) - a_0(\cdot\dot{\square} - x\partial_y)\}\overline{\varphi} = 0,$$

$$(D) \quad (\overline{\Theta} + \tfrac{1}{2}x\partial_x - \tfrac{1}{2}y\partial_y)\overline{\varphi} = 0,$$

et il y a à remarquer qu'on obtient l'équation (C) en éliminant entre les équations (A) le terme $\partial_{a_1}\varphi$; et puis, en mettant $a_1 = 0$, on tire l'équation (D) de l'équation (B), en mettant de même $a_1 = 0$. Il y a à remarquer aussi que la fonction $\overline{\varphi}$ qui satisfait aux équations (C, D), est ce que devient un *covariant* quelconque φ, en y mettant $a_1 = 0$. On obtient d'abord la valeur générale en changeant $a_0, a_2, \ldots a_n$ en $a'_0, a'_2, \ldots a'_n$, et en mettant après pour ces quantités leurs valeurs en termes de $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$. La solution du problème des *covariants* serait donc effectuée si l'on pourrait intégrer les équations (C, D).

Or la quantité a_0 entre dans l'équation (C) comme constante, et l'on voit sans peine que cette équation pourra être intégrée en mettant $a_0 = 1$; puis, en écrivant dans le résultat $\frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}, \ldots \frac{a_n}{a_0}$ au lieu de $a_2, a_3, \ldots a_n$, et en multipliant par une puissance quelconque de a_0. Le résultat ainsi obtenu, serait composé de termes de la même *pesanteur;* et en choisissant convenablement la puissance de a_0, on pourrait faire en sorte que ces termes fûssent de la *pesanteur* zéro. Or l'équation (D) ne fait qu'exprimer que la fonction $\overline{\varphi}$ est composée de termes de la *pesanteur* zéro; le résultat obtenu de la manière dont il s'agit, satisferait donc par lui même à l'équation (D), et il est permis de ne faire attention qu'à l'équation (C). Dans la pratique on intégrera cette équation en ayant soin de faire en sorte que les solutions soient de la *pesanteur* zéro, ce qui peut être effectué en multipliant par une puissance convenablement choisie de a_0. Et puisqu'en fesant abstraction de cette quantité a_0, l'équation (C) contient $n+1$ quantités variables, savoir $a_2, a_3, \ldots a_n, x, y$, la fonction $\overline{\varphi}$ sera une fonction arbitraire de n quantités; et en supposant que cette fonction ne contienne pas les variables x, y (cas auquel $\overline{\varphi}$ serait ce que deviendrait un *invariant* quelconque en y mettant $a_1 = 0$), $\overline{\varphi}$ sera une fonction arbitraire de $n-2$ quantités.

La même chose sera évidemment vrai, si l'on retablit la valeur générale de a_1: donc tout *invariant* sera une fonction d'un nombre $n-2$ *d'invariants,* que l'on pourra prendre pour primitifs; et tout *covariant* sera une fonction de ces *invariants* primitifs de la fonction donnée (laquelle est évidemment un de ses propres *covariants*), et d'un autre *covariant* que l'on peut prendre

pour primitif. Cela ne prouve nullement (ce qui est néanmoins vrai pour les *invariants*, à ce que je crois) que tout invariant est une fonction rationnelle et intégrale de $n-2$ *invariants* convenablement choisis, et que tout *covariant* est une fonction rationnelle et intégrale (ce qui en effet n'est pas vrai) de ces *invariants*, de la fonction donnée et d'un *covariant* convenablement choisi.

Le cas $n=2$ fait dans cette théorie une exception. On sait qu'il existe dans ce cas un *invariant*, savoir $ac-b^2$ qui, selon la théorie générale, ne doit pas exister, et il n'existe pas de *covariant*, hormis la fonction donnée elle même. Or cette particularité, peut être aisement expliquée.

Le cas $n=3$ rentre, comme cela doit être, dans la théorie générale. En effet, il existe dans ce cas un *invariant*, savoir la fonction $-a^2d^2+6abc\partial$ $4ac^3-4b^3d+3b^2c^2$ ci-dessus trouvée, et tout *covariant* de la fonction peut être exprimé par cet *invariant* de la fonction donnée elle même, et par le *covariant* $(ac-b^2)x^2+(a\partial-bc)xy+(b\partial-c^2)y^2$ ci-dessus trouvé. Il en est ainsi par exemple par rapport au *covariant* de troisième ordre, par rapport aux variables et aux coefficients; car en représentant par Φ le *covariant* dont il s'agit, par W le *covariant* du second ordre, par u la fonction donnée $ax^3+3bx^2y+3cxy^2+\partial y^3$ et par ∇ *l'invariant*, on obtient l'équation identique $\Phi^2+\square u^2=-4W^3$. Je fais mention de cette équation, parceque je crois qu'elle n'est pas généralement connue.

Je vais donner maintenant quelques exemples des équations (*C* et *D*). Soit d'abord $n=3$, et supposons que $\overline{\Phi}$ ne contienne pas les variables x, y: $\overline{\Phi}$ sera une fonction de a, c, d, et les équations reviendront à

$$(6c^2\partial_d-a\partial\partial_c)\overline{\varphi}=0, \quad (-3a\partial_a+c\partial_c+3d\partial_d)\overline{\varphi}=0.$$

Les quantités ac^3, a^2d^2, dont chacune est de la pesanteur *zéro*, satisfont par là à la seconde équation, et en mettant $\overline{\varphi}=Aa^2d^2+Cac^3$, on obtient $4A-C=0$, en vertu de la première équation, ou en faisant $A=-1$. Cela donne $C=-4$; delà on tire $\overline{\varphi}=-a^2\partial^2-4ac^3$, et la solution générale est $\overline{\varphi}=F(-a^2\partial^2-4ac^3)$, F étant une fonction quelconque. La formule plus générale $\overline{\varphi}=F(a,-a^2\partial^2-4ac^3)$ satisferait sans doute à la première équation, mais pour que cette valeur satisfasse à la seconde équation, il faut que la quantité (a), en tant qu'elle n'est pas contenue dans $-a^2\partial^2-4ac^3$, disparaîsse. Ainsi la valeur donnée ci-dessus, savoir $\overline{\varphi}=F(-a^2\partial^2-4ac^3)$, est la solution la plus générale des deux équations.

Écrivons a, $c - \frac{b^2}{a}$, $d - \frac{3bc}{a} + \frac{2b^3}{a^2}$ au lieu de a, c, d, et φ au lieu de $\overline{\varphi}$, nous obtenons:

$$\varphi = F(-a^2d^2 + 6abc\partial - 4ac^3 - 4b^3d + 3b^2c^2);$$

ce qui est l'expression la plus générale des *invariants* de la fonction $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + y^3$, et l'on voit que tous ces *invariants* sont fonctions d'une seule quantité que nous avons prise ci-dessus pour *l'invariant* de la fonction de troisième ordre dont il s'agit.

Soit encore $n = 4$, $\overline{\varphi}$ sera une fonction de a, c, d, e qui satisfait aux équations

$$\{2a\partial\partial_c + (ae - 9c^2)\partial_d - 12c\partial\partial_e\}\overline{\Phi} = 0,$$
$$\{-2a\partial_a + d\partial_d + 2e\partial_e\}\overline{\Phi} = 0,$$

dont la solution générale est $\overline{\Phi} = F(ae + 3c^2, ace - ad^2 - c^3)$, F étant une fonction quelconque. On voit par là qu'il n'existe que les *invariants* indépendants $ae - 4bd + 3c^2$, $ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3$. Ce résultat est connu depuis longtemps.

Soit enfin $n = 5$, $\overline{\varphi}$ sera une fonction de a, c, d, e, f qui satisfait aux équations

$$\{3ad\partial_c + (2ae - 12c^2)\partial_d + (af - 16cd)\partial_e - 20ce\partial_f\}\overline{\varphi} = 0,$$
$$\{-\tfrac{5}{2}a\partial_a - \tfrac{1}{2}c\partial_c + \tfrac{1}{2}d\partial_d + \tfrac{3}{2}e\partial_e + \tfrac{5}{2}f\partial_f\}\overline{\varphi} = 0.$$

On sait qu'il y en a une solution de quatrième ordre par rapport aux quantités a, c, d, e, f; et en prenant la fonction la plus générale dont les termes ont la *pesanteur* zéro, on aura:

$$\overline{\varphi} = Aa^2f^2 + Bacdf + Cace^2 + Dad^2e + Ec^3e + Fc^2d^2:$$

fonction qui satisfait d'elle même à la seconde équation. En substituant cette valeur dans la première équation, on trouvera que les coefficients A, B etc. doivent satisfaire à ces *sept* équations:

$$2B + 2C - 40A = 0,\quad 3B + D = 0,\quad 3C + 4D = 0,\quad -12B + E = 0,$$
$$9E - 24D + 4F - 32C - 20B = 0,\quad 6F - 16D = 0,\quad -24F - 16E = 0,$$

qui se réduisent cependant (ce que l'on n'aurait pas facilement deviné par la forme des équations) à *cinq* équations indépendantes. En faisant donc $A = 1$, on trouve aisément les autres coefficients B, C etc. et on obtient ainsi:

$$\overline{\varphi} = a^2f^2 + 4acdf + 16ace^2 - 12ad^2e + 48c^3e - 32c^2d^2:$$

valeur qui peut être tirée d'une formule presentée dans mon mémoire sur les *hyperdéterminants*, en y fesant $b = 0$.

J'ai donné cet exemple pour faire voir qu'il serait impossible de déduire du nombre supposé connu des coefficients indéterminés qui correspondent à un ordre donné, le nombre des ***invariants*** de ce même ordre. Il est donc inutile de pousser plus loin cette discussion.

Note I sur l'intégration des équations (*A*).

En écrivant comme ci-dessus:

$$\dot{\square} = a_0\partial_{a_1} + 2a_1\partial_{a_2} \ldots + na_{n-1}\partial_{a_n},$$
$$\dot{\square} = na_1\partial_{a_0} + (n-1)a_2\partial_{a_1} \ldots + a_n\partial_{a_{n-1}},$$

il s'agit de trouver une quantité φ, fonction de a_0, a_1, $\ldots$ a_n, x et y qui satisfasse à la fois aux équations

$$(\dot{\square} - y\partial_x)\varphi = 0,$$
$$(\dot{\square} - x\partial_y)\varphi = 0.$$

Pour intégrer ces équations, j'écris, comme plus haut:

$$a'_0 = a_0,$$
$$a'_1 = a_1 + \lambda a_0,$$
$$a'_2 = a_2 + 2\lambda a_1 + \lambda^2 a_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a'_n = a_n + n\lambda a_{n-1} \ldots + \lambda^n a_0,$$

et aussi $x' = x - \lambda y$, $y' = y$. Cela posé, je fais remarquer d'abord que $\frac{da'_1}{d\lambda} = a'_0$, $\frac{da'_2}{d\lambda} = 2a'_1$, et ainsi de suite. En considérant λ comme fonction quelconque de a_0, a_1, $\ldots$ a_n, et en supposant que φ soit une fonction de a'_0, a'_1, $\ldots$ a'_n, x', y', on parvient assez facilement à l'équation identique $(\dot{\square} - y\partial_x)\varphi = (1 + \dot{\square}\lambda)(\dot{\square}' - y'\partial_{x'})\varphi$, où $\dot{\square}'$ est ce que devient $\dot{\square}$, en y écrivant a'_0, a'_1, $\ldots$ a'_n au lieu de a_0, a_1, $\ldots$ a_n.

Nous pouvons donc satisfaire à la première équation, en déterminant λ au moyen de $1 + \dot{\square}\lambda = 0$: équation qui serait satisfaite en écrivant $\lambda = -\frac{a_1}{a_0}$, ou, si l'on veut, en déterminant λ par $a'_1 = 0$. Donc, en supposant toujours que λ ait cette valeur, φ sera une fonction quelconque de a'_0, a'_2, $\ldots$ a'_n, x', y', c'est à dire d'un nombre $n+2$ de quantités. Ce sera donc là (comme l'on aurait pû facilement la prévoir), la solution générale de la première équation. Or en considérant φ comme fonction de a'_0, a'_2, $\ldots$ a'_n; x', y', ou, si l'on veut, de a'_0, a'_1, a'_2, $\ldots$ a'_n; x', y' (où $a'_1 = a_1 + \lambda a_0 = 0$), et en substituant cette

valeur dans l'équation $(\dot{\square} - x\partial_y)\varphi = 0$, on voit d'adord que la variation de la quantité λ fournit au résultat le terme

$$\left(na_1\frac{d\lambda}{da_0} + (n-1)a_2\frac{d\lambda}{da_1}\right)(\dot{\square}' - y'\partial_{x'})\varphi;$$

et puisque $na_1\frac{d\lambda}{da_0} + (n-1)a_2\frac{d\lambda}{da_1}$ se réduit à $n\frac{a_1^2}{a_0^2} - (n-1)\frac{a_0 a_2}{a_0^2}$, ou enfin à $\lambda^2 - \frac{(n-1)a_2'}{a_0}$, ce terme devient

$$\left(\lambda^2 - \frac{(n-1)a_2'}{a_0}\right)(\dot{\square}' - y'\partial_{x'}).$$

Le terme $-x'\partial_y.\varphi$ se réduit à $-(x' + \lambda y')(-\lambda\partial_{x'} + \partial_{y'})\varphi$, savoir à

$$(-x'\partial_{y'} + \lambda^2 y'\partial_{x'} + \lambda x'\partial_{x'} - \lambda y'\partial_{y'})\varphi,$$

et en mettant pour un moment

$$\begin{aligned} M = \quad & na_1(\partial_{a_0'} + \lambda\partial_{a_1'} \ldots\ldots + \lambda^n.\partial_{a_n'}) \\ & + (n-1)a_2(\quad \partial_{a_1'} \ldots\ldots + n\lambda^{n-1}.\partial_{a_n'}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_n(\quad\quad\quad \partial_{a_{n-1}'} + n\lambda.\partial_{a_n'}), \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} (\dot{\square} - x\partial_y)\varphi = \; & M\varphi + \left(\lambda^2 - \frac{(n-1)a_2'}{a_0}\right)(\dot{\square}' - y'\partial_{x'})\varphi \\ & + (-x'\partial_{y'} + \lambda^2 y'\partial_{x'} + \lambda x'\partial_{x'} - \lambda y'\partial_{y'})\varphi, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} (\dot{\square} - x\partial_y)\varphi = \; & (M - x'\partial_{y'})\varphi + \lambda^2\dot{\square}'\varphi \\ & - \frac{(n-1)a_2'}{a_0'}(\dot{\square}' - y'\partial_{x'})\varphi + \lambda(x'\partial_{x'} - y'\partial_{y'})\varphi. \end{aligned}$$

Or en supposant que $\dot{\square}'$ est ce que devient $\dot{\square}$ en y écrivant $a_0', a_1', \ldots a_n'$ au lieu de $a_0, a_1, \ldots a_n$, et en posant

$$\Theta' = (0 - \tfrac{1}{2}n)a_0'\partial_{a_0'} + (1 - \tfrac{1}{2}n)a_1'\partial_{a_1'} + \cdots (n - \tfrac{1}{2}n)a_n'\partial_{a_n'},$$

on obtient, après avoir fait une réduction un peut penible:

$$M\varphi + \lambda^2\dot{\square}'\varphi = \dot{\square}'\varphi + 2\lambda\Theta'\varphi.$$

(En effet les coefficients de $\partial_{a_0'}\varphi$, $\partial_{a_1'}\varphi$ etc. aux deux côtés de cette équation. deviennent les mêmes après des reductions convenables.) Donc enfin on a

$$(\dot{\square} - x\partial_y)\varphi = (\dot{\square}' - x'\partial_{y'})\varphi - \frac{(n-1)a_2'}{a_0'}(\dot{\square}' - y'\partial_{x'})\varphi + 2\lambda(\Theta' + \tfrac{1}{2}x'\partial_{x'} - \tfrac{1}{2}y'\partial_{y'})\varphi = 0,$$

ou bien, puisque cette équation doit être satisfaite indépendamment de la quan-

tité λ (qui seul contient a_1), elle est décomposée dans les deux équations

$$\{a_0'(\dot{\square}' - x'\partial_{y'}) - (n-1)a_2'(\square' - y'\partial_{x'})\}\varphi = 0,$$
$$\{\Theta' + \tfrac{1}{2}x'\partial_{x'} - \tfrac{1}{2}y'\partial_{y'}\}\varphi = 0,$$

qui, en y mettant d'abord $a_1' = 0$, puis en rémettant a_0, a_2, ... a_n, x, y au lieu de a_0', a_2', ... a_n, x', y', et en écrivant $\overline{\varphi}$, $\overline{\Theta}$, $\cdot\square$, $\cdot\dot{\square}$ au lieu de φ, Θ, $\square$, $\dot{\square}$, donnent en effet les équations (***C***, ***D***) dont je me suis servi dans le texte.

Note 2.

Je vais résumer dans cette note quelques formules qui feront voir la liaison qui existe entre les ***invariants*** d'une fonction de ***n***ième ordre et de la fonction de $(n-1)$ième ordre que l'on obtient en réduisant à zéro le coefficient de y^n, et en supprimant le facteur x.

Il convient pour cela de considérer une fonction telle que

$$(a_0, a_1, \ldots a_n)(x, y)_n = a_0x^n + a_1x^{n-1}y \ldots + a_ny^n,$$

dans laquelle n'entrent plus les coefficients numériques du binome $(1+x)^n$.

Écrivons

$$(a_0, a_1, \ldots a_n)(x, y)_n = a_0(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \ldots (x - \alpha_n y).$$

Je tâche d'abord à représenter les ***invariants*** au moyen des racines α_1, α_2, ... α_n, et j'etends pour le moment le terme ***invariant*** à toute fonction symétrique, ou non, des racines qui ait la propriété caractéristique des ***invariants:*** fonctions qui jusqu'ici ont été considérées tacitement comme rationnelles par rapport aux coefficients.

Mettons d'abord

$$\nabla = a_0^{2n-2}(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 - \alpha_3)^2 \ldots (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2.$$

Cette quantité ∇ qui, égalée à zéro, exprime l'égalité de deux racines, et que je vais desormais nommer le „***Discriminant***" de la fonction, sera une fonction rationnelle des coefficients, et d'un ***invariant*** proprement dit. Mais de plus, toute fonction telle que $(\alpha_1 - \alpha_2)^n(\alpha_1 - \alpha_3)^n$, ..., et dans laquelle la somme des indices des facteurs qui contiennent α_1; celle des indices des facteurs qui contiennent α_2 etc. sont égales, sera un ***invariant;*** et en réunissant ces fonctions, pour trouver une somme en fonction symétrique des racines, on obtiendra des ***invariants*** proprement dits. Cela soit dit en passant. Pour le moment il suffit

de prendre les invariants les plus simples, savoir ceux de la forme

$$\frac{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)},$$

qui en effet sont des rapports ***enharmoniques*** de quatre racines, prises à volonté. Soient Q_1, Q_2, ... Q_{n-3} la fonction qui vient d'être écrite et les fonctions que l'on en tire en mettant α_5, α_6, ... α_n au lieu de α_4. Les fonctions ∇, Q_1, Q_2, ... Q_{n-3} seront des ***invariants*** independants, et le nombre de ces ***invariants*** est $n-2$. Donc, tout autre ***invariant*** sera une fonction des quantités ∇, Q_1, Q_2, ... Q_{n-3}. Soit maintenant $a_n = 0$, et α_n la racine qui devient égale à zéro. Les quantités Q_1, Q_2, ... Q_{n-4} seront toujours des rapports ***enharmoniques*** de quatre racines de l'équation du $(n-1)$ième ordre. Il n'y aura que la seule quantité Q_{n-3} qui change de forme, et elle ne sera pas un ***invariant*** de la fonction du $(n-1)$ième ordre. On voit aussi d'abord que le ***discriminant*** ∇ se réduit à $a_{n-1}^2\nabla_0$, en exprimant par ∇_0 le ***discriminant*** de la fonction du $(n-1)$ième ordre. (C'est je crois M. ***Joachimsthal*** qui a le premier remarqué cette circonstance.) Donc, en supposant $a_n = 0$, ***l'invariant*** de la fonction du $n$ième ordre deviendra une fonction de $a_{n-1}^2\nabla_0$, Q_1, Q_2, ... Q_{n-4} et d'une quantité X qui n'est pas un ***invariant*** de la fonction de $(n-1)$ième ordre, mais qui sera toujours la même quel que soit l'invariant dont il s'agit. En considérant les ***invariants*** proprement dits de la fonction de $(n-1)$ième ordre, on peut former avec ces ***invariants*** des quotients I_1, I_2, ... I_{n-4} du degré zéro par rapport aux coefficients. Nous pouvons remplacer par ces quotients les quantités Q_1, Q_2, ... Q_{n-4}, et dire que ***l'invariant*** de la fonction de $n$ième ordre, en mettant $a_n = 0$, deviendra une fonction des quantités $a_{n-1}^2\nabla_0$, I_1, I_2, ... I_{n-4} et X.

Ces théorèmes auront, je crois, quelque utilité pour les recherches ultérieures. Je les laisse à côté maintenant, et veux présenter une méthode assez simple pour calculer les ***discriminants***.

Pour cela je remarque que les équations (A) en changeant, comme nous venons de le faire, les valeurs des coefficients, donnent pour les *invariants:*

$$(na_0\partial_{a_1} + (n-1)a_1\partial_{a_2} \cdots + a_{n-1}\partial_{a_n})\varphi = 0.$$

$$(a_1\partial_{a_0} + 2a_2\partial_{a_1} \cdots + na_n\partial_{a_{n-1}})\varphi = 0;$$

et ces équations seront satisfaites en mettant pour φ le ***discriminant*** ∇. Or pour $a_n = 0$, la fonction ∇ devient $a_{n-1}^2\nabla_0$, ou, si l'on veut, $-a_{n-1}^2\nabla_0$; donc

∇ sera généralement de la forme

$$\nabla = -a_{n-1}^2 \nabla_0 + Ba_n + Ca_n^2 + \cdots,$$

où a_n^{n-1} est la puissance la plus élevée de a_n. Donc, en supposant que ∇_0 soit connu, et en mettant la première des équations écrites ci-dessus sous la forme $(F + a_{n-1}\partial_{a_n})\nabla = 0$, où $F = na_0\partial_{a_1} + (n-1)a_1\partial_{a_2} \cdots + 2a_{n-2}\partial_{a_{n-1}}$, on obtiendra par la seule différentiation les coefficients B, C etc. En effet, cette équation donne

$$a_{n-1}B = F(a_{n-1}^2\nabla_0), \quad 2a_{n-1}C = -F(B), \quad 3a_{n-1}D = -F(C);$$

et ainsi de suite.

Soit par exemple $n-3$, et considérons la fonction de troisième ordre $\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3$. Le ***discriminant*** de $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ sera $4\alpha\gamma - \beta^2$. Nous avons donc

$$\nabla = -\gamma^2(4\alpha\gamma - \beta^2) + B\delta + C\delta^2,$$

et en mettant $F = 3\alpha\partial_\beta + 2\beta\partial_\gamma$: B, C seront donnés par

$$\gamma B = F(4\alpha\gamma^3 - \beta^2\gamma^2), \quad 2\gamma C = -F(B),$$

c'est à dire $B = 1\delta\alpha\beta\gamma - 4\beta^3$, $C = -27\alpha^2$, et de là:

$$\nabla = -27\alpha^2\delta^2 + 18\alpha\beta\gamma\delta - 4\alpha\gamma^3 - 4\beta^3\delta + \beta^2\gamma^2:$$

valeur qui correspond en effet à la forme ordinaire

$$\nabla = -a^2\partial^2 + 6abc\partial - 4ac^3 - 4b^3d + 3b^2c^2,$$

en changeant d'une manière convenable les coefficients.

Londres, Stone Buildings, 23 Févr. 1852.

5.

Das elliptische Potential.

(Von Herrn Dr. *M. G. von Paucker,* b. Secr. der kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst, corr. Mitgliede der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg.)

(Diese, der Kaiserlichen Universität zu Dorpat bei der Jubelfeier ihres funfzigjährigen Wirkens am $^{12}/_{24}$. December 1852 mit dem Glückwunsch der kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst überreichte Schrift ist nicht in den Buchhandel gekommen, sondern sind nur wenige Exemplare davon abgezogen und diese sämmtlich von dem Herrn Verfasser verschenkt worden Sie erscheint, mit dessen Erlaubnifs, hier.)

Die *Mécanique céleste* hat ein sinnreiches Verfahren gezeigt, Kräfte, die im umgekehrten Verhältnifs des Quadrats der Entfernung wirken, aus einem durch Integration bestimmten *Anziehungspotential* mittels Differentiirung zu finden. (Siehe Livre II. 11 und Livre III. 4.)

Sowohl *Laplace* selbst, als spätere Mathematiker, haben das Anziehungspotential vielfältig untersucht. Auf diese Theorie hier näher einzugehen wird nicht beabsichtigt. Es sollen nur einige eigenthümliche Umbildungen mitgetheilt werden: einzelne Werkstücke eines Systems auf einem vielleicht neuen Felde.

Nur die hauptsächlichsten Beziehungen sind ausgehoben. Das Bedürfnifs der Kürze machte es rathsam, Alles zu unterdrücken, was einer weitern Ausführung angehört, und was der Leser selbst einschalten mag.

Der Ausdruck, den das Anziehungspotential *vor* der Integration hat, heifst das *geometrische Potential.* Dieses ist entweder ein *lineäres,* welches dem *Dreieck,* oder ein *elliptisches,* welches dem *Kegelschnitt* entspricht. Derjenige Theil des Potentials, welcher sich blofs auf den Winkel bezieht, heifst das *Indicial.* Dieses ist also ebenfalls, entweder lineär, oder elliptisch.

Ein im September d. J. der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg vorgelegter Aufsatz zeigt die Entwickelung des lineären Potentials nach Indicialen. Diese Reihe ist ausreichend, um die Anziehung des Erdsphäroïds zu bestimmen.

Hier wird zunächst diese erste Entwickelung kurz berührt werden. Daran wird eine zweite Entwickelung geknüpft werden, welche nach Potenzen

der Seite fortschreitet. Man steigt so von dem ***einfachen*** Indicial zu dem allgemeinen lineären Indicial hinauf.

Die Bestimmung der Axen eines Kegelschnitts führt auf das ***elliptische*** Potential und Indicial. Einige Eigenschaften desselben werden angezeigt werden.

Als Anwendung wird die Aufgabe gestellt werden, die Anziehung eines gleichmäfsig dichten Ellipsoïds auf einen äufsern Ort, aus der Oberflächen-Anziehung herzuleiten. Man sieht hier, wie die Sätze von ***Maclaurin***, ***Laplace*** und ***Ivory*** auf einem beträchtlichen Umwege zu demselben einfachen Ausdruck führen, welcher in dem obengedachten Aufsatz durch ein anderes, nicht nur kürzeres, sondern auch allgemeineres Verfahren ermittelt worden ist.

In einem Dreieck sei die feste Seite $= 1$, die bewegliche und veränderliche Seite $= r$, der Winkel zwischen den Seiten $= \psi$, $\cos\psi = c$, $\sin\psi = c'$; die Gegenseite von ψ sei $= e$.

Die Einrichtung läfst sich immer so treffen, dafs r ein echter Bruch ist. Man hat alsdann:

$$c^2 + c'^2 = 1, \qquad r^2 + r'^2 = 1,$$
$$e^2 = 1 - 2cr + r^2.$$

In Bezug auf c ist

$$\text{Das einfache } \textit{Indicial} = \widehat{c},$$
$$\text{Das einfache } \textit{Subindicial} = \dot{c},$$
$$x\,\dot{c}_{x-1} = \frac{d\widehat{c_x}}{dc},$$
$$x(x+1)\,\widehat{c_x} - 2c\frac{d\widehat{c_x}}{dc} + c'^2\frac{d^2\widehat{c_x}}{dc^2} = 0,$$
$$x(x+3)\,\dot{c}_x - 4c\frac{d\dot{c}_x}{dc} + c'^2\frac{d^2\dot{c}_x}{dc^2} = 0.$$

Die Entwickelung des lineären Potentials P nach Indicialen ist

$$P = e^n = k_0 - w_1 k_1 \widehat{c_1} + w_2 k_2 \widehat{c_2} \ldots$$

Die Gröfsen k enthalten blofs die Seite r, und heifsen daher ***Potentialseiten***. Es ist

$$A = 2r\left\{\frac{dP}{dr}\right\} + r^2\left\{\frac{d^2P}{dr^2}\right\} - 2c\left\{\frac{dP}{dc}\right\} + c'^2\left\{\frac{d^2P}{dc^2}\right\},$$
$$B = nr^2P - 2r^3\left\{\frac{dP}{dr}\right\},$$
$$Ar'^2 - (n+1)B = 0,$$

$$[x(x+1)+(n-x)(n+x+1)r^2]k_x$$
$$-(2r+2nr^3)\frac{dk_x}{dr}-r^2r'^2\frac{d^2k_x}{dr^2}=0,$$
$$k_x=\mathfrak{p}_0r^x+\mathfrak{p}_2r^{x+2}\ldots\mathfrak{p}_yr^{x+y}+\mathfrak{p}_{y+2}r^{x+y+2}\ldots$$
$$(2x+y-n)(n+1-y)\mathfrak{p}_y+(y+2)(y+2x+3)\mathfrak{p}_{y+2}=0.$$

Für $n=-1$ oder für positive n ist k ein geschlossener Ausdruck, dessen Glieder-Anzahl $=\frac{1}{2}(n+3)$ ist.

Für $n=-3$ oder n gröfser als -3 ist k eine unendliche Reihe, welche durch Multiplication mit einer Potenz von r' zu einem geschlossenen Ausdruck wird. Es ist

$$Q=\frac{r'^{2m-4}}{c^m},$$
$$A=2r\left\{\frac{dQ}{dr}\right\}+r^2\left\{\frac{d^2Q}{dr^2}\right\}-2c\left\{\frac{dQ}{dc}\right\}+c'^2\left\{\frac{d^2Q}{dc^2}\right\},$$
$$B=(m-4)r^2Q-2r^3\left\{\frac{dQ}{dr}\right\},$$
$$Ar'^2-(m-3)B=0.$$

Diese Gleichung stimmt mit der obigen für P, wenn $m-n=4$ ist. Es sei also

$$Q=l_0-w_1l_1\widehat{c}_1+w_2l_2\widehat{c}_2\ldots,$$

so ergiebt sich für die Potentialseite l ein geschlossener Ausdruck für $m=$ oder >3.

Entwickelung des lineären Potentials P nach der Dreiecksseite r.

$$r^2\left\{\frac{d^2P}{dr^2}\right\}+c'^2\left\{\frac{d^2P}{dc^2}\right\}-(n-1)r\left\{\frac{dP}{dr}\right\}+(n-1)c\left\{\frac{dP}{dc}\right\}=0,$$
$$\tfrac{1}{2}n=v,\quad \overset{x}{v}=\frac{v(v-1)\ldots(v+1-x)}{1\ldots2\ldots x},$$
$$2^x.\overset{x}{v}=w_x,$$
$$P=1-w_1\widehat{C}_1r+w_2\widehat{C}_2r^2\ldots.$$

Das lineäre Indicial $\widehat{C}$ ist blofs von c abhängig.

$$\widehat{C}_x=q_0+q_2c^2\cdots+q_yc^y+q_{y+2}c^{y+2}\cdots+c^x,$$
$$x(x-n)\widehat{C}_x+(n-1)c\frac{d\widehat{C}_x}{dc}+c'^2\frac{d^2\widehat{C}_x}{dc}=0,$$
$$(x-y)(x+y-n)q_y+(y+1)(y+2)q_{y+2}=0,$$
$$\widehat{C}_x^{(-1)}=\widehat{c}_x,\quad \widehat{C}_x^{(-3)}=\overset{*}{c}_x;$$

d. h. das lineäre Indicial verwandelt sich für $n = -1$ in das einfache Indicial. und für $n = -3$ in das einfache Subindicial.

In diesen beiden Fällen ist also:

$$\frac{1}{c} = 1 + \frac{1}{1}\widehat{c}_1 r + \frac{1.3}{1.2}\widehat{c}_2 r^2 + \frac{1.3.5}{1.2.3}\widehat{c}_3 r^3 \ \ldots,$$

$$\frac{1}{c^3} = 1 + \frac{3}{1}\dot{c}_1 r + \frac{3.5}{1.2}\dot{c}_2 r^2 + \frac{3.5.7}{1.2.3}\dot{c}_3 r^3 \ \ldots.$$

Der obengedachte Aufsatz giebt die Coëfficienten von $\widehat{c}_x$ und $\dot{c}_x$ für alle x, bis $x = 13$.

Für ein positives n ist für alle Glieder, deren Zeiger x gleich oder gröfser als $n+1$ sind, das lineäre Indicial $\widehat{C}_x$ durch c'^{n+1} theilbar. Der Quotient $\widehat{D}_x$ ist ebenfalls ein lineäres Indicial, und zwar dasjenige, welches dem negativen Exponenten $-(n+2)$ entspricht. Mit gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen ist:

$$e^n = 1 - w_1\widehat{C}_1 r + w_2\widehat{C}_2 r^2 \ \ldots \ \mp w_n\widehat{C}_n r^n$$
$$\mp w_{n+1}c'^{n+1}r^{n+1} \pm w_{n+2}c'^{n+2}\widehat{D}_1 r^{n+2} \ \ldots,$$
$$-\tfrac{1}{2}(n+2) = \mathfrak{v}, \quad 2^x\overset{x}{\mathfrak{v}} = \mathfrak{w}_x,$$
$$\frac{1}{e^{n+2}} = 1 - \mathfrak{w}_1\widehat{D}_1 r + \mathfrak{w}_2\widehat{D}_2 r^2 \ \ldots,$$
$$\pm\frac{C^{(n)}_{n+x+1}}{c'^{n+1}} = \widehat{D}^{(n+2)}_x = \widehat{C}^{-(n+2)}_x;$$

$$\text{Z. B.} \quad -\frac{\widehat{C}^{(5)}_{10}}{c'^6} = \widehat{D}^{(7)}_4 = \widehat{C}^{-(7)}_4 = \frac{3}{143} - \frac{6}{13}c^2 + c^4,$$

$$-\frac{\widehat{C}^{(5)}_{11}}{c'^6} = \widehat{D}^{(7)}_5 = \widehat{C}^{-(7)}_5 = \frac{11}{143}c - \frac{2}{3}c^3 + c^5.$$

Von einer Ellipse seien M die Mitte, O ein Ort des Umfanges, $MO = r$ der Halbmesser, F und F_1 die beiden Brennpuncte, $MF = MF_1 = f$ die Brennweite, $FO = \varrho$ und $F_1O = \varrho_1$ die beiden Leitstrahlen, der Winkel $FMO = \psi$, $\cos\psi = c$, $\sin\psi = c'$.

Die Normallinie der Ellipse hälftet den Winkel FOF_1 und trifft die grofse Axe in D. Um D sei ein Kreis beschrieben, welcher den Halbmesser MO berührt. Aus M und O seien an diesen Kreis Berührende gezogen, welche in G zusammentreffen. Der Kreis D ist also dem Dreieck MOG eingeschrieben. Ein dem Dreieck FOF_1 umschriebener Kreis geht durch G. Die

Seiten des Dreiecks MOG sind:

$$MO = r, \quad OG = q, \quad MG = g = \frac{ff}{r},$$

$$q^2 = r^2 - 2dgr + g^2, \quad d = \cos 2\psi = 1 - 2c^2.$$

Die beiden Halb-Axen seien a und b, so ist:

$$2\frac{a^2}{r} = r + q + g,$$

$$2\frac{b^2}{r} = r + q - g,$$

$$\varrho^2 = r^2 - 2crf + f^2, \quad \varrho_1^2 = r^2 + 2crf + f^2,$$

$$\frac{f}{r} = s, \quad \frac{a}{r} = t, \quad \frac{b}{r} = u, \quad \frac{\varrho}{r} = e, \quad \frac{\varrho_1}{r} = e_1, \quad \frac{q}{r} = E,$$

$$e^2 = 1 - 2cs + s^2, \quad e_1^2 = 1 + 2cs + s^2,$$

$$E^2 = 1 - 2ds^2 + s^4,$$

$$2t = e + e_1, \quad 2t^2 = E + 1 + s^2, \quad 2u^2 = E + 1 - s^2.$$

In Bezug auf a sei das elliptische Potential $\mathfrak{P} = \left(\frac{a}{r}\right)^n = t^n$,

$$s^2\left\{\frac{d^2t}{ds^2}\right\} + c'^2\left\{\frac{d^2t}{dc^2}\right\} = 0,$$

$$\mathfrak{A} = s^2 c\left\{\frac{d\mathfrak{P}}{ds}\right\} + sc'^2\left\{\frac{d\mathfrak{P}}{dc}\right\},$$

$$\mathfrak{B} = s^2\left\{\frac{d^2\mathfrak{P}}{ds^2}\right\} + c'^2\left\{\frac{d^2\mathfrak{P}}{dc^2}\right\},$$

$$(n-1)\mathfrak{A} - cs\mathfrak{B} = 0.$$

Das elliptische Indicial $\widehat{\mathfrak{C}}_x$ ist $= -c'^2\widehat{\mathfrak{D}}_x$.

Die Polynomialzahlen π sind

$$\pi_2 = -\tfrac{1}{2}n, \quad \pi_4 = -\frac{n(6-n)}{2.4},$$

$$\pi_6 = -\frac{n(8-n)(10-n)}{2\ .\ 4\ .\ 6}, \quad \pi_8 = -\frac{n(10-n)(12-n)(14-n)}{2\ .\ 4\ .\ 6\ .\ 8}$$

u. s. w.

Wenn $c = \cos\psi$, so ist das Potential von a:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = 1 + \quad \pi_2\widehat{\mathfrak{C}}_2 s^2 + \quad \pi_4\widehat{\mathfrak{C}}_4 s^4 \ \ldots,$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = 1 - \pi_2 c'^2\widehat{\mathfrak{D}}_2 s^2 - \pi_4 c'^2\widehat{\mathfrak{D}}_4 s^4 \ \ldots$$

Wenn $c = \sin\psi$, so ist das Potential von b:

$$\left(\frac{b}{r}\right)^n = 1 - \pi_2 \mathfrak{C}_2 s^2 + \pi_4 \mathfrak{C}_4 s^4 - \pi_6 \mathfrak{C}_6 s^6 \ldots.$$

$$\left(\frac{b}{r}\right)^n = 1 + \pi_2 c'^2 \mathfrak{D}_2 s^2 + \pi_4 c'^2 \mathfrak{D}_4 s^4 + \pi_6 c'^2 \mathfrak{D}_6 s^6 \ldots,$$

$$\mathfrak{C}_x = \mathfrak{q}_0 + \mathfrak{q}_2 c^2 \cdots + \mathfrak{q}_y c^y \cdots + c^x,$$

$$\mathfrak{D}_x = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}_2 c^2 \cdots + \mathfrak{r}_y c^y \cdots + c^{x-2},$$

$$x(x-n)c\mathfrak{C}_x - (n-1)c'^2 \frac{d\mathfrak{C}_x}{dc} + cc'^2 \frac{d^2\mathfrak{C}_x}{dc^2} = 0,$$

$$(x-2)(x+2-n)c\mathfrak{D}_x + [(n-5)c^2 - (n-1)]\frac{d\mathfrak{D}_x}{dc} + cc'^2 \frac{d^2\mathfrak{D}_x}{dc^2} = 0,$$

$$(x-y)(x+y-n)\mathfrak{q}_y + (y+2)(y+2-n)\mathfrak{q}_{y+2} = 0,$$

$$(x-y)(x+y-n)\mathfrak{r}_{y-2} + y(y-n)\mathfrak{r}_y = 0.$$

Für jedes n ist $\mathfrak{D}_2^{(n)} = 1$. .

Die Gleichung der Ellipse

$$a^2 = r^2(1+\lambda^2 c^2) = b^2(1+\lambda^2), \quad \text{für } \sin\psi = c,$$

$$\text{oder } u^2 = 1 + (u^{-2}c^2 - 1)s^2,$$

wird dadurch befriedigt, dafs:

$$\pi_x^{(-2)} + \pi_{x+2}^{(2)} = 0, \quad c^2 \mathfrak{C}_x^{(-2)} - \mathfrak{C}_{x+2}^{(2)} = 0.$$

Für die aufeinanderfolgenden elliptischen Indiciale und das einfache Indicial oder Subindicial gilt nachstehende Gleichung:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{C}_x^{(-3)} + 2\frac{x}{2x+1}\mathfrak{C}_{x-2}^{(-5)} + 3\frac{(x-2)x}{(2x-1)(2x+1)}\mathfrak{C}_{x-4}^{(-7)} \\ + 4\frac{(x-4)(x-2)x}{(2x-3)(2x-1)(2x+1)}\mathfrak{C}_{x-6}^{(-9)} \ldots + (\frac{1}{2}x+1)\frac{2\ .\ 4\ \ldots\ x}{(x+3)(x+5)\ldots(2x+1)} \end{array}\right\} = \dot{c}_x,$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{C}_x^{(-3)} + \frac{x}{2x+1}\mathfrak{C}_{x-2}^{(-5)} + \frac{(x-2)x}{(2x-1)(2x+1)}\mathfrak{C}_{x-4}^{(-7)} + \frac{(x-4)(x-2)x}{(2x-3)(2x-1)(2x+1)} \\ \mathfrak{C}_{x-6}^{(-9)} + \frac{2\ .\ 4\ \ldots\ x}{(x+3)(x+5)\ldots(2x+1)} \end{array}\right\} = \frac{c_{x+1}}{c}.$$

Beispiel der Anwendung des elliptischen Potentials.

Die Kraft, welche die Schwere einer in sich abgeschlossenen elliptischen Schicht oder Schale auf irgend einen Ort ausübt, verschwindet, wenn dieser Ort im Innern der Schale liegt. Betrachtet man also statt der elliptischen Schale ein massives Ellipsoïd E_1, so ist die Anziehung desselben gegen einen innern Ort O

gleich der Schwere dieses Orts zu einem Ellipsoïd $E_{,,}$, auf dessen Oberfläche der Ort liegt; vorausgesetzt dafs beide Ellipsoïde eine gleichmäfsig vertheilte und gleiche Dichtigkeit haben, und dafs sie einander ähnlich und ähnlichgestellt sind.

Wenn sie durch Umdrehung eines elliptischen Meridians um seine Axe entstanden sind, so wirkt die Schwere nur in der Ebene des Meridians. Das von dem Orte O auf die Umdrehungs-Axe gezogene Loth sei $= X$, die Schwere, welche das Ellipsoïd E_1 oder $E_{,,}$ in der Richtung dieses Loths hervorbringt, sei $= M_1$. Eben so sei das auf den Aequator gezogene Loth $= Y$, die Schwere in der Richtung dieses Loths $= N_1$.

Die beiden einander ähnlichen Ellipsoïde $E_1\, E_{,,}$ haben eine gemeinsame Excentricität ε_1, so dafs

$$\cos^2\varepsilon_1 = \frac{b_1^2}{a_1^2} = \frac{b_{,,}^2}{a_{,,}^2} = \frac{1}{1+\lambda_1^2}, \qquad \lambda_1 = \operatorname{tg}\varepsilon_1 \text{ ist.}$$

Die Gröfsen $\mathfrak{S}_1\, \mathfrak{T}_1$ sind blofs von dieser Excentricität abhängig und

$$\tfrac{2}{3}\lambda_1^3\mathfrak{S}_1 = \varepsilon_1(1+\lambda_1^2) - \lambda_1, \qquad \tfrac{1}{3}\lambda_1^3\mathfrak{T}_1 = (1+\lambda_1^2)(\lambda_1 - \varepsilon_1),$$

$$\text{oder} \quad \frac{\mathfrak{S}_1}{1+\lambda_1^2} = 1 - 2.\tfrac{3}{5}\lambda_1^2 + 3.\tfrac{3}{7}\lambda_1^4 - 4.\tfrac{3}{9}\lambda_1^6 \ldots,$$

$$\frac{\mathfrak{T}_1}{1+\lambda_1^2} = 1 - \tfrac{3}{5}\lambda_1^2 + \tfrac{3}{7}\lambda_1^4 - \tfrac{3}{9}\lambda_1^6 \ldots.$$

Alsdann ist

$$M_1 = X.\mathfrak{S}_1, \qquad N_1 = Y.\mathfrak{T}_1.$$

Der Ort O liege auf der Oberfläche eines dem Ellipsoïd E_1 confocalen Ellipsoïds E von gleicher und gleichmäfsig vertheilter Dichtigkeit. Ihre gemeinsame Brennweite sei $= f$. Die Excentricität des Ellipsoïds E sei ε, die Halb-Axen seien a und b; dann ist

$$\lambda = \operatorname{tg}\varepsilon, \qquad f = \lambda b = \lambda_1 b_1, \qquad f^2 = a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2.$$

Zu dem Ort O auf der Oberfläche von E bestimme man einen Ort o auf der Oberfläche von E_1, so dafs beide einen gleichen elliptischen Winkel haben. Die von o auf die Axe und den Aequator gezogenen Lothe seien x und y; dann ist:

$$\frac{X}{a} = \frac{x}{a_1}, \qquad \frac{Y}{b} = \frac{y}{b_1}.$$

So wie M_1, N_1 die vom Ellipsoïd E_1 auf den innern Ort O hervorgebrachten Anziehungen sind, so seien M, N die entsprechenden, zu der Axe und dem Aequator senkrechten Anziehungen des Ellipsoïds E auf den äufsern Ort o.

Ivory fand aus Betrachtung der Integrale, dafs unter den angezeigten Voraussetzungen die Anziehungen wie die Producte der beiden Halb-Axen sich verhalten, welche dem auf die Richtung der Anziehung senkrechten elliptischen Querschnitt angehören, und dafs

$$M = \frac{ab}{a_1 b_1} M_1 = X \frac{ab}{a_1 b_1} \mathfrak{S}_1 = x \frac{aab}{a_1 a_1 b_1} \mathfrak{S}_1,$$

$$N = \frac{aa}{a_1 a_1} N_1 = Y \frac{aa}{a_1 a_1} \mathfrak{T}_1 = y \frac{aab}{a_1 a_1 b_1} \mathfrak{T}_1 \text{ ist.}$$

Es sei also

$$\mathfrak{S} = \frac{r^3}{a_1 a_1 b_1} \mathfrak{S}_1 = \frac{\mathfrak{S}_1}{(1+\lambda_1^2) u_1^3},$$

$$\mathfrak{T} = \frac{r^3}{a_1 a_1 b_1} \mathfrak{T}_1 = \frac{\mathfrak{T}_1}{(1+\lambda_1^2) u_1^3},$$

so ist

$$M = x \frac{a^2 b}{r^3} \mathfrak{S}, \qquad N = y \frac{a^2 b}{r^3} \mathfrak{T},$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{u_1^3} - 2 . \tfrac{3}{5} \frac{s^2}{u_1^5} + 3 . \tfrac{3}{7} \frac{s^4}{u_1^7} - 4 . \tfrac{3}{9} \frac{s^6}{u_1^9},$$

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{u_1^3} - \tfrac{3}{5} \frac{s^2}{u_1^5} + \tfrac{3}{7} \frac{s^4}{u_1^7} - \tfrac{3}{9} \frac{s^6}{u_1^9}.$$

Die elliptischen Potentiale sind:

$$\frac{1}{u_1^3} = 1 - \frac{3}{2} \mathfrak{E}_2^{(-3)} s^2 + \frac{3.9}{2.4} \mathfrak{E}_4^{(-3)} s^4 - \frac{3.11.13}{2.4.6} \mathfrak{E}_6^{(-3)} s^6 \ldots,$$

$$\frac{1}{u_1^5} = 1 - \frac{5}{2} \mathfrak{E}_2^{(-5)} s^2 + \frac{5.11}{2.4} \mathfrak{E}_4^{(-5)} s^4 - \frac{5.13.15}{2.4.6} \mathfrak{E}_6^{(-5)} s^6 \ldots,$$

$$\frac{1}{u_1^7} = 1 - \frac{7}{2} \mathfrak{E}_2^{(-7)} s^2 + \frac{7.13}{2.4} \mathfrak{E}_4^{(-7)} s^4 - \frac{7.15.17}{2.4.6} \mathfrak{E}_6^{(-7)} s^6 \ldots,$$

u. s. w.

Wenn man diese elliptischen Potentiale in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ setzt und dabei die obigen Gleichungen zwischen den aufeinanderfolgenden elliptischen Indicialen berücksichtigt, so findet sich:

$$\mathfrak{S} = 1 - \frac{3}{2} \overset{*}{c}_2 s^2 + \frac{3.9}{2.4} \overset{*}{c}_4 s^4 - \frac{3.11.13}{2.4.6} \overset{*}{c}_6 s^6 \ldots,$$

$$\mathfrak{T} = 1 - \frac{3}{2} \frac{\widehat{c_3}}{c} s^2 + \frac{3.9}{2.4} \frac{\widehat{c_5}}{c} s^4 - \frac{3.11.13}{2.4.6} \frac{\widehat{c_7}}{c} s^6 \ldots.$$

Ein kürzerer Weg zu diesen Ausdrücken zu gelangen ist in dem oben gedachten Aufsatz angezeigt, wo sie als einzelner Fall der allgemeinen Anziehung vorkommen, welche ein Rotationssphäroïd von veränderlicher Dichtigkeit auf irgend einen äufsern Ort ausübt.

6.

Sopra un Teorema di Poligonometria.

Nota di *P. Tardy* (Professore di Matematiche in Genova).

(Estratta dagli Annali di scienze matematiche e fisiche, pubblicati in Roma Marzo 1852.)

Nel fascicolo di maggio dello scorso anno de'Nuovi Annali di Matematiche del Sig. *Terquem* il Sig. *Prouhet* ha proposto la seguente quistione.

P_0 essendo l'area di un poligono convesso di n lati, P_1 quella di un poligono avente per vertici i punti di mezzo de' lati del primo, P_2 quella di un poligono avente per vertici i punti di mezzo de'lati del secondo, e cosi di seguito, si ha

$$(A)\quad \begin{cases} P_0 - \dfrac{n^2-2^2}{2.3}P_1 + \dfrac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2.3.4.5}P_2 - \ldots. \\ \quad + (-1)^{\frac{1}{2}(n-2)}\dfrac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots.[n^2-(n-2)^2]}{2.3\ldots.(n-1)}P_{\frac{1}{2}(n-2)} = 0 \end{cases}$$

per n pari; e

$$(B)\quad \begin{cases} P_0 - \dfrac{n^2-1^2}{2}P_1 + \dfrac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2.3.4}P_2 - \ldots. \\ \quad + (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\dfrac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots.[n^2-(n-2)^2]}{2.3\ldots.(n-1)}P_{\frac{1}{2}(n-1)} = 0 \end{cases}$$

per n impari.

La dimostrazione generale di tali formole è lo scopo di questa nota. Premettiamo un lemma.

Abbiasi la serie ipergeometrica

$$(a)\quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) = 1 - \frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\delta}\frac{\gamma}{\varepsilon}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)\gamma(\gamma+1)}{\delta(\delta+1)\varepsilon(\varepsilon+1)}x^2 - \ldots.$$

Cangiando α in $\alpha+1$, e β in $\beta+1$, otteniamo la relazione

$$(b)\quad \begin{cases} \varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma,\delta,\varepsilon) \\ \quad = \varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) - \dfrac{\gamma}{\varepsilon}\dfrac{\alpha+\beta+1}{\delta}x\,\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1,\delta+1,\varepsilon+1): \end{cases}$$

allo stesso modo avremmo

$$\varphi(\alpha+2,\beta+2,\gamma,\delta,\varepsilon)$$
$$= \varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma,\delta,\varepsilon) - \frac{\gamma}{\varepsilon}\frac{\alpha+\beta+3}{\delta}x.\varphi(\alpha+1,\beta+2,\gamma+1,\delta+1,\varepsilon+1)$$

e in virtù della (*b*) questa equazione potrebbe ridursi alla forma

$$\varphi(\alpha+2,\beta+2,\gamma,\delta,\varepsilon) = \varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)+\lambda_1\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1,\delta+1,\varepsilon+1) + \lambda_2\varphi(\alpha,\beta+2,\gamma+2,\delta+2,\varepsilon+2):$$

e così per un' applicazione continuata della relatione (*b*) perverremo ad una formola generale siffatta

$$(c)\quad \begin{cases} \varphi(\alpha+m,\beta+m,\gamma,\delta,\varepsilon) = \varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) \\ \quad +C_1\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1,\delta+1,\varepsilon+1)+\cdots \\ \cdots+C_m\varphi(\alpha,\beta+m,\gamma+m,\delta+m,\varepsilon+m). \end{cases}$$

Da qui conchiudiamo che se per valori particolari di x, α, β, γ, δ, ε si abbia

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) = 0, \quad \text{e} \quad \varphi(\alpha,\beta+\mu,\gamma+\mu,\delta+\mu,\varepsilon+\mu) = 0,$$

indicando con μ un intero qualunque, sarà anche la serie primitiva (*a*) sempre nulla quando, senza mutare x, γ, δ, ε, si accrescano α e β di un numero intero qualsivoglia m.

Ciò posto siano x_1, y_1; x_2, y_2; .... x_n, y_n le coordinate de' vertici del poligono dato; quelle de'vertici del primo iscritto saranno

$\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $\frac{1}{2}(y_1+y_2)$; $\frac{1}{2}(x_2+x_3)$, $\frac{1}{2}(y_2+y_3)$, ... $\frac{1}{2}(x_n+x_1)$, $\frac{1}{2}(y_n+y_1)$;

quelle de'vertici del 2°. iscritto

$\frac{1}{4}(x_1+2x_2+x_3)$, $\frac{1}{4}(y_1+2y_2+y_3)$, ... $\frac{1}{4}(x_n+2x_1+x_2)$, $\frac{1}{4}(y_n+2y_1+y_2)$

e in generale chiamando $x_q^{(p)}$, $y_q^{(p)}$ le coordinate del vertice (q) del poligono iscritto dell'ordine (p), avremo

$$x_q^{(p)} = \frac{1}{2^p}((p)_0x_q+(p)_1x_{q+1}+(p)_2x_{q+2}+\cdots+(p)_{p-1}x_{q+p-1}+(p)_px_{q+p}),$$

$$y_q^{(p)} = \frac{1}{2^p}((p)_0y_q+(p)_1y_{q+1}+(p)_2y_{q+2}+\cdots+(p)_{p-1}y_{q+p-1}+(p)_py_{q+p});$$

ove per brevità abbiamo posto

$$(p)_m = \frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{1.2.3\ldots m},$$

ed ove bisogna prendere gl'indici delle x e delle y uguali al resto della divisione di esse per n, quante volte riescissero maggiori di n.

Se supponiamo $p<n$, siccome $(p)_m = 0$ quando $m>p$, potremo scrivere i valori delle coordinate $x_q^{(p)}$, $y_q^{(p)}$ a questo modo

$$x_q^{(p)} = \frac{1}{2^p}((p)_0x_q+(p)_1x_{q+1}+\cdots+(p)_{n-q}x_n+(p)_{n-q+1}x_1+\cdots+(p)_{n-1}x_{q-1}),$$

$$y_q^{(p)} = \frac{1}{2^p}((p)_0y_q+(p)_1y_{q+1}+\cdots+(p)_{n-q}y_n+(p)_{n-q+1}y_1+\cdots+(p)_{n-1}y_{q-1}).$$

Ora egli è noto che la superficie P_p di detto poligono è data dalla espressione

$$P_p = \tfrac{1}{2}(x_1^{(p)} y_2^{(p)} - x_2^{(p)} y_1^{(p)} + x_2^{(p)} y_3^{(p)} - x_3^{(p)} y_2^{(p)} + \cdots + x_n^{(p)} y_1^{(p)} - x_1^{(p)} y_n^{(p)}).$$

Sostituendo per queste coordinate i loro valori e raccogliendo il coefficiente θ_s del termine generico $x_q y_{q+s}$ si troverà con un poco d'attenzione

$$\begin{aligned}\theta_s = \frac{1}{2^{2p+1}}\big((p)_0(p)_{s-1} + (p)_1(p)_s + (p)_2(p)_{s+1} + \cdots + (p)_{n-s}(p)_{n-1} \\ + (p)_{n-s+1}(p)_0 + (p)_{n-s+2}(p)_1 + \cdots + (p)_{n-1}(p)_{s-2} \\ - (p)_0(p)_{s+1} - (p)_1(p)_{s+2} - \cdots - (p)_{n-s-2}(p)_{n-1} \\ - (p)_{n-s-1}(p)_0 - (p)_{n-s}(p)_1 - \cdots - (p)_{n-1}(p)_s\big).\end{aligned}$$

Osserviamo che questo coefficiente è indipendente da q e dipende solo da s, che svanisce per $s = 0$, e per $s = \frac{1}{2}n$ nel caso che n fosse pari; che rimane lo stesso se la differenza fra gl' indici della y e della x è $s - n$; che cambia soltanto di segno se questa differenza diviene $-s$, ovvero $n - s$. Non è dunque necessario di valutarlo al di là di $s = \frac{1}{2}(n-2)$ se n è pari, o di $s = \frac{1}{2}(n-1)$ se n è impari.

Se denotiamo pertanto con A_s la somma de' termini ne' quali la differenza fra gl' indici sia eguale ad s, oppure ad $s - n$, diminuita della somma di quelli ne' quali questa differenza sia $-s$ ovvero $n - s$, cioè se poniamo

$$\begin{aligned}A_s = x_1 y_{s+1} + x_2 y_{s+2} + \cdots + x_{n-s} y_n + x_{n-s+1} y_1 + \cdots + x_n y_s \\ - x_{s+1} y_1 - x_{s+2} y_2 - \cdots - x_n y_{n-s} - x_1 y_{n-s+1} - \cdots - x_s y_n\end{aligned}$$

è chiaro che otterremo

$$P_p = \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \cdots + \theta_{\frac{1}{2}(n-2)} A_{\frac{1}{2}(n-2)} \text{ per } n \text{ pari};$$

e

$$P_p = \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \cdots + \theta_{\frac{1}{2}(n-1)} A_{\frac{1}{2}(n-1)} \text{ per } n \text{ impari.}$$

Ora se limitiamo l'ordine p dell' ultimo poligono iscritto ad $\frac{1}{2}(n-2)$ se n è pari, o ad $\frac{1}{2}(n-1)$ se n è impari, i coefficienti binomiali $(p)_{n-s}$, $(p)_{n-s+1}$, $\cdots$ $(p)_{n-1}$ svaniranno tutti, e il valore di θ_s si ridurrà a.

$$\begin{aligned}\theta_s = \frac{1}{2^{2p+1}}\big((p)_0(p)_{s-1} + (p)_1(p)_s + (p)_2(p)_{s+1} + \cdots + (p)_{p-s+1}(p)_p \\ - (p_0)(p)_{s+1} - (p)_1(p)_{s+2} - (p)_2(p)_{s+3} - \cdots - (p)_{p-s-1}(p)_p - (p)_{n-s-1}(p)_0\big).\end{aligned}$$

Dalla formola generale

$$(u+v)_m = (u)_m(v)_0 + (u)_{m-1}(v)_1 + (u)_{m-2}(v)_2 + \cdots + (u)_1(v)_{m-1} + (u)_0(v)_m$$

(V. *Cauchy Cours d'Analyse Ch. IV* §. 3.) facendo

$$u = v = p, \quad m = p - s + 1,$$

e rammentando che

$$(u)_\lambda = (u)_{u-\lambda}$$

si ricava

$$(p)_0(p)_{s-1} + (p)_1(p)_s + (p)_2(p)_{s+1} + \cdots + (p)_{p-s+1}(p)_p = (2p)_{p-s+1},$$

e facendo

$$m = p-s-1$$

$$(p)_0(p)_{s+1}+(p)_1(p)_{s+2}+\cdots+(p)_{p-s-1}(p)_p = (2p)_{p-s-1},$$

e si vede che bisogna prendere $(2p)_{-\lambda}=0$.

L'ultimo termine di θ_s cioè $(p)_{n-s-1}(p)_0$ sarà sempre nullo eccetto il caso di $s=\frac{1}{2}(n-1)$, perchè allora diviene $(p)_{\frac{1}{2}(n-1)}$, e per $p=\frac{1}{2}(n-1)$ è uguale all'unità.

A questo modo avremo

$$2^{2p+1}P_p = A_1[(2p)_p-(2p)_{p-2}]+A_2[(2p)_{p-1}-(2p)_{p-3}]+\cdots$$
$$+A_{1+k}[(2p)_{p-k}-(2p)_{p-k-2}]+\cdots+A_{\frac{1}{2}(n-2)}(2p)_{p-\frac{1}{2}(n-4)},\quad n \text{ pari};$$

$$2^{2p+1}P_p = A_1[(2p)_p-(2p)_{p-2}]+A_2[(2p)_{p-1}-(2p)_{p-3}]+\cdots$$
$$+A_{1+k}[(2p)_{p-k}-(2p)_{p-k-2}]+\cdots$$
$$+A_{\frac{1}{2}(n-1)}[(2p)_{p-\frac{1}{2}(n-3)}-(p)_{\frac{1}{2}(n-1)}],\quad n \text{ impari}.$$

Avendo riguardo in seguito all'uguaglianza

$$(2p)_{p-k}-(2p)_{p-k-2} = 2\frac{(2p+1)(1+k)}{(p-k-1)(p-k)}(2p)_{p-k-2} = 2\frac{1+k}{p-k}(2p+1)_{p-k-1},$$

possiamo scrivere

$$2^{2p}.P_p = \frac{1}{p}(2p+1)_{p-1}A_1+\frac{2}{p-1}(2p+1)_{p-2}A_2+\cdots$$
$$+\frac{1+k}{p-k}(2p+1)_{p-k-1}A_{1+k}+\cdots$$
$$+\frac{\frac{1}{2}(n-4)}{p-\frac{1}{2}(n-6)}(2p+1)_{p-\frac{1}{2}(n-4)}A_{\frac{1}{2}(n-4)}+\frac{\frac{1}{2}(n-2)}{p-\frac{1}{2}(n-4)}(2p+1)_{p-\frac{1}{2}(n-2)}A_{\frac{1}{2}(n-2)}$$

se n è pari, e

$$2^{2p}.P_p = \frac{1}{p}(2p+1)_{p-1}A_1+\frac{2}{p-1}(2p+1)_{p-2}A_2+\cdots$$
$$+\frac{1+k}{p-k}(2p+1)_{p-k-1}A_{1+k}+\cdots$$
$$+\frac{\frac{1}{2}(n-3)}{p-\frac{1}{2}(n-5)}(2p+1)_{p-\frac{1}{2}(n-3)}A_{\frac{1}{2}(n-3)}+\frac{1}{2}[(2p)_{p-\frac{1}{2}(n-3)}-(p)_{\frac{1}{2}(n-1)}]A_{\frac{1}{2}(n-1)}$$

se n è impari. — In queste equazioni bisogna sostituire al coefficiente di un termine qualunque, per esempio di A_{1+k}, cioè alla quantità $\frac{1+k}{p-k}(2p+1)_{p-k-1}$ la quantità $\frac{1}{2}(2p)_{p-k}=\frac{1}{2}$ quando p diviene uguale a k.

Fatte queste sostituzioni nelle formole del Sig. ***Prouhet,*** ed avuto riguardo che P_k è la prima a introdurre A_{1+k}, conseguiremo, cominciando dal caso di n pari, pel coefficiente di A_{1+k} la seguente serie

$$(-1)^k \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots[n^2-(2k)^2]}{1.2.3\ldots(2k+1)} \frac{1}{2^{2k+1}} \Big(1 - \frac{n^2-(2k+2)^2}{(2k+2)(2k+3)} \frac{1}{2} \frac{1+k}{1} (2k+3)_0$$
$$+ \frac{[n^2-(2k+2)^2][n^2-(2k+4)^2]}{(2k+2)(2k+3)(2k+4)(2k+5)} \frac{1}{2^3} \frac{1+k}{2} (2k+5)_1 - \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{\frac{1}{2}(n-2)-k} \frac{[n^2-(2k+2)^2][n^2-(2k+4)^2][n^2-(n-2)^2]}{(2k+2)(2k+3)\ldots(n-1)} \frac{1}{2^{n-2k-3}} \frac{1+k}{\frac{1}{2}(n-2)-k} (n-1)_{\frac{1}{2}(n-2k-4)} \Big).$$

Consideriamo la serie entro parentesi e poniamo $\frac{1}{2}n = r$, essa potrà mettersi sotto la forma

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - \dfrac{r-k-1}{1} \dfrac{r+k+1}{2k+3} + \dfrac{(r-k-1)(r-k-2)}{1.2} \dfrac{(r+k+1)(r+k+2)}{(2k+3)(2k+4)} \\ - \dfrac{(r-k-1)(r-k-2)(r-k-3)}{1.2.3} \dfrac{(r+k+1)(r+k+2)(r+k+3)}{(2k+3)(2k+4)(2k+5)} \\ + \ldots\ldots \end{array} \right.$$

Il più piccolo valore che possa ricevere r per un dato valore di k è evidentemente $k+2$, poichè per arrivare sino a P_k bisogna che l'ultimo indice di P nella formola (A) cioé $\frac{1}{2}(n-2)$ sia per lo meno $= k$. Ora io dico che la serie (1) è sempre uguale a zero, infatti essa è un caso particolare della serie (a) del lemma e si deduce da questa ponendo

$$\alpha = r-k-1, \quad \beta = r+k+1, \quad \delta = 2k+3, \quad \gamma = \varepsilon = x = 1.$$

Di più per $r = k+2$, essa è manifestamente nulla, e tale si mantiene crescendo β, δ, γ, ε di un numero intero qualsivoglia μ, dunque pel suddetto lemma la serie (1) è sempre uguale a zero per valori interi qualunque di r e di k purchè sia $r \geqq k+2$.

Con ciò resta pienamente dimostrata l'equazione (A).

Passando al caso di n impari, fatta la sostituzione dell'altro valore di P_p, avremo pel coefficiente di A_{1+k} la seguente espressione

$$(-1)^k \frac{1}{2^{2k+1}} \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(2k-1)^2]}{1.2.3\ldots.(2k)} \Big(1 - \frac{n^2-(2k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} \frac{1}{2} \frac{1+k}{1} (2k+3)_0$$
$$+ \frac{[n^2-(2k+1)^2][n^2-(2k+3)^2]}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)} \frac{1}{2^3} \frac{1+k}{2} (2k+5)_1 - \ldots\ldots$$
$$- \frac{[n^2-(2k+1)^2][n^2-(2k+3)^2]\ldots[n^2-(n-2)^2]}{(2k+1)(2k+2)\ldots(n-1)} \frac{1}{2^{n-2k-2}} \frac{1+k}{\frac{1}{2}(n-1)-k} (n)_{\frac{1}{2}(n-3)-k} \Big).$$

Pel caso però di $k = \frac{1}{2}(n-3)$ questo valore non è più esatto, ed invece il coefficiente di $A_{\frac{1}{2}(n-1)}$ sarà

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-3)} \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(n-4)^2]}{1.2\ldots.(n-3)} \frac{1}{2^{n-2}} (n-3)_0$$
$$+ (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(n-2)^2]}{1.2\ldots(n-1)} \frac{1}{2^n} [(n-1)_1 - (\tfrac{1}{2}(n-1))_{\frac{1}{2}(n-1)}]$$

quantità manifestamente nulla.

Ponendo poi nella serie entro parentesi del coefficiente di A_{1+k}, $\frac{1}{2}(n-1)=r$, e riducendo vedremo che essa si può scrivere cosi

$$1-\frac{r-k}{1}\frac{r+k+1}{2k+3}\frac{2k+3}{2k+1}+\frac{(r-k)(r-k-1)}{1.2}\frac{(r+k+1)(r+k+2)}{(2k+3)(2k+4)}\frac{(2k+3)(2k+5)}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$-\frac{(r-k)(r-k-1)(r-k-2)}{1.2.3}\frac{(r+k+1)(r+k+2)(r+k+3)}{(2k+3)(2k+4)(2k+5)}\frac{(2k+3)(2k+5)(2k+7)}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$$
$$+\ \ldots\ldots$$

La qual serie derivasi pure dalla (a) del lemma prendendo
$\alpha=r-k$, $\beta=r+k+1$, $\gamma=\frac{1}{2}(2k-3)$, $\delta=2k+3$, $\varepsilon=\frac{1}{2}(2k+1)$, $x=1$.
Il più piccolo valore di r è $=k+2$, e per esso tosto si verifica che la serie riducesi a zero, e che rimane nulla ancora crescendo β, γ, δ, ε di un numero intero qualunque μ; dunque si annullerà per valori interi qualsivogliano di r e di k, purchè $r\geqq k+2$; e cosi viene pure dimostrata l'altra equazione del Sig. ***Prouhet*** pel caso del poligono di un numero impari di lati.

Facciamo da ultimo avvertire che le formole (A) e (B) si verificherebbero immediatamente se il poligono fosse regolare. Infatti detto allora A il lato del poligono dato, A_1 quello del primo iscritto, A_2 quello del secondo, e cosi di seguito si avrebbe

$$A_1=A\operatorname{sen}\frac{(n-2)\pi}{2n},\qquad A_2=A_1\operatorname{sen}\frac{(n-2)\pi}{2n}=A\operatorname{sen}^2\frac{(n-2)\pi}{2n},$$
$$A_3=A\operatorname{sen}^3\frac{(n-2)\pi}{2n},\ \ldots\ldots$$

e gli apotemi di questi poligoni sarebbero rispettivamente

$$\tfrac{1}{2}A\operatorname{tg}\frac{(n-2)\pi}{2n},\quad \tfrac{1}{2}A\operatorname{tg}\frac{(n-2)\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{(n-2)\pi}{2n},\quad \tfrac{1}{2}A\operatorname{tg}\frac{(n-2)\pi}{2n}\operatorname{sen}^2\frac{(n-2)\pi}{2n},\ \ldots\ldots$$

Sicchè otterremmo in generale

$$P_p=\tfrac{1}{4}nA^2\operatorname{tg}\frac{(n-2)\pi}{2n}\operatorname{sen}^{2p}\frac{(n-2)\pi}{2n};$$

operate quindi le sostituzioni nelle note formole

$$\operatorname{sen}nx=n\operatorname{sen}x\cos x\left(1-\frac{n^2-2^2}{1.2.3}\operatorname{sen}^2x+\frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5}\operatorname{sen}^4x-\ \ldots\right)$$

per n pari, e

$$\cos nx=\cos x\left(1-\frac{n^2-1^2}{1.2}\operatorname{sen}^2x+\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4}\operatorname{sen}^4x-\ \ldots\right)$$

per n impari, prendendo $x=\frac{(n-2)\pi}{2n}$, ne verrebbero tosto fuori quelle date dal Sig. ***Prouhet.***

7.

Über den ersten der von *Gaufs* gegebenen Beweise des Reciprocitätsgesetzes in der Theorie der quadratischen Reste.

(Von Herrn Professor *G. Lejeune Dirichlet* zu Berlin.)

Unter den zahlreichen Beweisen des Fundamentaltheorems der Lehre von den quadratischen Congruenzen hat mir der früheste, von *Gaufs* schon im Jahre 1796 gefundene und in den *Disq. arithm. sec. IV* bekannt gemachte immer besonders merkwürdig geschienen, sowohl wegen des so einfachen Gedankens, welcher demselben zu Grunde liegt, als auch deshalb, weil dieser Beweis, so viel ich weifs, der einzige ist, in welchem die Betrachtung das Gebiet der Congruenzen zweiten Grades, welchem der Satz wesentlich angehört, nirgend verläfst, wogegen die übrigen Begründungsarten auf Principien beruhen, die diesem Gebiete mehr oder weniger fremd zu sein scheinen *). Wenn aber dieser schöne Beweis die Kürze vermissen läfst, welche einige der späteren in so hohem Grade auszeichnet, so liegt dieser Mangel nicht im Wesen der Methode und hat vielmehr seinen Grund in dem zufälligen Umstande, dafs zur Darstellung gewisser Beziehungen, welche bei dieser Behandlungsweise häufig wiederkehren, kein zur Rechnung geeignetes Zeichen benutzt ist, wodurch es nöthig geworden ist, acht verschiedene Fälle zu unterscheiden, von denen jeder wieder in mehrere Unterabtheilungen zerfällt. Durch Einführung des zuerst von *Legendre* gebrauchten Zeichens in der allgemeinern Bedeutung, welche *Jacobi* demselben später gegeben hat, und durch einige andere Vereinfachungen, welche jedoch das Wesen des Beweises eben so wenig ändern, zieht sich dieser in solchem Grade zusammen, dafs er kaum noch hinter einem der übrigen hinsichtlich der Kürze zurückzustehen scheint, in so fern man nämlich nicht unberücksichtigt läfst, dafs ein Theil der in demselben vorkommenden

*) *Gaufs* selbst beurtheilt seinen ersten Beweis in einer spätern Abhandlung (*Comment. soc. Gott. vol. XVI pag.* 70) wie folgt: „*Sed omnes hae demonstrationes, etiamsi respectu rigoris nihil desiderandum relinquere videantur, e principiis nimis heterogeneis derivatae sunt, prima forsan excepta quae tamen per ratiocinia magis laboriosa procedit, operationibusque prolixioribus premitur.*

Entwicklungen für die Theorie der quadratischen Reste auch dann unentbehrlich bleibt, wenn man für das Reciprocitätsgesetz eine andere Beweismethode wählt. Ich habe einer auf die angegebene Weise vereinfachten neuen Darstellung dieses Gegenstandes um so mehr einige Seiten widmen zu dürfen geglaubt, als mir die Erfahrung wiederholt gezeigt hat, wie sehr angehenden Mathematikern das Verständnifs der früheren durch die grofse Anzahl der darin unterschiedenen Fälle erschwert wird.

§. 1.

In diesem ersten Paragraphen sollen einige für das Folgende unentbehrliche Elementarsätze und Definitionen angeführt werden.

Je nachdem die Congruenz

$$x^2 \equiv k \pmod{m},$$

in welcher k eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, möglich oder nicht möglich ist, heifst k quadratischer Rest oder Nichtrest des Moduls m, dessen Zeichen natürlich gleichgültig ist. Es ist zu unserem Zwecke gestattet, k und m immer ohne gemeinschaftlichen Theiler vorauszusetzen. Für den besonders wichtigen Fall, wo m eine ungerade Primzahl p ist, soll das Zeichen $\left(\frac{k}{p}\right)$ die positive oder negative Einheit bedeuten, je nachdem k quadratischer Rest oder Nichtrest von p ist.

Der bekannte Satz, dafs das Product $k'k''\ldots$ quadratischer Rest oder Nichtrest von p ist, je nachdem diejenigen der Factoren k', k'', …, die quadratische Nichtreste von p sind, in gerader oder ungerader Anzahl vorhanden sind, wird mit Hülfe unseres Zeichens durch die Gleichung

$$\left(\frac{k'k''\ldots}{p}\right) = \left(\frac{k'}{p}\right)\left(\frac{k''}{p}\right)\ldots$$

ausgedrückt.

Für die Möglichkeit der Congruenz $x^2 \equiv k \pmod{p^\varpi}$, worin $\varpi > 1$, ist offenbar die Bedingung $\left(\frac{k}{p}\right) = 1$ erforderlich und man beweist auch leicht, dafs, sobald diese Bedingung erfüllt ist, die Congruenz für jeden Werth von ϖ lösbar ist. Anders verhält es sich mit der Congruenz $x^2 \equiv k \pmod{2^\varpi}$. Für $\varpi = 1$ hat die ungerade Zahl k keine Bedingung zu erfüllen; für $\varpi = 2$ und $\varpi \geqq 3$ dagegen besteht die zur Lösbarkeit der Congruenz nöthige und auch ausreichende Bewegung resp. darin, dafs k die Form $4\mu+1$ oder $8\mu+1$ habe. Ist der Modul in unserer Congruenz das Product von Potenzen ver-

schiedener Primzahlen, so ist es für die Möglichkeit derselben nöthig und ausreichend, dafs sie nach den verschiedenen Primzahlpotenzen lösbar sei.

Wir wollen jetzt dem oben für den Fall definirten Zeichen $\left(\frac{k}{p}\right)$, wo p eine ungerade Primzahl bezeichnet, die in der positiven oder negativen Zahl k nicht aufgeht, eine allgemeinere Bedeutung geben, und in der Voraussetzung, dafs die ungerade Zahl m, deren Zeichen gleichgültig ist, mit k keinen gemeinschaftlichen Theiler habe und in ihre gleichen oder ungleichen Primfactoren p', p'', p''', ... zerlegt sei, so dafs also $m = p'p''p'''\ldots$, unter dem Zeichen $\left(\frac{k}{m}\right)$ das Product $\left(\frac{k}{p'}\right)\left(\frac{k}{p''}\right)\left(\frac{k}{p'''}\right)\ldots$ verstehen. Wie leicht zu sehen, kann in einem solchen Symbol statt k eine nach dem mod. m mit k congruente Zahl gesetzt werden und gelten für solche Symbole die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{l}{m}\right) = \left(\frac{kl}{m}\right), \qquad \left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{k}{mn}\right).$$

Es ist aber nicht zu übersehen, dafs $\left(\frac{k}{m}\right)$ zur Congruenz $x^2 \equiv k \pmod{m}$ jetzt nicht mehr dieselbe Beziehung hat wie früher, wo m eine Primzahl war. Ist die Congruenz lösbar, so folgt zwar noch, dafs $\left(\frac{k}{m}\right) = 1$, da alsdann nach Obigem alle Factoren, als deren Product wir $\left(\frac{k}{m}\right)$ definirt haben, der positiven Einheit gleich sind, aber man kann offenbar nicht umgekehrt von der Bedingung $\left(\frac{k}{m}\right) = 1$, auf die Möglichkeit der Congruenz schliefsen.

Schliefslich soll noch bemerkt werden, dafs, m immer ungerade vorausgesetzt, die Möglichkeit der Congruenz $lx^2 \equiv k \pmod{m}$, wenn darin k und l relative Primzahlen zu m sind, die Gleichung $\left(\frac{kl}{m}\right) = 1$ zur Folge hat, wie sogleich erhellet, wenn man die Congruenz in die Form $(lx)^2 \equiv kl$ bringt.

§. 2.

Wir kommen nun zu dem eigentlichen Gegenstande dieser Abhandlung, zu den Kriterien, durch welche für eine gegebene positive oder negative Zahl k die einfachen ungeraden Moduln p, deren quadratischer Rest k ist, von denjenigen unterschieden werden, zu denen k das entgegengesetzte Verhalten hat. Da nach dem oben angeführten Satze die verlangte Unterscheidung auf die ähnliche hinsichtlich der Primfactoren von k zurückkommt, so haben wir nur die drei Fälle zu untersuchen, wo k einer der Zahlen -1, 2 oder

einer positiven ungeraden Primzahl q gleich ist. Für diese drei Fälle sind die gewünschten Kriterien in den folgenden Gleichungen enthalten, in denen die ungerade Primzahl p wie q positiv und von q verschieden ist.

$$(a)\quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}, \qquad (b)\quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}(p^2-1)},$$

$$(c)\quad \left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)}.$$

Nach der ersten dieser Gleichungen ist $\left(\frac{-1}{p}\right) = +1$ oder -1, je nachdem p in der Form $4\mu+1$ oder $4\mu+3$ enthalten ist, nach der zweiten hat man $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ für $p = 8\mu+1, 7$, dagegen $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$ für $p = 8\mu+3, 5$, und nach der dritten ist immer $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)$, ausgenommen wenn beide Primzahlen p, q die Form $4\mu+3$ haben, in welchem Falle $\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{p}{q}\right)$ ist.

Die Gleichungen (a) und (b) sind für gewisse besondere Fälle leicht zu beweisen. Für die erstere ist dies der Fall, wo p die Form $4\mu+3$ hat, und also $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$ sein mufs. Fände diese Eigenschaft nicht für alle Primzahlen $4\mu+3$ Statt, so sei p die kleinste, für welche $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$. Dann kann man setzen $e^2+1 = ph$, und wenn man, wie es immer geschehen kann, $e < p$ und zugleich gerade wählt, wird auch $h < p$ und in der Form $4\mu+3$ enthalten sein. Die Zahl h hat also einen Primfactor $r < p$ von derselben Form $4\mu+3$, für welchen aus der Gleichung $\left(\frac{-1}{r}\right) = -1$ folgt, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Um zweitens zu beweisen, dafs immer $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$, wenn p in einer der Formen $8\mu+3, 5$ enthalten ist, nehme man an, es gebe Primzahlen von einer dieser Formen, für welche der Satz nicht Statt findet, und bezeichne mit p die kleinste derselben. Man kann dann wieder setzen $e^2-2 = ph$, und, wenn man e ungerade und zugleich $< p$ wählt, wird wegen $e^2-2 = 8\mu+7$, h der Form $8\mu+3, 5$ von p entsprechend die Form $8\mu+5, 3$ haben und überdies $< p$ sein. Da nun aus Primfactoren, die sämmtlich in einer der Formen $8\mu+1, 7$ enthalten sind, keine Zahl $8\mu+3, 5$ entstehen kann, so giebt es also einen Primfactor r von h, welcher die Form $8\mu+3, 5$ hat, und für den nach obiger Gleichung unserer Voraussetzung zuwider, $\left(\frac{2}{r}\right) = 1$ wäre.

Den in ganz ähnlicher Weise zu führenden Beweis, dafs $\left(\frac{-2}{p}\right) = -1$, wenn p eine der Formen $8\mu+5, 7$ hat, werden wir der Kürze wegen übergehen. Bringt man dieses letztere Resultat für den Fall, wo $p = 8\mu+7$, in die Form $\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$, und bemerkt, dafs nach Obigem, da die Form $8\mu+7$ ein besonderer Fall der Form $4\mu+3$ ist, $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$, so erhält man für die Primzahlen $p = 8\mu+7$, $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, so dafs also jetzt der Satz (b) für alle Primzahlen bewiesen ist, die nicht in der Form $8\mu+1$ enthalten sind.

§. 3.

Ehe wir die in dem vorigen Paragraphen aufgestellten Gleichungen allgemein zu beweisen unternehmen können, sind aus diesen als richtig vorausgesetzten Gleichungen einige Folgerungen zu ziehen, denen wir folgende Bemerkung vorausschicken.

Will man für ein Product $R = \Pi r$ ungerader Factoren r den Rest nach dem Divisor 4 bestimmen und bringt jeden Factor r in die Form $(r-1)+1$, so kann man bei der Multiplication alle Glieder weglassen, in denen erste Theile dieser Binomien in einander multiplicirt vorkommen. Es ist also

$$R \equiv 1 + \Sigma(r-1) \pmod 4$$

oder $\frac{1}{2}(R-1)$ und $\Sigma\frac{1}{2}(r-1)$ sind *gleichartig*, d. h. entweder beide gerade oder beide ungerade.

Auf dieselbe Weise folgt aus $R^2 = \Pi r^2$, da jedes ungerade Quadrat r^2 die Form $8\mu+1$ hat,

$$R^2 \equiv 1 + \Sigma(r^2-1) \pmod{64}$$

und daraus wieder die Gleichartigkeit der Zahlen $\frac{1}{8}(R^2-1)$ und $\Sigma\frac{1}{8}(r^2-1)$.

Mit Hülfe dieser Bemerkung ist es nun leicht, aus den obigen Gleichungen die folgenden allgemeinern von gleicher Form abzuleiten, in welchen P und Q irgend zwei positive ungerade Zahlen bezeichnen, die keinen gemeinschaftlichen Theiler haben:

$$(a') \quad \left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(P-1)}, \qquad (b') \quad \left(\frac{2}{P}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}(P^2-1)},$$

$$(c') \quad \left(\frac{Q}{P}\right)\left(\frac{P}{Q}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(P-1)\frac{1}{2}(Q-1)}.$$

Setzt man $P = \Pi p$, wo p jeden der gleichen oder ungleichen in P enthaltenen Primfactoren bezeichnet, wendet auf jedes p den Satz (a) an und

multiplicirt alle so entstehenden Gleichungen in einander, so erhält man

$$\left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{\Sigma\frac{1}{2}(p-1)},$$

welches Resultat in die Gleichung (a') übergeht, wenn man den Exponenten mit der mit ihm gleichartigen Zahl $\frac{1}{2}(P-1)$ vertauscht. Auf dieselbe Weise erhellet die Richtigkeit des Satzes (b'). Zum Beweise der Gleichung (c') zerlege man auch Q in seine einfachen Factoren q; die erste Seite kann dann als ein Product von Ausdrücken der Form $\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)$ dargestellt werden, wo jedes p mit jedem q zu combiniren ist. Setzt man für jeden solchen Ausdruck seinen durch die Formel (c) gegebenen Werth, so ergiebt sich

$$\left(\frac{Q}{P}\right)\left(\frac{P}{Q}\right) = (-1)^{\Sigma\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)},$$

wo das Summenzeichen alle Combinationen p, q umfafst. Die Summe ist daher das Product der Factoren $\Sigma\frac{1}{2}(p-1)$ und $\Sigma\frac{1}{2}(q-1)$, für welche man die mit diesen gleichartigen Zahlen $\frac{1}{2}(P-1)$ und $\frac{1}{2}(Q-1)$ substituiren kann, und so die Gleichung (c') erhält.

Durch Multiplication der Gleichungen (a') und (c') erhält man

$$\left(\frac{-Q}{P}\right)\left(\frac{P}{Q}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(P-1)\frac{1}{2}(Q+1)} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{-Q}{P}\right)\left(\frac{P}{-Q}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(P-1)\frac{1}{2}(-Q-1)}.$$

Man sieht also, dafs die Gleichung (c') noch richtig bleibt, wenn man sie auf die positive Zahl P und die negative $-Q$ anwendet und für diesen Fall eine Folge von (a') und der ursprünglichen Gleichung (c') ist. Eben so ist diese letztere offenbar eine Folge von (a') und der auf die Combination P, $-Q$ angewandten Gleichung (c'), und dieselbe Bemerkung findet natürlich auch auf die Gleichungen (a) und (c) Anwendung, die in unseren gegenwärtigen enthalten sind.

§. 4.

Um nun die Sätze (a) und (c) allgemein zu beweisen, gehen wir von der Voraussetzung aus, dafs beide bis zu einer beliebigen positiven ungeraden Primzahl q ausschliefslich gelten, d. h. dafs der erste für jede positive ungerade Primzahl, welche $< q$, der zweite für je zwei solche Primzahlen Statt findet. Läfst sich dann aus dieser Voraussetzung ableiten, dafs Gleichung (a) für q gilt, und Gleichung (c) für jede Combination p, q, wenn nur die positive ungerade Primzahl p kleiner als q ist, so sind beide Sätze, da sie für die ersten Primzahlen offenbar richtig sind, allgemein dargethan.

Es ist leicht einzusehen, dafs der zu gebende Nachweis sich auf die Erledigung von folgenden zwei Puncten reducirt.

Erstens ist zu zeigen, dafs, wenn für ein in $\varpi = \pm p$ gehörig gewähltes Zeichen, $\left(\frac{\varpi}{q}\right) = 1$ ist, man der Gleichung (c), auf die Combination q, ϖ angewandt, gemäfs $\left(\frac{q}{\varpi}\right) = \left(\frac{\varpi}{q}\right)(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)\frac{1}{2}(\varpi-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)\frac{1}{2}(\varpi-1)}$ hat.

Zweitens ist, wenn q die Form $4\mu+1$ hat und $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, daraus $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ abzuleiten und zugleich zu zeigen, dafs dieser zweite Fall für jedes q der Form $4\mu+1$ Statt findet, d. h. dafs es unter den Primzahlen p, welche kleiner als q sind, immer wenigstens eine giebt, welche quadratischer Nichtrest von q ist.

Hat nämlich q die Form $4\mu+3$, so ist die Gleichung (a) für q schon bewiesen und es ist daher nach dem am Ende des vorigen Paragraphen Bemerkten gleichgültig, für welche der Combination p, q und $-p$, q man die Richtigkeit der Gleichung (c) zeigt. Aus $\left(\frac{-1}{q}\right) = -1$ folgt aber $\left(\frac{-p}{q}\right) = -\left(\frac{p}{q}\right)$, d. h. eine dieser Combinationen ist immer unter dem ersten Falle enthalten.

Ist dagegen q von der Form $4\mu+1$, so folgt aus der Annahme $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, nach dem ersten Falle (wenn man $\varpi = p$ setzt), $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$, aus der Annahme $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, nach dem zweiten $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, wie es sein mufs; dafs aber auch $\left(\frac{-1}{q}\right) = 1$, erhellet wie folgt. Für eine zum zweiten Falle gehörige Primzahl p hat man $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$. Wäre nun $\left(\frac{-1}{q}\right) = -1$ und folglich $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, so würde sich aus dem ersten Falle $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ ergeben, welches Resultat dem aus dem zweiten Falle abgeleiteten widerspricht.

Ehe wir dazu schreiten, die vorhin näher bezeichneten zwei Puncte zu erledigen, mufs bemerkt werden, dafs die zu Anfang dieses Paragraphen gemachte Voraussetzung nach der im vorigen gegebenen Ableitung der Gleichungen (a') und (c') aus den Gleichungen (a) und (c), offenbar die Richtigkeit der Gleichung (c') für je zwei ungerade relative Primzahlen involvirt, wofern diese nicht beide negativ sind und die in ihnen enthaltenen Primfactoren sämmtlich kleiner als q sind.

§. 5.

Nach der im ersten Falle geltenden Bedingung $\left(\frac{\varpi}{q}\right)=1$, kann man setzen $e^2-\varpi=qf$. Nimmt man in dieser Gleichung, wie es immer geschehen kann, e gerade und zugleich $<q$ an, so wird f ungerade, positiv *) (da der numerische Werth p von ϖ kleiner als q ist) und ebenfalls $<q$ sein. Unsere Gleichung erfordert nun eine gesonderte Behandlung, je nachdem f durch ϖ aufgeht oder nicht aufgeht.

I. Ist f nicht durch ϖ theilbar, so hat man nach §. 1., $\left(\frac{\varpi}{f}\right)=1$, $\left(\frac{qf}{\varpi}\right)=\left(\frac{q}{\varpi}\right)\left(\frac{f}{\varpi}\right)=1$, und hieraus durch Multiplication und Anwendung von Gleichung (c') auf die Combination f, ϖ, $\left(\frac{q}{\varpi}\right)=(-1)^{\frac{1}{2}(f-1)\frac{1}{2}(\varpi-1)}$. Andererseits folgt aus obiger Gleichung, in welcher e gerade ist, dafs $\frac{1}{2}(f-1)$ und $\frac{1}{2}(q-1)+\frac{1}{2}(\varpi+1)$ gleichartige Zahlen sind; substituirt man also im Exponenten die letztere statt der ersteren und läfst $\frac{1}{4}(\varpi^2-1)$ als gerade weg, so erhält man, wie es sein mufs, $\left(\frac{q}{\varpi}\right)=(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)\frac{1}{2}(\varpi-1)}$.

II. Enthält f den Factor ϖ, so setze man $e=\varpi\varepsilon$, $f=\varpi\varphi$, so dafs ϖ und φ gleiche Zeichen haben. Aus der so entstehenden Gleichung $\varpi\varepsilon^2-1=q\varphi$, folgt dann $\left(\frac{\varpi}{\varphi}\right)=1$, $\left(\frac{-q\varphi}{\varpi}\right)=\left(\frac{q}{\varpi}\right)\left(\frac{-\varphi}{\varpi}\right)=1$, und hieraus durch Multiplication und Anwendung von (c') auf die Zahlen ϖ, $-\varphi$, deren nur eine negativ ist, $\left(\frac{q}{\varpi}\right)=(-1)^{\frac{1}{2}(\varpi-1)\frac{1}{2}(\varphi+1)}$, oder da $\frac{1}{2}(q-1)$ und $\frac{1}{2}(\varphi+1)$ offenbar gleichartig sind, $\left(\frac{q}{\varpi}\right)=(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)\frac{1}{2}(\varpi-1)}$.

§. 6.

Die für den zweiten Fall Statt findende Voraussetzung $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$, $q=4\mu+1$, erlaubt nicht unmittelbar wie im ersten eine Gleichung anzusetzen. Es ist vorher die Existenz einer Hülfsprimzahl $p'<q$ nachzuweisen, welche die Bedingung $\left(\frac{q}{p'}\right)=-1$ erfüllt. Hat q die Form $8\mu+5$, so bietet dieser Nachweis keine Schwierigkeit dar; $q-2$ hat nämlich alsdann die Form $8\mu+3$ und folglich einen Primfactor $p'<q$ von einer der Formen $8\mu+3, 5,$

*) Im Folgenden bezeichnen die lateinischen Buchstaben wesentlich positive Zahlen, die griechischen dagegen solche, die positiv oder negativ sein können.

für welchen $q \equiv 2 \pmod{p'}$ und folglich $\left(\frac{q}{p'}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right)$, oder nach §. 2., $\left(\frac{q}{p'}\right) = -1$.

Nicht so leicht ist es die Existenz von p' zu zeigen, wenn q in der Form $8\mu+1$ enthalten ist. In der Nothwendigkeit, den Nachweis auch für diesen Fall zu liefern, lag vielleicht die gröfste Schwierigkeit, welche *Gaufs* bei der ersten Begründung des Reciprocitätssatzes zu überwinden hatte. Er gelangte dazu durch eine ungemein scharfsinnige Betrachtung, welche im Wesentlichen auf die folgende zurückkommt.

Es sei $2m+1 < q$, und man nehme an q sei quadratischer Rest von allen ungeraden Primzahlen, welche nicht gröfser als $2m+1$ sind. Nach §. 1. und wegen $q = 8\mu+1$, ist dann die Congruenz $x^2 \equiv q$ für jeden Modul lösbar, der aufser einer beliebigen Potenz von 2 nur ungerade, $2m+1$ nicht übertreffende Primfactoren enthält. Diese Bedingungen erfüllt aber das Product $1.2.3.\ldots.(2m+1) = M$, und man kann also setzen $k^2 \equiv q \pmod{M}$, wo k positiv gewählt sei. Man hat dann

$$(q-1^2)(q-2^2)\ldots(q-m^2) \equiv (k^2-1^2)(k^2-2^2)\ldots(k^2-m^2) \pmod{M}.$$

Nun läfst sich die zweite Seite, wenn man sie mit dem Factor k multiplicirt, der relative Primzahl zu M ist, als continuirliches Product

$$(k+m)(k+m-1)\ldots(k-m)$$

schreiben, welches Product ein Vielfaches von M ist, wie sich leicht rein arithmetisch zeigen läfst und wie dies auch daraus folgt, dafs dasselbe durch M dividirt eine Combinationsanzahl darstellt. Es mufs also auch die erste Seite durch M getheilt werden können. Giebt man dem Quotienten dieser Division die Form

$$\frac{1}{m+1} \cdot \frac{q-1^2}{(m+1)^2-1^2} \cdot \frac{q-2^2}{(m+1)^2-2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{q-m^2}{(m+1)^2-m^2},$$

so stellt sich offenbar ein Widerspruch heraus, wenn man für m diejenige ganze Zahl wählt, welche unmittelbar unter $\frac{1}{2}\sqrt{q}$ liegt, indem dann der Quotient ein Product echter Brüche wird. Es ist dabei stillschweigend angenommen, dafs diese Wahl der Zahl m der Bedingung $2m+1 < q$, die unserer Deduction zu Grunde liegt, gemäfs ist, was wirklich der Fall ist, da $2m+1 < 2\sqrt{q}+1$ und $2\sqrt{q}+1$ augenscheinlich für alle Primzahlen $8\mu+1$, deren kleinste 17 ist, $< q$ ist. Es ist somit bewiesen, dafs es immer eine Primzahl p' giebt, welche $< 2m+1 < q$ ist und für welche $\left(\frac{q}{p'}\right) = -1$ ist.

Man bemerke noch, dafs für unsere Hülfsprimzahl p', $\left(\frac{p'}{q}\right) = -1$ ist, da aus der Annahme $\left(\frac{p'}{q}\right) = 1$, nach dem vorigen Paragraphen, $\left(\frac{q}{p'}\right) = 1$ folgen würde.

Indem wir jetzt dazu übergehen nachzuweisen, dafs aus $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, (wo $q = 4\mu + 1$) immer $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ folgt, können wir p als von der Hülfsprimzahl p' verschieden betrachten, da für diese die Gleichzeitigkeit der Gleichungen $\left(\frac{p'}{q}\right) = -1$, $\left(\frac{q}{p'}\right) = -1$ schon feststeht, mit deren Benutzung wir unsere Voraussetzung durch die Gleichung $\left(\frac{pp'}{q}\right) = 1$, und die daraus zu ziehende Folgerung durch die Gleichung $\left(\frac{q}{pp'}\right) = 1$ darstellen können. Nach der ersten dieser Gleichungen kann also gesetzt werden $e^2 - pp' = q\varphi$, wo e gerade und $< q$ sein soll. Alsdann wird φ ungerade und wegen $p < q$, $p' < q$, numerisch kleiner als q sein. Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem φ durch keine der Primzahlen p, p', durch eine einzige von ihnen oder endlich durch beide zugleich aufgeht. Da obige Gleichung und die daraus abzuleitende $\left(\frac{q}{pp'}\right) = 1$, nach p und p' symmetrisch sind, so macht es für die Behandlung des zweiten Falles keinen Unterschied, ob man p oder p' als Factor von φ betrachtet.

I. Wenn φ weder durch p noch durch p' theilbar ist, so folgt aus unserer Gleichung $\left(\frac{pp'}{\varphi}\right) = 1$, $\left(\frac{q\varphi}{pp'}\right) = \left(\frac{q}{pp'}\right)\left(\frac{\varphi}{pp'}\right) = 1$, und hieraus durch Multiplication und Anwendung von (c'), $\left(\frac{q}{pp'}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(pp'-1)\frac{1}{2}(\varphi-1)}$.

Nach obiger Gleichung, in welcher $q = 4\mu + 1$, sind aber die Zahlen $\frac{1}{2}(pp'-1)$, $\frac{1}{2}(\varphi-1)$ ungleichartig, d. h. die eine ist gerade, so dafs also $\left(\frac{q}{pp'}\right) = 1$.

II. Wegen der oben schon bemerkten Symmetrie können wir p' als in φ aufgehend betrachten. Setzt man $\varphi = p'\psi$, $e = p'g$, so geht unsere Gleichung über in $p'g^2 - p = q\psi$, wo ψ weder durch p noch durch p' theilbar ist. Aus dieser letzteren erhält man

$$\left(\frac{pp'}{\psi}\right) = 1, \qquad \left(\frac{p'q\psi}{p}\right) = 1, \qquad \left(\frac{-pq\psi}{p'}\right) = 1,$$

und hieraus durch Multiplication

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = \left(\frac{pp'}{\psi}\right)\left(\frac{\psi}{pp'}\right)\left(\frac{p'}{p}\right)\left(\frac{-p}{p'}\right),$$

oder, wenn man die Gleichung (c') auf die beiden Combinationen pp', ψ; p', $-p$ anwendet,

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(pp'-1)\cdot\frac{1}{2}(\psi-1)+\frac{1}{2}(p+1)\cdot\frac{1}{2}(p'-1)}.$$

Setzt man statt $\frac{1}{2}(\psi-1)$ die Zahl $\frac{1}{2}(p+1)$, welche nach obiger Gleichung mit $\frac{1}{2}(\psi-1)$ gleichartig ist, und $\frac{1}{2}(p-1)+\frac{1}{2}(p'-1)$ statt $\frac{1}{2}(pp'-1)$, so erhält der Exponent den Werth $\frac{1}{2}(p+1)(p'-1)+\frac{1}{4}(p^2-1)$, welcher offenbar gerade ist. Es ist also $\left(\frac{q}{pp'}\right)=1$.

III. Setzt man im dritten Falle $\varphi = pp'\psi$, $e = pp'g$, so erhält man $pp'g^2-1 = q\psi$, woraus $\left(\frac{pp'}{\psi}\right)=1$, $\left(\frac{-q\psi}{pp'}\right)=\left(\frac{q}{pp'}\right)\left(\frac{-\psi}{pp'}\right)=1$, und dann $\left(\frac{q}{pp'}\right)=(-1)^{\frac{1}{2}(pp'-1)\cdot\frac{1}{2}(\psi+1)}$ folgt. Da nun $\frac{1}{2}(\psi+1)$ offenbar gerade ist, so kommt schliefslich $\left(\frac{q}{pp'}\right)=1$.

Die Gleichungen (a) und (c) und die daraus abgeleiteten (a') und (c') sind somit allgemein bewiesen.

§. 7.

Es ist nun noch übrig, den oben unerledigt gebliebenen Fall des Satzes (b) für die Primzahlen der Form $8\mu+1$ nachzuholen. Man bezeichne mit q eine beliebige Primzahl dieser Form und nehme an, der Satz sei für alle Primzahlen derselben Form, welche $<q$ sind, oder, was nach dem in §. 2. schon Bewiesenen ganz dasselbe ist, für alle Primzahlen $<q$ gültig. Läfst sich aus dieser Voraussetzung die Gleichung $\left(\frac{2}{q}\right)=1$ deduciren, so wird der Satz ohne Beschränkung gelten. Die Richtigkeit dieser letzteren soll nun dadurch gezeigt werden, dafs aus der Annahme $\left(\frac{2}{q}\right)=-1$ ein Widerspruch abgeleitet wird.

Wählt man eine Hülfsprimzahl $p<q$ von solcher Beschaffenheit, dafs $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$ ist, so hat man nach der eben gemachten Annahme $\left(\frac{2p}{q}\right)=1$, und kann folglich setzen $e^2-2p = q\varphi$, wo, e ungerade und $<q$ vorausgesetzt, φ ebenfalls ungerade und, abgesehen vom Zeichen, $<q$ sein wird. Es ist jetzt zu unterscheiden, ob φ durch p nicht theilbar oder theilbar ist.

I. Im ersten Falle ergiebt sich sogleich

$$\left(\frac{2p}{q\varphi}\right)=\left(\frac{2}{q}\right)\left(\frac{2}{\varphi}\right)\left(\frac{p}{q\varphi}\right)=1, \qquad \left(\frac{q\varphi}{p}\right)=1,$$

und dann

$$\left(\frac{2}{q}\right) = \left(\frac{2}{\varphi}\right)\left(\frac{p}{q\varphi}\right)\left(\frac{q\varphi}{p}\right) = \left(\frac{2}{\varphi}\right)(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\cdot\frac{1}{2}(q\varphi-1)}.$$

Nun ist die Gleichung (b'), in welcher das Zeichen von $\boldsymbol{P}$ gleichgültig ist, und welche eine Folge von (b) ist, offenbar auf die Zahl φ anwendbar, deren sämmtliche Primfactoren der Gleichung (b) genügen. Da hiernach $\left(\frac{2}{\varphi}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}(\varphi^2-1)}$, so kann man der letzten Gleichung die Form geben:

$$-1 = (-1)^{\frac{1}{8}[2(p-1)(q\varphi-1)+\varphi^2-1]}.$$

Der eingeklammerte Ausdruck wird sich offenbar um ein Vielfaches von 16 ändern, wenn man darin für $q\varphi - 1$ und φ andere Zahlen setzt, welche diesen mod. 8 congruent sind. Nun folgt aber aus obiger Gleichung, wegen $e^2 \equiv 1$, $q \equiv 1 \pmod 8$, sogleich $q\varphi - 1 \equiv -2p$, $\varphi \equiv 1 - 2p \pmod 8$, so dafs also unser Ausdruck $\equiv -4p(p-1) + (1-2p)^2 - 1 = 0 \pmod{16}$, und folglich die zweite Seite unserer Gleichung im Widerspruch mit der ersten der positiven Einheit gleich ist.

II. Ist φ durch p theilbar, so setze man $\varphi = p\psi$, $e = pg$, woraus $pg^2 - 2 = q\psi$. In Folge dieser letzteren Gleichung hat man

$$\left(\frac{2p}{q\psi}\right) = -\left(\frac{2}{\psi}\right)\left(\frac{p}{q\psi}\right) = 1, \qquad \left(\frac{-2q\psi}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{-q\psi}{p}\right) = 1,$$

und dann, wie oben

$$-1 = (-1)^{\frac{1}{8}[2(p-1)(q\psi+1)+p^2+\psi^2-2]}.$$

Setzt man wieder statt der Zahlen $q\psi + 1$ und ψ die diesen in Folge obiger Gleichung nach dem Modul 8 congruenten $p-1$ und $p-2$, so sieht man, dafs der eingeklammerte Ausdruck

$$\equiv 2(p-1)^2 + p^2 + (p-2)^2 - 2 = 4(p-1)^2 \equiv 0 \pmod{16},$$

woraus sich derselbe Widerspruch wie oben ergiebt.

8.

Über ein die Division betreffendes Problem.

(Von Herrn Professor *G. Lejeune Dirichlet* zu Berlin.)

(Aus dem Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jan. 1851.)

In einer früheren Abhandlung*) ist beiläufig bemerkt worden, dafs bei der Division einer ganzen Zahl n durch alle nicht gröfsern der Fall häufiger vorkommt, dafs der Rest unter dem halben Divisor liegt, als der entgegengesetzte, wo er denselben übertrifft oder ihm gleich ist, und es ist dort zugleich gezeigt worden, dafs das Verhältnifs der Anzahl der Divisoren, bei welchen der erste Fall eintritt, zu ihrer Gesammtanzahl n für ein wachsendes n sich der Grenze $2-\log 4 = 0{,}61370\ldots$ nähert. Es scheint einiges Interesse darzubieten, die Untersuchung zu verallgemeinern und die Anzahl h derjenigen der Divisoren $1, 2, \ldots p$, wo $p \leqq n$, zu bestimmen, denen ein Rest entspricht, dessen Verhältnifs zum Divisor unter einem gegebenen echten Bruche α liegt. Bedient man sich der eckigen Klammern zur Bezeichnung der gröfsten ganzen Zahl, welche der eingeklammerte Werth enthält, so dafs also $x-[x]$ immer Null oder ein positiver echter Bruch ist, so ist leicht zu sehen, dafs der Divisor s die verlangte Eigenschaft haben oder nicht haben wird, je nachdem die Differenz $\left[\frac{n}{s}\right]-\left[\frac{n}{s}-\alpha\right]$ der positiven Einheit oder der Null gleich ist. Man hat also

$$h = \sum_1^p \left(\left[\frac{n}{s}\right]-\left[\frac{n}{s}-\alpha\right]\right) = \sum_1^p \left[\frac{n}{s}\right] - \sum_1^p \left[\frac{n}{s}-\alpha\right],$$

wo sich das Summenzeichen wie überall im Folgenden auf s bezieht. In dieser Form ist der Ausdruck für h weder zur numerischen Rechnung geeignet, noch läfst sich daraus erkennen, wie h für wachsende Werthe von n und p sich ändert. Eine diesem doppelten Zweck entsprechende Gestalt erhält derselbe durch folgende auch in vielen anderen Fällen anwendbare Umformung.

Es sei $y = f(x)$ eine Function, welche, wenn die Veränderliche x von $x = \mu$ bis $x = p$ wächst, immerfort abnimmt. Die durch Umkehrung

*) Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie. Abhandl. der Akademie zu Berlin. Jahrgang 1849.

daraus entstehende Function $x = F(y)$ wird offenbar denselben Character haben und ebenfalls immer kleiner werden, während die Veränderliche y von $y = f(p)$ bis $y = f(\mu)$ zunimmt. Versteht man unter den Constanten μ und p ganze Zahlen, setzt zur Abkürzung $[f(\mu)] = \nu$, $[f(p)] = q$, und bildet die Reihe

$$[f(\mu)],\quad [f(\mu+1)],\quad \ldots\quad [f(s)],\quad \ldots\quad [f(p)],$$

in welcher jedes Glied dem folgenden gleich ist oder dasselbe übertrifft, so soll nun ausgemittelt werden, welche Glieder dieser Reihe einer beliebigen zwischen q und ν liegenden ganzen Zahl t gleich sind. Hierzu suche man zunächst den völlig bestimmten Zeiger s desjenigen Gliedes, dessen Werth $\geqq t$, während das folgende $< t$ ist. Man hat also $[f(s)] \geqq t$, $[f(s+1)] < t$, oder, was dasselbe ist, $f(s) \geqq t$, $f(s+1) < t$, woraus nach der über die Function $f(x)$ gemachten Voraussetzung, $s \leqq F(t)$, $s+1 > F(t)$, d. h. $s = [F(t)]$ folgt. Wendet man dieses Resultat auf t und $t+1$ an, so sieht man, dafs der Werth t nur denjenigen Gliedern zukommt, deren Zeiger s die doppelte Bedingung

$$s > [F(t+1)] \quad \text{und} \quad s \leqq [F(t)]$$

erfüllen. Dieses Resultat erleidet wegen des gegebenen Anfangs und Endes der Reihe, für $t = \nu$ die Modification, dafs alsdann die erste Bedingung $s \geqq \mu$ wird, und für $t = q$ die, dafs statt der zweiten $s \leqq p$ zu setzen ist. Mit Berücksichtigung dieses Resultates, ist es nun leicht die Summe

$$\sum_{\mu+1}^{p} [f(s)]\varphi(s),$$

in welcher $\varphi(s)$ eine ganz beliebige Function bedeutet, dadurch zu transformiren, dafs man zuerst alle Glieder vereinigt, in denen $[f(s)]$ einen und denselben Werth hat, und dann alle so erhaltenen Partialsummen addirt. Setzt man $\sum_{i} \varphi(s) = \Psi(s)$, so erhält man für die Partialsumme, worin $[f(s)]$ den Werth t hat, wenn $q < t < \nu$ ist,

$$t(\Psi[F(t)] - \Psi[F(t+1)]),$$

und für $t = \nu$ und $t = q$ resp.

$$\nu(\Psi[F(\nu)] - \Psi(\mu)) \quad \text{und} \quad q(\Psi(p) - \Psi[F(q+1)]),$$

und dann

$$\sum_{\mu+1}^{p} [f(s)]\varphi(s) = q\Psi(p) - \nu\Psi(\mu) + \sum_{q+1}^{\nu} \Psi[F(s)].$$

Sondert man jetzt in jeder der beiden Summen, welche der oben für h gegebene Ausdruck enthält, die μ ersten Glieder ab und wendet die eben

gefundene Formel auf die übrigen Glieder an, so ergiebt sich

$$\sum_{\mu+1}^{p}\left[\frac{n}{s}\right] = \sum_{q+1}^{\nu}\left[\frac{n}{s}\right] + pq - \mu\nu,$$

wo $\left[\frac{n}{\mu}\right] = \nu$ und $\left[\frac{n}{p}\right] = q$ ist, und

$$\sum_{\mu+1}^{p}\left[\frac{n}{s} - \alpha\right] = \sum_{q'+1}^{\nu'}\left[\frac{n}{s+\alpha}\right] + pq' - \mu\nu',$$

wo man $\left[\frac{n}{\mu} - \alpha\right] = \nu'$, $\left[\frac{n}{p} - \alpha\right] = q'$ hat.

Setzt man zur Abkürzung $\nu - \nu' = \delta$, $q - q' = \varepsilon$, so dafs δ und ε nur die Werthe 0 oder 1 haben können, bringt die letzte Summe in die Form

$$\sum_{q'+1}^{\nu'}\left[\frac{n}{s+\alpha}\right] = \sum_{q+1}^{\nu}\left[\frac{n}{s+\alpha}\right] + \varepsilon\left[\frac{n}{q+\alpha}\right] - \delta\left[\frac{n}{\nu+\alpha}\right]$$

und substituirt, so kommt

$$h = \sum_{1}^{\mu}\left(\left[\frac{n}{s}\right] - \left[\frac{n}{s} - \alpha\right]\right) + \sum_{q+1}^{\nu}\left(\left[\frac{n}{s}\right] - \left[\frac{n}{s+\alpha}\right]\right)$$
$$+ \left(p - \left[\frac{n}{q+\alpha}\right]\right)\varepsilon - \left(\mu - \left[\frac{n}{\nu+\alpha}\right]\right)\delta.$$

Die eben bewirkte Umformung, obgleich für alle Werthe von p gültig, ist nur in dem Falle vortheilhaft, wenn p gröfser als $\sqrt{n}$ ist, und wird in dieser Voraussetzung am vortheilhaftesten, wenn man, wie es im Folgenden geschehen soll, für die bisher beliebig gelassene Zahl μ eine der ganzen Zahlen wählt, welche $\sqrt{n}$ benachbart sind. Wie leicht zu übersehen, beträgt alsdann die Anzahl der zur genauen Bestimmung von h nöthigen Divisionen ungefähr $2\sqrt{n} - \frac{n}{p}$, während der ursprüngliche Ausdruck p Divisionen erforderte.

Wir wollen nun in der Voraussetzung, dafs p von einer höheren Ordnung als $\sqrt{n}$ ist, d. h. dafs $\frac{p}{\sqrt{n}}$ mit n über jede Grenze hinaus wächst, den Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{h}{p}$ der Anzahl der Divisoren, welchen die verlangte Eigenschaft zukommt, zu deren Gesammtzahl p zu bestimmen suchen. Bei dieser Untersuchung kann man in dem Ausdrucke für h alle Glieder, deren Ordnung niedriger als die von p ist, vernachlässigen; läfst man das erste weg, dessen Ordnung $\sqrt{n}$ nicht überschreiten so wie das vierte, welches nur eine beschränkte Anzahl Einheiten enthalten kann, so kommt

$$h = \sum_{q+1}^{\nu}\left(\left[\frac{n}{s}\right] - \left[\frac{n}{s+\alpha}\right]\right) + \left(p - \left[\frac{n}{q+\alpha}\right]\right)\varepsilon,$$

oder auch, wenn man die Klammern wegläfst, was offenbar nur eine Änderung

welche die Ordnung γn nicht übersteigt, zur Folge hat,

$$h = n \sum_{q+1}^{\nu} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right) + \left(p - \frac{n}{q+\alpha}\right)\varepsilon.$$

Verwandelt man die obere Grenze ν in ∞, so erhält die Summe den Zuwachs $\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+1+\alpha} + \frac{1}{\nu+2} -$ etc. $< \frac{1}{\nu+1}$, der mit n multiplicirt die Ordnung γn ebenfalls nicht übersteigt. Man erhält so

$$\lim \frac{h}{p} = \frac{n}{p} \sum_{q+1}^{\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right) + \left(p - \frac{n}{q+\alpha}\right)\frac{\varepsilon}{p}.$$

Man mufs jetzt den Fall, wo der Quotient $\frac{n}{p}$, welcher der Voraussetzung nach $\leqq 1$ ist, über jede Grenze hinaus wächst, und denjenigen, wo dieser Quotient endlich bleibt, von einander unterscheiden. Im ersten Falle nähert sich das zweite Glied der Null, während das Verhältnifs der im ersten enthaltenen Summe zu $\frac{\alpha}{q}$ die Einheit zur Grenze hat, so dafs also die Grenze von $\frac{h}{p}$ mit der von $\frac{n}{pq}\alpha$, d. h. mit α zusammenfällt.

Im zweiten Falle, wo $\frac{n}{p}$ und also auch $q = \left[\frac{n}{p}\right]$ endlich bleibt, ist es zweckmäfsig, den unmittelbar durch die letzte Gleichung gegebenen Grenzwerth von $\frac{h}{p}$ in eine andere Form zu bringen, indem man statt der Summe die Differenz von zwei anderen einführt, welche von $s = 1$ bis resp. $s = \infty$ und $s = q$ genommen sind, und dann die erste durch ein Integral ausdrückt. Unsere Gleichung wird so

$$\lim \frac{h}{p} = \frac{n}{p} \int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi}\, d\varphi - \frac{n}{p} \sum_1^q \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right) + \left(1 - \frac{n}{p}\,\frac{1}{q+\alpha}\right)\varepsilon,$$

wo das Integral, welches für jeden rationalen Werth von α durch Logarithmen und Kreisfunctionen darstellbar ist, eine bekannte vielfach untersuchte Transcendente ist. Setzt man speciell $p = n$, so wird $q = 1$, $q' = 0$, $\varepsilon = 1$, und der Grenzausdruck geht über in

$$\lim \frac{h}{n} = \int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi}\, d\varphi.$$

Mit Hülfe der in der Abhandlung von ***Gaufs,*** welche den Titel führt, ***Disq. gen. circa seriem etc.,*** gegebenen Tafel dieser Transcendente kann man leicht den Werth von α bestimmen, dem ein gegebener Werth des Integrals entspricht und man findet z. B. dafs, wenn für die halbe Anzahl der Divisoren 1, 2, .. n das Verhältnifs des Restes zum Divisor unter α liegen soll, $\alpha = 0{,}384686\ldots$ sein mufs.

9.

De formarum binariarum secundi gradus compositione.

(Auct. *G. Lejeune Dirichlet.*)

(Commentatio mense Majo an. MDCCCLI ad actum quendam academicum in univ. litt. reg. Berol. celebrandum typis expressa et distributa.)

Plures abhinc iam annos quum esset propositum quaestionem de numero classium formarum secundi gradus, quae determinanti dato respondent, ad theoriam numerorum complexorum transferre, elementa doctrinae de formis ab integro mihi fuerunt exponenda quippe quae nonnisi in casu ubi de integris realibus agitur, ante erunt evoluta. Quam elementorum expositionem paucis pagellis absolvere mihi successit quibusdam adiuto considerationibus in hac doctrina nondum adhibitis, quae integris tam realibus quam complexis aeque sunt accommodatae *). Disquisitionem illo loco ad proprietates restrinxi quae ad formarum aequivalentiam et transmutationem numerorumque per formas repraesentionem spectant et quae solae ad quaestionem cui illa commentatio erat dicata, requirebantur. De formarum compositione tunc non egi, quod argumentum ab illustrissimo *Gauſs* in „Disquisitionum arithmeticarum" sectione quinta maxima quidem generalitate sed per calculos tam prolixos tractatum esse constat, ut perpauci compositionis naturam percipere valuerint eo magis quod summus geometra, ut ipse monuit, brevitati consulens theorematum difficiliorum demonstrationes synthetice adornavit, suppressa analysi per quam erant eruta. Quare confidere posse mihi videor, huius argumenti expositionem novam et plane elementarem artis analyticae cultoribus non fore ingratam.

1°.

Antequam formarum compositionem aggrediamur, pauca quae vel nota sunt vel ex notis facile deducuntur, sunt praemittenda.

Valores datos ζ, ζ', ζ'', ... qui congruentiae

$$u^2 \equiv D$$

secundum modulos m, m', m'', ... resp. satisfaciunt, inter se concordantes

---

*) Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et indéterminées complexes, in Diarii Crelliani tomo XXIV.

vocabimus, si radix Z eiusdem congruentiae ad mod. $mm'm''\ldots$ relatae inveniri poterit ita comparata ut habeatur

$$\zeta \equiv Z \pmod{m}, \quad \zeta' \equiv Z \pmod{m'}, \quad \zeta'' \equiv Z \pmod{m''}, \ldots$$

Sufficiet considerare casum ubi moduli $m, m', m'', \ldots$ sunt impares et ad ipsum D primi.

Facile perspicitur, congruentiis propositis satisfieri non posse, nisi respectu singulorum numerorum primorum duos pluresve ipsorum $m, m', \ldots$ metientium valores respondentes $\zeta, \zeta', \ldots$ inter se sint congrui. Quae conditio si locum habet, ex valoribus datis $\zeta, \zeta', \zeta'', \ldots$ cognoscentur residua $\pi, \pi', \ldots$ ipsius Z respectu singulorum numerorum primorum inaequalium $p, p', \ldots$ productum $mm'm''\ldots$ metientium. Quum vero residua $\pi, \pi', \ldots$ sint manifesto radices congruentiae nostrae sec. mod. $p, p', \ldots$ resp., ex notis de congruentiis doctrinae elementis colligitur, exstare radicem et quidem unicam Z congruentiae sec. mod. $mm'm''\ldots$ satisfacientem ipsisque $\pi, \pi', \ldots$ sec. mod. $p, p', \ldots$ congruam, simulque nullo negotio perspicitur fore $Z \equiv \zeta \pmod{m}$, $Z \equiv \zeta' \pmod{m'}$ etc.

Quum terminus constans D in congruentia nostra contentus in sequentibus semper eundem valorem servare debeat, brevitatis gratia radicem datam ζ modulo m respondentem per notationem (m, ζ) designabimus. Qua notatione introducta, radicem Z ex datis $\zeta, \zeta', \ldots$ inter se concordantibus modo indicato deducendam, quam ex his compositam dicemus, commode hoc modo

$$(m, \zeta)(m', \zeta')(m'', \zeta'')\ldots = (mm'm''\ldots, Z)$$

designare possumus. Caeterum observamus, radices $\zeta, \zeta', \ldots$ semper inter se concordare, si $m, m', \ldots$ inter se sint primi, et hoc etiam valere in casu, quem exclusimus et ubi $m, m', \ldots$ ad $2D$ non sunt primi. Patet enim, tum Z per congruentias $Z \equiv \zeta \pmod{m}$, $Z \equiv \zeta' \pmod{m'}$, ... respectu mod. $mm'\ldots$ iam plene definiri, simulque fore $Z^2 \equiv D \pmod{mm'\ldots}$.

2°.

In formis secundi gradus hic considerandis

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

quarum determinans $D = b^2 - ac$, coefficientes a, b, c a divisore communi liberos supponemus, quippe ad quem casum reliqui facile reducuntur. Constat formas conditioni enunciatae satisfacientes duos constituere ordines, prout coefficientium ext. a, c alteruter saltem est impar aut uterque par. Casum

posteriorem brevitatis causa hic excludemus quum ratiocinia ad priorem applicanda mutatis mutandis in altero quoque valeant.

Si in forma data indeterminatis x, y valores determinati inter se primi (id quod semper erit subintelligendum) tribuuntur, ita ut habeatur

$$ax^2+2bxy+cy^2 = m,$$

numerum m (qui semper ad $2D$ primus erit supponendus) per formam repraesentari dicemus. Acceptis integris ξ, η talibus ut sit $x\eta - y\xi = 1$, notum est facileque demonstratur, expressionem

$$\zeta = (ax+by)\xi+(bx+cy)\eta$$

fore radicem congruentiae $u^2 \equiv D \pmod m$, semperque hoc modo eandem radicem esse prodituram quomodocunque ipsi ξ, η varientur. Radix (m, ζ), ad quam repraesentationem datam pertinere dicemus, alio modo definiri potest, ad propositum nostrum accommodatiore. Si in aequat. per quam ζ exhibuimus. per y multiplicata, $x\eta-1$ loco producti $y\xi$ ponis, perspicitur esse

$$(1) \qquad ax+by \equiv -y\zeta \pmod m$$

qua congruentia ζ plene definitur dummodo y ad mod. m sit primus. Sin autem ipsi y cum modulo est divisor communis max. δ unitate maior, quem etiam ipsum a metiri patet, congruentia nostra nihil aliud docet quam haec

$$\frac{ax+by}{\delta} \equiv -\frac{y}{\delta}\zeta\left(\mathrm{mod}\,\frac{m}{\delta}\right)$$

ita ut respectu divisorum primorum ipsius δ, si qui sunt, ipsum $\frac{m}{\delta}$ non metientium, residua ipsius ζ hoc modo cognosci non possint. Cui incommodo facile medeberis, si attenderis, ex aequat. supra datis sequi $\zeta \equiv bx\eta$, $x\eta \equiv 1$, $(\mathrm{mod}\,\delta)$ ideoque

$$(2) \qquad \zeta \equiv b \pmod\delta$$

qua formula cum superiore iuncta, residua ipsius ζ resp. singulorum divisorum ipsius m iam plene erunt nota. Observamus si ε sit div. com. ipsorum x et m, simili modo haberi

$$(3) \qquad \zeta \equiv -b \pmod\varepsilon.$$

His addimus sequentia quae quamquam abunde sunt nota, hic in conspectum produxisse e re erit.

1°. Si duae formae sunt aequivalentes (proprie, id quod semper subintelligemus) et prior in posteriorem transit ope substitutionis $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, ubi $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, patet numerum m per alteram repraesen-

tabilem etiam per alteram repraesentari posse facileque demonstratur, binas eiusdem numeri repraesentationes ope aequat. praec. inter se connexas ad eandem radicem (m, ζ) pertinere. Quare repraesentationes ad exp. datam (m, ζ) pertinentes ad classem integram erunt referendae quae erit unica.

2°. Vice versa enim demonstrari potest, ex duabus eiusdem numeri m per duas formas eiusdem determinantis repraesentationibus quae ad eandem radicem (m, ζ) pertineant sequi formarum aequivalentiam.

3°. Denique patet, data radice qualibet (m, ζ), exstare classem per cuius formas m ita repraesentari possit, ut radix his repraesentationibus respondens sit (m, ζ). Manifesto enim m per formam $\left(m, \zeta, \frac{\zeta^2 - D}{m}\right)$ cuius coeff. a divisore com. sunt liberi et in qua m est impar, repraesentatur ponendo $x = 1$, $y = 0$, quam repraesentationem ad (m, ζ) pertinere elucet.

3°.

His praemissis, propositum aggrediamur. Datis duabus formis φ et φ' eiusdem determinantis $\boldsymbol{D}$, sint m et m' bini quilibet integri impares et ad $\boldsymbol{D}$ primi tali modo per φ et φ' resp. repraesentabiles, ut radices (m, ζ), (m', ζ'), ad quas hae repraesentationes pertineant, inter sese sint concordantes. Quibus suppositis, totius rei cardo in eo vertitur ut demonstretur, repraesentationes ipsius mm' ad expressionem $(m, \zeta)(m', \zeta')$ pertinentes, semper per eandem formam effectum iri sive potius ad eandem classem esse referendas, quocunque modo ipsi m, m' varientur. Quod est theorema in hac doctrina fundamentale.

Supponamus formas datas (a, b, c), (a', b', c') ita praeparatas esse ut expressiones (a, b), (a', b') inter se concordent, id quod ex. gr. efficitur, formarum alterutram transmutando in aequivalentem cuius coëfficiens primus cum alterius coëfficiente primo divisorem communem non habeat. At probe notandum est, analysin in sequentibus evolvendam nihil requirere nisi ut (a, b) et (a', b') inter sese sint concordantes, sed neque opus esse, ut a et a' inter se, neque magis ut ad $2\boldsymbol{D}$ sint primi. Designando per $(aa', \boldsymbol{B})$ expressionem ex compositione ipsarum (a, b) et (a', b') oriundam ita ut habeatur $\boldsymbol{B} \equiv b \pmod{a}$, $\boldsymbol{B} \equiv b' \pmod{a'}$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B}^2 - aa'\boldsymbol{C}$, ubi $\boldsymbol{C}$ est integer, patet formas cum his ipsis aequivalentibus

$$ax^2 + 2\boldsymbol{B}xy + a'\boldsymbol{C}y^2 = \varphi, \qquad a'x'^2 + 2\boldsymbol{B}x'y' + a\boldsymbol{C}y'^2 = \varphi'$$

commutari posse, quibus primo per a et a' resp., dein inter sese multiplicatis,

prodibunt aequationes,

$$(ax+By)^2-Dy^2=a\varphi,\quad (a'x'+By')^2-Dy'^2=a'\varphi'$$

$$((ax+By)(a'x'+By')+Dyy')^2-D((ax+By)y'+(a'x'+By')y)^2=aa'\varphi\varphi'.$$

Si iam observamus, propter $D=B^2-aa'C$, haberi

$$(4)\quad (ax+By)(a'x'+By')+Dyy'=aa'X+BY$$

ubi positum est

$$(5)\quad X=xx'-Cyy',\ Y=(ax+By)y'+(a'x'+By')y=axy'+a'x'y+2Byy',$$

aequatio ultima, per aa' divisa, induet formam

$$(6)\quad aa'X^2+2BXY+CY^2=\varphi\varphi'=\psi.$$

Postquam productum formarum φ et φ', per formam ψ eiusdem determinantis D indefinite exhibuimus, tum ipsis x, y tum ipsis x', y' valores determinatos inter se primos tribui supponamus, pro quibus $\varphi=m$, $\varphi'=m'$ evadat, et qui conditionibus supra indicatis satisfaciant. Quo facto, demonstrandum erit 1°. repraesentationem ipsius mm' per formam ψ, quam aequationibus (5) et (6) praeberi videmus, fore propriam, sive X et Y a divisore communi fore liberos et 2°. radicem ad quam haec repraesentatio pertinet et quae sit (mm', Z), revera ex radicibus (m, ζ), (m', ζ') ad quas repraesentationes ipsorum m et m' pertinere supponemus, fore compositam.

1°. Ut evincatur, ipsos X et Y divisorem communem non habere, proficiscamur a suppositione, numerum primum p ambos metiri et quae hinc sequantur videamus. Quum p alterutrum ipsorum m, m' metiri debeat, ponamus id quod licet, m ipsius p esse multiplum. Iam dico, etiam ipsum m' per p divisibilem esse supponendum. Quum enim X et Y per p sint divisibiles, patet, multiplicando aequat. (5) per $-ay'$ et x', et addendo, proditurum esse integrum per p divisibilem $(a'x'^2+2Bx'y'+aCy'^2)y=m'y$. Si iam ipsum m' per p divisibilem non esse supponere velis, ipse y et proin etiam a ipsius p erunt multipla. Tum autem propter $xx'-Cyy'=X\equiv 0 \pmod p$, et ex eo quod x ad ipsum y est primus, colligitur $x'\equiv 0$, unde tandem $m'=a'x'^2+2Bx'y'+aCy'^2$ ipsius p esse multiplum perspicitur. Quum p ambos m et m' metiatur, erit per aequat. (1), $ax+By\equiv -y\zeta$, $a'x'+By'\equiv -y'\zeta' \pmod p$, quarum formularum substitutione, secunda aequat. (5) transit in congr. $(\zeta+\zeta')yy'\equiv 0 \pmod p$. Si $\zeta+\zeta'\equiv 0$ esset, sequeretur $\zeta'\equiv -\zeta$ contra hyp., radices ζ et ζ' inter se concordare sive $\zeta'\equiv\zeta$ esse. Restat ut videamus quid ex alterutra suppositionum $y\equiv 0$, $y'\equiv 0$, quae plane inter se

sunt similes, sequatur. Si y ideoque propter $xx' - Cyy' \equiv 0$, etiam x' per p esset divisibilis, haberemus per aequat. (2) et (3) resp., $\zeta \equiv B$, $\zeta' \equiv -B$, et perinde ut supra, $\zeta + \zeta' \equiv 0 \pmod{p}$. Evictum est igitur, ipsos X et Y inter se esse primos.

2°. Ut iam probemus, radicem ad quam repraesentatio ipsius mm' pertinet et quam per (mm', Z) designavimus revera ex ipsis (m, ζ), (m', ζ') esse compositam, propter symmetriam ostendere sufficiet, esse $Z \equiv \zeta$ respectu cuiuslibet divisoris primi p ipsius m. Quum per aeq. (1) habeatur $ax + By \equiv -\zeta y \pmod{p}$, ex aeq. (4) et secunda aeq. (5) facile deducuntur congruentiae

$$(-\zeta(ax' + By') + Dy')y \equiv aa'X + BY, \quad (-\zeta y' + a'x' + By')y \equiv Y,$$

unde, posteriore per ζ multiplicata ad priorem addita, et ratione habita formulae $\zeta^2 \equiv D$, sequitur $aa'X + BY \equiv -Y\zeta \pmod{p}$ qua congr. cum hac $aa'X + BY \equiv -YZ \pmod{p}$ comparata, vides esse $Z \equiv \zeta \pmod{p}$, si p ipsum Y non metiatur. Restat ut consideremus casum ubi Y per p est divisibilis, quo casu erit per aeq. (2), $Z \equiv B$. Si iam etiam y ipsius p est multiplum, erit simili modo, $\zeta \equiv B$ et proinde $Z \equiv \zeta$. Si vero y per p non est divisibilis, e congr. quam supra nacti eramus, concluditur esse $a'x' + By' - \zeta y' \equiv 0$, unde facile deducitur, ipsum p producti $a'm'$ esse factorem. Est enim $a'm' = (a'x' + By')^2 - Dy'^2 \equiv (a'x' + By')^2 - \zeta^2 y'^2 \equiv 0$. Iam duo casus sunt distinguendi. Supponamus primo, ipsum a' per p non esse divisibilem. Quo casu quum m' per p sit divisibilis, habetur $a'x' + By' + \zeta' y' \equiv 0$, qua formula cum superiore collata sequitur $(\zeta + \zeta')y' \equiv 0$, quae congr. ad conclusionem absurdam deducit. Nam quum $\zeta + \zeta'$ multiplum ipsius p esse non possit, sequeretur $y' \equiv 0$, ideoque propter $m' = a'x'^2 + 2Bx'y' + aCy'^2$, $a' \equiv 0$ contra hyp. Quare hic casus locum habere non potest. In casu posteriori, ubi a' per p est divisibilis, e congr. $a'x' + By' - \zeta y' \equiv 0$, deducitur $(B - \zeta)y' \equiv 0$. Si iam p ipsum y' non metitur, habetur $\zeta \equiv B$, id quod cum congr. $Z \equiv B \pmod{p}$ convenit. Si vero p ipsius y' ideoque etiam ipsius m' est divisor, habetur per aeq. (2), $\zeta' \equiv B$, unde ut supra esse $\zeta \equiv B$ colliges, si radices ζ et ζ' inter se concordantes esse attenderis.

10.

An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism.

(By the late *George Green,* fellow of Gonville- and Cains-Colleges at Cambridge.)*)

Application of the preceding results to the theory of electricity.

8.

The first application we shall make of the foregoing principles, will be to the theory of the Leyden phial. For this, we will call the inner surface of the phial A, and suppose it to be of any form whatever, plane or curved, then, B being its outer surface, and θ the thickness of the glass measured along a normal to A; θ will be a very small quantity, which, for greater generality, we will suppose to vary in any way, in passing from one point of the surface A to another. If now the inner coating of the phial be put in communication with a conductor C, charged with any quantity of electricity, and the outer one be also made to communicate with another conducting body C', containing any other quantity of electricity, it is evident, in consequence of the communications here established, that the total potential function, arising from the whole system, will be constant throughout the interior of the inner metallic coating, and of the body C. We shall here represent this constant quantity by

$$\beta.$$

Moreover, the same potential function within the substance of the outer coating, and in the interior of the conductor C', will be equal to another constant quantity

$$\beta'.$$

Then designating by V, the value of this function, for the whole of the space exterior to the conducting bodies of the system, and consequently for that within the substance of the glass itself; we shall have (art. 4)

$$\overline{V} = \beta \quad \text{and} \quad \overline{\overline{V}} = \beta'.$$

One horizontal line over any quantity, indicating that it belongs to the inner surface A; and two showing that it belongs to the outer one B.

*) Vide tome 39 p. 13 and tome 44 p. 356 of this Journal.

At any point of the surface A, suppose a normal to it to be drawn, and let this be the axes of $\overline{w}$: then $\overline{w}'$, $\overline{w}''$, being two other rectangular axes, which are necessarily in the plane tangent to A at this point; V may be considered as a function of $\overline{w}$, $\overline{w}'$ and $\overline{w}''$, and we shall have by ***Taylor's*** theorem, since $\overline{w}'=0$ and $\overline{w}''=0$ at the axis of $\overline{w}$ along which θ is measured,

$$\overline{\overline{V}} = \overline{V} + \frac{d\overline{V}}{d\overline{w}}\cdot\frac{\theta}{1} + \frac{d^2\overline{V}}{d\overline{w}^2}\cdot\frac{\theta^2}{1.2} + \text{etc.};$$

where, on account of the smallness of θ, the series converges very rapidly. By writing in the above, for $\overline{V}$ and $\overline{\overline{V}}$ their values just given, we obtain

$$\beta'-\beta = \frac{d\overline{V}}{d\overline{w}}\cdot\frac{\theta}{1} + \frac{d^2\overline{V}}{d\overline{w}^2}\cdot\frac{\theta^2}{1.2} + \text{etc.}$$

In the same way, if $\overline{\overline{w}}$ be a normal to B, directed towards A, and θ_1 be the thickness of the glass measured along this normal, we shall have

$$\beta-\beta' = \frac{d\overline{\overline{V}}}{d\overline{\overline{w}}}\cdot\frac{\theta_1}{1} + \frac{d^2\overline{\overline{V}}}{d\overline{\overline{w}}^2}\cdot\frac{\theta_1^2}{1.2} + \text{etc.}$$

But, if we neglect quantities of the order θ, compared with those retained, the following equation will evidently hold good,

$$\frac{d^n\overline{\overline{V}}}{d\overline{\overline{w}}^n} = (-1)^n\frac{d^n\overline{V}}{d\overline{w}^n};$$

n being any whole positive number, the factor $(-1)^n$ being introduced because $\overline{w}$ and $\overline{\overline{w}}$ are measured in opposite directions. Now by article 4

$$-4\pi\overline{\varrho} = \frac{d\overline{V}}{d\overline{w}} \quad \text{and} \quad -4\pi\overline{\overline{\varrho}} = \frac{d\overline{\overline{V}}}{d\overline{\overline{w}}};$$

$\overline{\varrho}$ and $\overline{\overline{\varrho}}$ being the densities of the electric fluid at the surfaces A and B respectively. Permitting ourselves, in what follows, to neglect quantities of the order θ^2 compared with those retained, it is clear that we may write θ for θ_1, and hence by substitution

$$\beta'-\beta = -4\pi\overline{\varrho}\theta + \left(\frac{\overline{d^2V}}{d\overline{w}}\right)\frac{\theta^2}{1.2}$$

$$\beta-\beta' = -4\pi\overline{\overline{\varrho}}\theta + \left(\frac{\overline{d^2V}}{d\overline{w}^2}\right)\frac{\theta^2}{1.2};$$

where V and ϱ are quantities of the order $\frac{1}{\theta}$; β' and β being the ordre θ^0

or unity. The only thing which now remains to be determined, is the value of $\frac{d^2\overline{V}}{d\overline{w}^2}$ for any point on the surface A.

Throughout the substance of the glass, the potential function V will satisfy the equation $0 = \delta V$, and therefore at a point on the surface of A, where of necessity, w, w', and w'', are each equal to *zero*, we have

$$0 = \frac{d^2\overline{V}}{dw^2} + \frac{d^2\overline{V}}{dw'^2} + \frac{d^2\overline{V}}{dw''^2} = \delta\overline{V};$$

the horizontal mark over w, w' and w'' being, for simplicity, ommitted. Then since $w' = 0$,

$$\frac{d^2\overline{V}}{dw'^2} = (V_0 - 2V_{dw'} + V_{2dw'}) : dw'^2,$$

and as V is constant and equal to β at the surface A, there hence arises

$$V_0 = \beta; \quad V_{dw'} = \beta + \frac{d\overline{V}}{dw}\frac{dw'^2}{2R}, \qquad V_{2dw'} = \beta + \frac{d\overline{V}}{dw}\frac{4dw'^2}{2R};$$

R being the radius of curvature of the surface A, in the plane (w, w'). Substituting these values in the expression immediately preceding, we get

$$\frac{d^2\overline{V}}{dw'^2} = \frac{1}{R}\frac{d\overline{V}}{dw} = \frac{-4\pi\overline{\varrho}}{R}.$$

In precisely the same way we obtain, by writing R' for the radius of curvature in the plane (w, w''),

$$\frac{d^2\overline{V}}{dw''^2} = \frac{-4\pi\overline{\varrho}}{R'};$$

both rays being accounted positive on the side where w, i. e. $\overline{w}$ is negative. These values substituted in $0 = \delta\overline{V}$, there results

$$\frac{d^2\overline{V}}{dw^2} = 4\pi\overline{\varrho}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

for the required value of $\frac{d^2V}{dw^2}$, and thus the sum of the two equations into which it enters, yields

$$\overline{\varrho}\left\{1 + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\theta\right\} = -\overline{\overline{\varrho}},$$

and the difference of the same equations, gives

$$\beta - \beta' = 2\pi(\overline{\varrho} - \overline{\overline{\varrho}})\theta,$$

therefore the required values of the densities $\bar{\varrho}$ and $\bar{\bar{\varrho}}$ are

$$(8)\qquad \begin{cases} \bar{\varrho} = \dfrac{\beta-\beta'}{4\pi\theta}\left\{1+\tfrac{1}{2}\theta\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R'}\right)\right\} \\ \bar{\bar{\varrho}} = \dfrac{\beta'-\beta}{4\pi\theta}\left\{1-\tfrac{1}{2}\theta\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R'}\right)\right\}; \end{cases}$$

which values are correct to quantities of the order $\theta^2\bar{\varrho}$, or, which is the same thing, to quantities of the order θ; these having been neglected in the latter part of the preceding analysis, as unworthy of notice.

Suppose $d\sigma$ is an element of the surface A, the corresponding element of B, cut off by normals to A, will be $d\sigma\left\{1+\theta\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R'}\right)\right\}$, and therefore the quantity of fluid on this last element will be $\bar{\bar{\varrho}}d\sigma\left\{1+\theta\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R'}\right)\right\}$; substituting for $\bar{\bar{\varrho}}$ its value before found, $\bar{\bar{\varrho}} = -\bar{\varrho}\left\{1-\theta\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R'}\right)\right\}$, and neglecting $\theta^2\bar{\varrho}$, we obtain

$$-\bar{\varrho}\,d\sigma,$$

the same quantity as on the element $d\sigma$ of the first surface. If therefore, we conceive any portion of the surface A, bounded by a closed curve, and a corresponding portion of the surface B, which would be cut off by a normal to A, passing completely round this curve; the sum of the two quantities of electric fluid, on these corresponding portions, will be equal to *zero;* and consequently, in an electrical jar any how charged, the total quantity of electricity in the jar may be found, by calculating the quantity, on the two exterior surfaces of the metallic coatings farthest from the glass, as the portions of electricity, on the two surfaces adjacent to the glass, exactly neutralise each other. This results will appear singular, when we consider the immense quantity of fluid collected on these last surfaces, and moreover, it would not be difficult to verify it by experiment.

As a particular example of the use of this general theory: suppose a spherical conductor whose radius a, to communicate with the inside of an electrical jar, by means of a long slender wire, the outside being in communication with the common reservoir; and let the whole be charged: then P representing the density of the electricity on the surface of the conductor, which will be very nearly constant, the value of the potential function within the sphere, and, in consequence of the communication established, at the inner coating A also, will be $4\pi aP$ very nearly, since we may, without sensible

error, neglect the action of the wire and jar itfelf in calculating it. Hence

$$\beta = 4\pi a\boldsymbol{P} \quad \text{and} \quad \beta' = 0,$$

and the equations (8), by neglecting quantities of the order θ, give

$$\bar{\varrho} = \frac{\beta}{4\pi\theta} = \frac{a}{\theta}\boldsymbol{P} \quad \text{and} \quad \bar{\varrho} = \frac{-\beta}{4\pi\theta} = -\frac{a}{\theta}\boldsymbol{P}.$$

We thus obtain, by the most simple calculation, the values of the densities, at any point on either of the surfaces $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$, next the glass, when that on the spherical conductor is known.

The theory of the condenser, electrophorous, etc. depends upon what has been proved in this article; but these are details into which the limits of this Essay will not permit me to enter; there is, however, one result, relative to charging a number of jars ***by cascade,*** that appears worthy of notice, and which flows so readily from the equations (8), that I cannot refrain from introducing it here.

Conceive any number of equal and similar insulated Leyden phials, of uniform thickness, so disposed, that the exterior coating of the first, may communicate with the interior one of the second; the exterior one of the second, with the interior one of the third; and so on throughout the whole series, to the exterior surface of the last, which we will suppose in communication with the earth. Then, if the interior of the first phial, be made to communicate with the prime conductor of an electrical machine, in a state of action, all the phials will receive a certain charge, and this mode of operating is called charging ***by cascade.*** Permitting ourselves to neglect the small quantities of free fluid on the exterior surfaces of the metallic coatings, and other quantities of the same order, we may readily determine the electrical state of each phial in the series: for thus, the equations (8) become

$$\bar{\varrho} = \frac{\beta - \beta'}{4\pi\theta}, \quad \bar{\varrho} = \frac{\beta' - \beta}{4\pi\theta}.$$

Designating now, by an index at the foot of any letter, the number of the phial to which it belongs, so that, $\bar{\varrho}_1$ may belong to the first, $\bar{\varrho}_2$ to the second phial, and so on; we shall have, by supposing their whole number to be $\boldsymbol{n}$, since θ is the same for every one,

$$\bar{\varrho}_1 = \frac{\beta_1 - \beta'_1}{4\pi\theta} \qquad \bar{\bar{\varrho}}_1 = \frac{\beta'_1 - \beta_1}{4\pi\theta}$$

$$\bar{\varrho}_2 = \frac{\beta_2 - \beta'_2}{4\pi\theta} \qquad \bar{\bar{\varrho}}_2 = \frac{\beta'_2 - \beta_2}{4\pi\theta}$$

etc. etc.

$$\bar{\varrho}_n = \frac{\beta_n - \beta'_n}{4\pi\theta} \qquad \bar{\bar{\varrho}}_n = \frac{\beta'_n - \beta_n}{4\pi\theta}.$$

Now β represents the value of the total potential function, within the prime conductor and interior coating of the first phial, and in consequence of the communications established in this system, we have in regular succession, beginning with the prime conductor, and ending with the exterior surface of the last phial, which communicates with the earth,

$$\beta = \beta_1;\ \beta'_1 = \beta_2;\ \beta'_2 = \beta'_3;\ \text{etc.} \ldots \beta'_{n-1} = \beta_n;\ \beta'_n = 0$$

$$0 = \bar{\bar{\varrho}}_1 + \bar{\varrho}_2;\quad 0 = \bar{\bar{\varrho}}_2 + \bar{\varrho}_3;\ \text{etc.} \ldots 0 = \bar{\bar{\varrho}}_{n-1} + \bar{\varrho}_n.$$

But the first system of equations gives $0 = \bar{\varrho}_s + \bar{\bar{\varrho}}_s$, whatever whole number s may be, and the second line of that just exhibited is expressed by $0 = \bar{\varrho}_{s-1} + \bar{\bar{\varrho}}_s$, hence by comparing these two last equations

$$\bar{\varrho}_s = \bar{\varrho}_{s-1},$$

which shows that every phial of the system is equally charged. Moreover, if we sum up vertically, each of the columns of the first system, there will arise in virtue of the second

$$\bar{\varrho}_1 + \bar{\varrho}_2 + \bar{\varrho}_3 \ldots\ldots + \bar{\varrho}_n = \frac{\beta}{4\pi\theta}$$

$$\bar{\bar{\varrho}}_1 + \bar{\bar{\varrho}}_2 + \bar{\bar{\varrho}}_3 \ldots\ldots + \bar{\bar{\varrho}}_n = \frac{-\beta}{4\pi\theta}.$$

We therefore see, that the total charge of all the phials is precisely the same, as that which one only would receive, if placed in communication with the same conductor, provided its exterior coating were connected with the earth. Hence this mode of charging, although it may save time, will never produce a greater accumulation of fluid, than would take place, if one phial only were employed.

9.

Conceive now, a hollow shell of perfectly conducting matter, of any form and thickness whatever, to be acted upon by any electrified bodies, situate without it; and suppose them to induce an electrical state in the shell;

then will this induced state be such, that the total action on an electrified particle, placed any where within it, will be absolutely null.

For let V represent the value of the total potential function, at any point p within the shell, then we shall have at its inner surface, which is a closed one,

$$\overline{V} = \beta;$$

β being the constant quantity, which expresses the value of the potential function, within the substance of the shell, where the electricity is, by the supposition, in equilibrium, in virtue of the actions of the exterior bodies, combined with that arising from the electricity induced in the shell itself. Moreover, V evidently satisfies the equation $0 = \delta V$, and has no singular value within the closed surface to which it belongs: it follows therefore, from art. 5, that its general value is

$$V = \beta,$$

and as the forces acting upon p, are given by the differentials of V, these forces are evidently all equal to *zero*.

If, on the contrary, the electrified bodies are all within the shell, and its exterior surface is put in communication with the earth, it is equally easy to prove, that there will not be the slightest action on any electrified point exterior to it; but, the action of the electricity induced on its inner surface, by the electrified bodies within it, will exactly balance the direct action of the bodies themselves. Or more generally:

Suppose we have a hollow, and perfectly conducting shell, bounded by any two closed surfaces, and a number of electrical bodies are placed, some within and some without it, at will; then, if the inner surface and interior bodies be called the interior system; also, the outer surface and exterior bodies the exterior system; all the electrical phenomena of the interior system, relative to attractions, repulsions, and densities, will be the same as would take place if there were no exterior system, and the inner surface were a perfect conductor, put in communication with the earth; and all those of the exterior system will be the same, as if the interior one did not exist, and the outer surface were a perfect conductor, containing a quantity of electricity, equal to the whole of that originally contained in the shell itself, and in all the interior bodies.

This is so direct a consequence of what has been shown in articles 4 and 5, that a formal demonstration would be quite superfluous, as it is easy to see, the only difference which could exist, relative to the interior system,

between the case where there is an exterior system, and where there is not one, would be in the addition of a constant quantity, to the total potential function within the exterior surface, which constant quantity must necessarily disappear in the differentials of this function, and consequently, in the values of the attractions, repulsions, and densities, which all depend on these differentials alone. In the exterior system there is not even this difference, but the total potential function exterior to the inner surface is precisely the same, whether we suppose the interior system to exist or not.

10.

The consideration of the electrical phenomena, which arise from spheres variously arranged, is rather interesting, on account of the case with which all the results obtained from theory, may be put to the test of experiment; but, the complete solution of the simple case of two spheres only, previously electrified, and put in presence of each other, requires the aid of a profound analysis, and has been most ably treated by M. ***Poisson*** (Mém. de l'Institut. 1811). Our object, in the present article, is merely to give one or two examples of determinations, relative to the distribution of electricity on spheres, which may be expressed by very simple formulae.

Suppose a spherical surface whose radius is a, to be covered with electric matter, and let its variable density be represented by ϱ; then if, as in the Méc. Céleste, we expand the potential function V, belonging to a point p within the sphere, in the form

$$V = U^{(0)} + U^{(1)}\frac{r}{a} + U^{(2)}\frac{r^2}{a^2} + U^{(3)}\frac{r^3}{a^3} + \text{etc.};$$

r being the distance between p and the centre of the sphere, and $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, etc. functions of the two other polar co-ordinates of p, it is clear, by what has been shown in the admirable work just mentioned, that the potential function V', arising from the same spherical surface, and belonging to a point p', exterior to this surface, at the distance r' from its centre, and on the radius r produced, will be

$$V' = U^{(0)}\frac{a}{r'} + U^{(1)}\frac{a^2}{r'^2} + U^{(2)}\frac{a^3}{r'^3} + \text{etc.}$$

If, therefore, we make $V = \varphi(r)$, and $V' = \psi(r')$, the two functions φ and ψ will satisfy the equation

$$\psi(r) = \frac{a}{r}\varphi\left(\frac{a^2}{r}\right) \quad \text{or} \quad \varphi(r) = \frac{a}{r}\psi\left(\frac{a^2}{r}\right).$$

But (art. 4)

$$4\pi\varrho = -\frac{d\overline{V}}{dw} - \frac{d\overline{V}'}{dw'} = +\frac{d\overline{V}}{dr} - \frac{d\overline{V}'}{dr'} = \varphi'(a) - \psi'(a),$$

and the equation between φ and ψ, in its first form, gives, by differentiation,

$$\psi'(r) = -\frac{a}{r^2}\varphi\left(\frac{a^2}{r}\right) - \frac{a^3}{r^3}\varphi'\left(\frac{a^2}{r}\right).$$

Making now $r = a$ there arises

$$\psi'(a) = -\frac{\varphi(a)}{a} - \varphi'(a);$$

φ' and ψ' being the characteristics of the differential co-efficients of φ and ψ, according to *Lagrange's* notation.

In the same way the equation in its second form yields

$$\varphi'(a) = -\frac{\psi(a)}{a} - \psi'(a).$$

These substituted successively, in the equation by which ϱ is determined, we have the following

$$(9.) \quad \begin{cases} 4\pi\varrho = 2\varphi'(a) + \dfrac{\varphi(a)}{a} = 2\dfrac{d\overline{V}}{dr} + \dfrac{\overline{V}}{a} \\ 4\pi\varrho = -2\psi'(a) - \dfrac{\psi(a)}{a} = -2\dfrac{d\overline{V}'}{dr'} - \dfrac{\overline{V}'}{a}. \end{cases}$$

If, therefore, the value of the potential function be known, either for the space within the surface, or, for that without it, the value of the density ϱ will be immediately given, by one or other of these equations.

From what has preceded, we may readily determine how the electric fluid will distribute itself, in a conducting sphere whose radius is a, when acted upon by any bodies situate without it; the electrical state of these bodies being given. In this case, we have immediately the value of the potential function arising from them. Let this value, for any point p within the sphere, be represented by A; A being a function of the radius r, and two other polar co-ordinates. Then the whole of the electricity will be carried to the surface (art. 1), and if V be the potential function arising from this electrified surface, for the same point p, we shall have, in virtue of the equilibrium within the sphere,

$$V + A = \beta \quad \text{or} \quad V = \beta - A;$$

β being a constant quantity. This value of V being substituted in the first

of the equations (9), there results

$$4\pi\varrho = -2\frac{\overline{dA}}{dr} - \frac{\overline{A}}{a} + \frac{\beta}{a};$$

the horizontal lines indicating, as before, that the quantities under them belong to the surface itself.

In case the sphere communicates with the earth, β is evidently equal to *zero*, and ϱ is completely determined by the above: but if the sphere is insulated, and contains any quantity Q of electricity, the value of β may be ascertained as follows: Let V' be the value of the potential function without the surface, corresponding to the value $V = \beta - A$ within it; then, by what precedes

$$V' = \frac{\beta}{r'} - A';$$

A' being determined from A by the following equations:

$$A = \varphi_i(r), \quad \psi_i(r) = \frac{a}{r}\varphi_i\left(\frac{a^2}{r}\right), \quad A' = \psi_i(r'),$$

and r', being the radius corresponding to the point p', exterior to the sphere, to which A' belongs. When r' is infinite, we have evidently $V' = \frac{Q}{r'}$. Therefore by equating

$$\frac{Q}{r'} = \frac{\beta}{r'} - A' \quad \text{or} \quad \beta = Q + r'A';$$

r' being made infinite. Having thus the value of β, the value of ϱ becomes known.

To give an example of the application of the second equation in ϱ; let us suppose a spherical conducting surface, whose radius is a, in communication with the earth, to be acted upon by any bodies situate within it, and B' to be the value of the potential function arising from them, for a point p' exterior to it. The total potential function, arising from the interior bodies and surface itself, will evidently be equal to *zero* at this surface, and consequently (art. 5), at any point exterior to it. Hence $V' + B' = 0$; V' being due to the surface. Thus the second of the equations (9) becomes

$$4\pi\varrho = 2\frac{\overline{dB'}}{dr'} + \frac{\overline{B'}}{a}.$$

We are therefore able, by means of this very simple equation, to determine the density of the electricity induced on the surface in question.

Suppose now, all the interior bodies to reduce themselves to a single point P, in which a unit of electricity is concentrated, and f to be the distance Pp': the potential function arising from P will be $\frac{1}{f}$ and hence

$$B' = \frac{1}{f};$$

r' being, as before, the distance between p' and the centre O of the shell. Let now b represent the distance OP, and θ the angle POp', then will $f^2 = b^2 - 2br' \cdot \cos\theta + r'^2$. From which equation we deduce successively,

$$\left(\frac{df}{dr'}\right) = \frac{r' - b\cos\theta}{f}, \quad \text{and} \quad 2\frac{dB'}{dr'} = -\frac{2}{f^2}\left(\frac{df}{dr'}\right) = \frac{-2r' + 2b\cdot\cos\theta}{f^3}.$$

Making $r' = a$ in this, and in the value of B' before given, in order to obtain those which belong to the surface, there results

$$2\frac{d\overline{B'}}{dr'} + \frac{\overline{B'}}{a} = \frac{-2a^2 + 2ab\cdot\cos\theta + f^2}{af^3} = \frac{b^2 - a^2}{af^3}.$$

This substituted in the general equation written above, there arises

$$\varrho = \frac{b^2 - a^2}{4\pi a f^3}.$$

If P is supposed to approach infinitely near to the surface, so that $b = a - \alpha$; α being an infinitely small quantity, this would become

$$\varrho = \frac{-\alpha}{4\pi f^3}.$$

In the same way, by the aid of the equation between A and ϱ, the density of the electric fluid, induced on the surface of a sphere whose radius is a, when the electrified point P is exterior to it, is found to be

$$\varrho = \frac{a^2 - b^2}{4\pi a f^3};$$

supposing the sphere to communicate, by means of an infinitely fine wire, with the earth, at so great a distance, that we might neglect the influence of the electricity induced upon it by the action of P. If the distance of P from the surface, be equal to an infinitely small quantity α, we shall have in this case, as in the foregoing,

$$\varrho = \frac{-\alpha}{2\pi \cdot f^3}.$$

From what has preceded, we may readily deduce the general value of V, belonging to any point P, within the sphere, when $\overline{V}$ its value at the

surface is known. For (ϱ), the density induced upon an element $d\sigma$ of the surface, by a unit of electricity concentrated in P, has just been shown to be

$$\frac{b^2-a^2}{4\pi a f^3};$$

f being the distance $P, d\sigma$. This substituted in the general equation (6), art. 5, gives

$$(10.) \qquad V = -\int d\sigma\,(\varrho)\,\overline{V} = \frac{a^2-b^2}{4\pi a}\int \frac{d\sigma}{f^3}\,\overline{V}.$$

In the same way we shall have, when the point P is exterior to the sphere,

$$(11.) \qquad V = \frac{b^2-a^2}{4\pi a}\int \frac{d\sigma}{f^3}\,\overline{V}.$$

The use of these two equations will appear almost immediately, when we come to determine the distribution of the electric fluid, on a thin spherical shell, perforated with a small circular orifice.

The results just given, may be readily obtained by means of *Laplace's* much admired analysis (Méc. Cél. Liv. 3, Ch. 2), and indeed, our general equations (9), flow very easily from the equation (2) art. 10 of that chapter. Want of room compels me to omit these confirmations of our analysis, and this I do the more freely, as the manner of deducing them must immediately occur, to any one who has read this part of the Mécanique Céleste.

Conceive now, two spheres S and S', whose radii are a and a', to communicate with each other by means of an infinitely fine wire: it is required to determine the ratio of the quantities of electric fluid on these spheres, when in a state of equilibrium; supposing the distance of their centres to be represented by b.

The value of the potential function, arising from the electricity on the surface of S, at a point p, placed in its centre, is

$$\int \frac{\varrho d\sigma}{a} = \frac{1}{a}\int \varrho d\sigma = \frac{Q}{a};$$

$d\sigma$ being an element of the surface of the sphere, ϱ the density of the fluid on this element, and Q the total quantity on the sphere. If now, we represent by F', the value of the potential function for the same point p, arising from S', we shall have, by adding together both parts,

$$F' + \frac{Q}{a};$$

the value of the total potential function belonging to p, the centre of S. In

like manner, the value of this function at p', the centre of S', will be

$$F + \frac{Q'}{a'}:$$

F being the part arising from S, and Q' the total quantity of electricity on S'. But in consequence of the equilibrium of the system, the total potential function throughout its whole interior is a constant quantity. Hence

$$F' + \frac{Q}{a} = F + \frac{Q'}{a'}.$$

Although it is difficult to assign the rigorous values of F and F'; yet, when the distance between the surfaces of the two spheres is considerable, compared with the radius of one of them, it is easy to see, that F and F' will be very nearly the same, as if the electricity on each of the spheres producing them, was concentrated in their respective centres, and therefore, we have very nearly

$$F = \frac{Q}{b} \quad \text{and} \quad F' = \frac{Q'}{b}.$$

These substituted in the above, there arises

$$\frac{Q}{b} + \frac{Q'}{a'} = \frac{Q'}{b} + \frac{Q}{a} \quad \text{i. e.} \quad Q\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = Q'\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{b}\right).$$

Thus the ratio of Q to Q' is given by a very simple equation, whatever may be the form of the connecting wire, provided it be a very fine one.

If we wished to put this result of calculation to the test of experiment, it would be more simple to write P and P' for the mean densities of the fluid on the spheres, or those which would be observed when, after being connected as above, they were separated to such a distance, as not to influence each other sensibly. Then since

$$Q = 4\pi a^2 P \quad \text{and} \quad Q' = 4\pi a'^2 P',$$

we have by substitution, etc.

$$\frac{P}{P'} = \frac{a(b-a)}{a'(b-a')}.$$

We therefore see, that when the distance b between the centres of the spheres is very great, the mean densities will be inversely as the radii; and these last remaining unchanged, the density on the smaller sphere will decrease, and that on the larger increase in a very simple way, by making them approach each other.

Lastly, let us endeavour to determine the law of the distribution of the electric fluid, when in equilibrium on a very thin spherical shell, in which there is a small circular orifice. Then, if we neglect quantities of the order of the thickness of the shell, compared with its radius, we may consider it as an infinitely thin spherical surface, of which the greater segment S is a perfect conductor, and the smaller one s constitutes the circular orifice. In virtue of the equilibrium, the value of the potential function, on the conducting segment, will be equal to a constant quantity, as F, and if there were no orifice, the corresponding value of the density would be

$$\frac{F}{4\pi a};$$

a being the radius of the spherical surface. Moreover on this supposition, the value of the potential function for any point P, within the surface, would be

$$F.$$

Let therefore, $\frac{F}{4\pi a}+\varrho$ represent the general value of the density, at any point on the surface of either segment of the sphere, and $F+V$, that of the corresponding potential function for the point P. The value of the potential function for any point on the surface of the sphere, will be $F+\overline{V}$, which equated to F, its value on S, gives for the whole of this segment

$$0 = \overline{V}.$$

Thus the equation (10) of this article becomes

$$V = \frac{a^2-b^2}{4\pi a}\int\frac{d\sigma}{f^3}\overline{V};$$

the integral extending over the surface of the smaller segment s only, which, without sensible error, may be considered as a plane.

But, since it is evident, that ϱ is the density corresponding to the potential function V, we shall have for any point on the segment s, treated as a plane,

$$\varrho = \frac{-1}{2\pi}\frac{d\overline{V}}{dw},$$

as it is easy to see, from what has been before shown (art. 4); dw being perpendicular to the surface, and directed towards the centre of the sphere; the horizontal line always serving to indicate quantities belonging to the surface. When the point P is very near the plane s, and z is a perpendicular from P upon s, z will be a very small quantity, of which the square and

higher powers may be neglected. Thus $b = a - z$, and by substitution

$$V = \frac{z}{2\pi}\int\frac{d\sigma}{f^3}\,\overline{V};$$

the integral extending over the surface of the small plane s, and f being, as before, the distance P, $d\sigma$. Now $\frac{d\overline{V}}{dw} = \frac{d\overline{V}}{dz}$ at the surface of s, and $\frac{z}{f^3} = -\frac{d}{dz}\frac{1}{f}$; hence

$$\varrho = \frac{-1}{2\pi}\frac{d\overline{V}}{dw} = \frac{-1}{2\pi}\frac{d\overline{V}}{dz} = \frac{-1}{4\pi^2}\frac{d}{dz}\int\frac{zd\sigma}{f^3}\,\overline{V} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{d^2}{dz^2}\int\frac{d\sigma}{f}\,\overline{V};$$

provided we suppose $z = 0$ at the end of the calculus. Now the density $\frac{F}{4\pi a} + \varrho$, upon the surface of the orifice s, is equal to *zero*, and therefore, we have for the whole of this surface $\varrho = -\frac{F}{4\pi a}$. Hence by substitution

$$(12.) \qquad \frac{-F\pi}{a} = \frac{d^2}{dz^2}\int\frac{d\sigma}{f}\,\overline{V};$$

the integral extending over the whole of the plane s, of which $d\sigma$ is an element, and z being supposed equal to *zero*, after all the operations have been effected.

It now only remains to determine the value of $\overline{V}$ from this equation. For this, let β now represent the linear radius of s, and y, the distance between its centre C and the foot of the perpendicular z: then if we conceive an infinitely thin oblate spheroid, of uniform density, of which the circular plane s constitutes the equator, the value of the potential function at the point P, arising from this spheroid, will be

$$\varphi = k\int\frac{d\sigma}{f}\sqrt{(\beta^2 - \eta^2)};$$

η being the distance $d\sigma$, C, and k a constant quantity. The attraction exerted by this spheroid, in the direction of the perpendicular z, will be $-\frac{d\varphi}{dz}$, and by the known formulae relative to the attractions of homogeneous spheroids, we have

$$-\frac{d\varphi}{dz} = \frac{3Mz}{\beta^3}(\tan\theta - \theta);$$

M representing the mass of the spheroid, and θ being determined by the equations

$$\alpha^2 = \tfrac{1}{2}(z^2 + y^2 - \beta^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{\{(z^2 + y^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^2 z^2\}}$$

$$\tan\theta = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Supposing now z very small, since it is to vanish at the end of the calculus, and $\gamma < \beta$, in order that the point $\boldsymbol{P}$ may fall within the limits of s, we shall have by neglecting quantities of the order z^2 compared with those retained

$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{z}{\sqrt{(\beta^2-\gamma^2)}};$$

and consequently

$$-\frac{d\varphi}{dz} = \frac{-d}{dz}\boldsymbol{k}\int\frac{d\sigma}{f}\sqrt{(\beta^2-\eta^2)} = \frac{3\boldsymbol{M}\sqrt{(\beta^2-\gamma^2)}}{\beta^3} - \frac{3\boldsymbol{M}\pi}{2\beta^3}z.$$

This expression, being differentiated again relative to z, gives

$$\frac{d^2}{dz^2}\boldsymbol{k}\int\frac{d\sigma}{f}\sqrt{(\beta^2-\eta^2)} = \frac{3\boldsymbol{M}\pi}{2\beta^3}.$$

But the mass $\boldsymbol{M}$ is given by

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{k}\int d\sigma\sqrt{(\beta^2-\eta^2)} = 2\pi\boldsymbol{k}\int\eta\boldsymbol{d}\eta\sqrt{(\beta^2-\eta^2)} = \frac{2\pi\boldsymbol{k}\beta^3}{3}.$$

Hence by substitution

$$\frac{d^2}{dz^2}\boldsymbol{k}\int\frac{d\sigma}{f}\sqrt{(\beta^2-\eta^2)} = \pi^2\boldsymbol{k}:$$

which expression is rigorously exact when $z = 0$. Comparing this result with the equation (12) of the present article, we see that if $\overline{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{k}\sqrt{(\beta^2-\eta^2)}$, the constant quantity $\boldsymbol{k}$ may be always determined, so as to satisfy (12). In fact, we have only to make

$$\pi^2\boldsymbol{k} = \frac{-\boldsymbol{F}\pi}{a} \quad \text{i. e.} \quad \boldsymbol{k} = \frac{-\boldsymbol{F}}{a\pi}.$$

Having thus the value of $\overline{\boldsymbol{V}}$, the general value of $\boldsymbol{V}$ is known, since

$$\boldsymbol{V} = \frac{a^2-b^2}{4\pi a}\int\frac{d\sigma}{f^3}\overline{\boldsymbol{V}} = -\frac{a^2-b^2}{4\pi az}\frac{d}{dz}\int\frac{d\sigma}{f}\,(\overline{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{k}\sqrt{(\beta^2-\eta^2)})$$

$$= \frac{a^2-b^2}{4\pi az}\times -\frac{d\varphi}{dz} = \frac{a^2-b^2}{4\pi az}\times\frac{3\boldsymbol{M}z}{\beta^3}(\tan\theta-\theta) = -\frac{a^2-b^2}{2\pi a^2}\boldsymbol{F}(\tan\theta-\theta).$$

The value of the potential function, for any point $\boldsymbol{P}$ within the shell, being $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{V}$, and that in the interior of the conducting matter of the shell being constant, in virtue of the equilibrium, the value ϱ' of the density, at any point on the inner surface of the shell, will be given immediately by the general formula (4) art. 4. Thus

$$\varrho' = \frac{-1}{4\pi}\frac{d\overline{\boldsymbol{V}}}{dw} = \frac{1}{4\pi}\frac{d\overline{\boldsymbol{V}}}{db} = \frac{+\boldsymbol{F}}{4\pi^2 a}(\tan\theta-\theta):$$

in which equation, the point P is supposed to be upon the element $d\sigma'$ of the interior surface, to which ϱ' belongs. If now, R be the distance between C, the centre of the orifice, and $d\sigma'$, we shall have $R^2 = y^2 + z^2$, and by neglecting quantities of the order $\frac{\beta^2}{R^2}$ compared with those retained, we have successively

$$\alpha = R, \quad \theta = \frac{\beta}{R} \quad \text{and} \quad \tan\theta - \theta = \tfrac{1}{3}\theta^3 = \frac{\beta^3}{3R^3}.$$

Thus the value of ϱ' becomes

$$\varrho' = \frac{F}{12\pi^2 a}\frac{\beta^3}{R^3}.$$

In the same way, it is easy to show from the equation (11) of this article, that ϱ'', the value of the density on an element $d\sigma''$ of the exterior surface of the shell, corresponding to the element $d\sigma'$ of the interior surface, will be

$$\varrho'' = \frac{F}{4\pi a} + \varrho',$$

which, on account of the smallness of ϱ' for every part of the surface, except very near the orifice s, is sensibly constant and equal to $\frac{F}{4\pi a}$, therefore

$$\frac{\varrho'}{\varrho''} = \frac{\beta^3}{3\pi \cdot R^3}:$$

which equation shows, how very small the density within the shell is, even when the orifice is considerable.

11.

The determination of the electrical phenomena, which result from long metallic wires, insulated and suspended in the atmosphere, depends upon the most simple calculations. As an example, let us conceive two spheres A and B, connected by a long slender conducting wire; then $\varrho dxdydz$ representing the quantity of electricity in an element $dxdydz$ of the exterior space, (whether it results from the ground in the vicinity of the wire having become slightly electrical, or from a mist, or even a passing cloud,) and r being the distance of this element from A's centre; also r' its distance from B's, the value of the potential function at A's centre, arising from the whole exterior space, will be

$$\int \frac{\varrho dxdydz}{r},$$

and the value of the same function at B's centre, will be

$$\int \frac{\varrho dx dy dz}{r'},$$

the integrals extending over all the space exterior to the conducting system under consideration.

If now, Q be the total quantity of electricity on A's surface, and Q' that on B's, their radii being a and a'; it is clear, the value of the potential function at A's centre, arising from the system itself, will be

$$\frac{Q}{a};$$

seeing that, we may neglect the part due to the wire, on account of its fineness, and that due to the other sphere, on account of its distance. In a similar way, the value of the same function at B's centre, will be found to be

$$\frac{Q'}{a'}.$$

But (art. 1), the value of the total potential function must be constant troughout the whole interior of the conducting system, and therefore, its value at the two centres must be equal; hence

$$\frac{Q}{a} + \int \frac{\varrho dx dy dz}{r} = \frac{Q'}{a'} + \int \frac{\varrho dx dy dz}{r'}.$$

Although ϱ, in the present case, is exceedingly small, the integrals contained in this equation, may not only be considerable, but very great, since they are of the second dimension relative to space. The spheres, when at a great distance from each other, may therefore become highly electrical, according to the observations of experimental philosophers, and the charge they will receive in any proposed case may readily be calculated; the value of ϱ being supposed given. When one of the spheres, B for instance, is connected with the ground, Q' will be equal to *zero*, and consequently Q immediately given. If, on the contrary, the whole system were insulated and retained its natural quantity of electricity, we should have, neglecting that on the wire,

$$0 = Q + Q',$$

and hence Q and Q' would be known.

If it were required, to determine the electrical state of the sphere A, when in communication with a wire, of which one extremity is elevated into

the atmosphere, and terminates in a fine point p, we should only have to make the radius of B, and consequently, Q', vanish in the expression before given. Hence in this case

$$\frac{Q}{a} = \int \frac{\varrho\, dx\, dy\, dz}{r'} - \int \frac{\varrho\, dx\, dy\, dz}{r};$$

r' being the distance between p and the element $dx\,dy\,dz$. Since the object of the present article, is merely to indicate the cause of some phenomena of atmospherical electricity, it is useless to extend it to a greater length, more particularly, as the extreme difficulty of determining correctly the electrical state of the atmosphere at any given time, precludes the possibility of putting this part of the theory to the test of accurate experiment.

12.

Supposing the form of a conducting body to be given, it is in general impossible to assign, rigorously, the law of the density of the electric fluid on its surface in a state of equilibrium, when not acted upon by any exterior bodies, and, at present, there has not even been found any convenient mode of approximation applicable to this problem. It is, however, extremely easy to give such forms to conducting bodies, that this law shall be rigorously assignable by the most simple means. The following method, depending upon art. 4 and 5, seems to give to these forms the greatest degree of generality of which they are susceptible, as, by a tentative process, any form whatever might be approximated indefinitely.

Take any continuous function V', of the rectangular co-ordinates x', y', z', of a point p', which satisfies the partial differential equation $0 = \delta V'$, and vanishes when p' is removed to an infinite distance from the origin of the co-ordinates.

Choose a constant quantity b, such that $V' = b$ may be the equation of a closed surface A, and that V' may have no singular values, so long as p' is exterior to this surface: then if we form a conducting body, whose outer surface is A, the density of the electric fluid in equilibrium upon it, will be represented by

$$\varrho = \frac{-h}{4\pi} \frac{d\overline{V'}}{dw'},$$

and the potential function due to this fluid, for any point p', exterior to the body, will be

$$hV';$$

h being a constant quantity dependant upon the total quantity of electricity Q, communicated to the body. This is evident from what has been proved in the articles cited.

Let R represent the distance between p', and any point within A; then the potential function arising from the electricity upon it, will be expressed by $\frac{Q}{R}$, when R is infinite. Hence the condition

$$\frac{Q}{R} = hV' \text{ (} R \text{ being infinite)}$$

which will serve to determine h, when Q is given.

In the application of this general method, we may assume for V', either some analytical expression containing the co-ordinates of p', which is known to satisfy the equation $0 = \delta V'$, and to vanish when p' is removed to an infinite distance from the origin of the co-ordinates; as, for instance, some of those given by *Laplace* (Méc. Céleste, Liv. 3, Ch. 2), or, the value a potential function, which would arise from a quantity of electricity any how distributed within a finite space, at a point p' without that space; since this last will always satisfy the conditions to which V' is subject.

It may be proper to give an example of each of these cases. In the first place, let us take the general expression given by *Laplace*,

$$V = \frac{U^{(0)}}{r} + \frac{U^{(1)}}{r^2} + \frac{U^{(2)}}{r^3} + \text{etc.},$$

then, by confining ourselves to the two first terms, the assumed value of V' will be

$$V' = \frac{U^{(0)}}{r} + \frac{U^{(1)}}{r^2};$$

r being the distance of p' from the origin of the co-ordinates, and $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, etc. functions of the two other polar co-ordinates θ and ϖ. This expression by changing the direction of the axes, may always be reduced to the form

$$V' = \frac{2a}{r} + \frac{k^2 \cos\theta}{r^2};$$

a and k being two constant quantities, which we will suppose positive. Then if b be a very small positive quantity, the form of the surface given by the equation $V' = b$, will differ but little from a sphere, whose radius is $\frac{2a}{b}$: by gradually increasing b, the difference becomes greater, until $b = \frac{a^2}{k^2}$: and

afterwards, the form assigned by $V' = b$, becomes improper for our purpose. Making therefore $b = \frac{a^2}{k^2}$, in order to have a surface differing as much from a sphere, as the assumed value of V' admits, the equation of the surface A becomes

$$V' = \frac{2a}{r} + \frac{k^2 \cos\theta}{r^2} = \frac{a^2}{k^2}.$$

From which we obtain

$$r = \frac{k^2}{a}(1 + \sqrt{2}\cos\tfrac{1}{2}\theta).$$

If now φ represents the angle formed by dr and dw', we have

$$\frac{-dr}{rd\theta} = \frac{\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\theta}{2+2\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\theta} = \tan\varphi,$$

and as the electricity is in equilibrium upon A, the force with which a particle p, infinitely near to it, would be repelled, must be directed along dw': but the value of this force is $-\frac{d\overline{V'}}{dw'}$, and consequently its effect in the direction of the radius r, and tending to increase it, will be $-\frac{d\overline{V'}}{dw'}\cos\varphi$. This last quantity is equally represented by $-\frac{d\overline{V'}}{dr}$, and therefore

$$-\frac{d\overline{V'}}{dr} = -\frac{d\overline{V'}}{dw'}\cos\varphi;$$

the horizontal lines over quantities, indicating, as before, that they belong to the surface itself. The value of $-\left(\frac{d\overline{V'}}{dw'}\right)$, deduced from this equation, is

$$-\frac{d\overline{V'}}{dw'} = \frac{-1}{\cos\varphi}\frac{d\overline{V'}}{dr} = \frac{1}{\cos\varphi}\left\{\frac{2a}{r^2} + \frac{2k^2\cos\theta}{r^3}\right\} = \frac{2a\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\theta}{r^2\cos\varphi},$$

this substituted in the general value of ϱ, before given, there arises

$$\varrho = \frac{-h}{4\pi}\frac{d\overline{V'}}{dw'} = \frac{ha\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\theta}{2\pi r^2\cos\varphi}.$$

Supposing Q is the quantity of electricity communicated to the surface, the condition

$$\frac{Q}{R} = hV \quad (\textit{where } R \textit{ is infinite})$$

before given, becomes, since r may here be substituted for R, seeing that it is measured from a point within the surface,

$$\frac{Q}{r} = \frac{2ah}{r} \quad \text{i. e.} \quad h = \frac{Q}{2a}.$$

We have thus the rigorous value of ϱ for the surface A whose equation is $r = \frac{k^2}{a}(1+\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\theta)$ when the quantity Q of electricity upon it is known, and by substituting for r and h their values just given, there results

$$\varrho = \frac{Qa^2\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\theta}{4\pi k^4\cos\varphi\,(1+\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\theta)^2}.$$

Moreover the value of the potential function for the point p' whose polar coordinates are r, θ, and ϖ, is

$$hV' = \frac{Q}{r} + \frac{Qk^2\cos\theta}{2ar^2}.$$

From which we may immediately deduce the forces acting on any point p' exterior to A.

In tracing the surface A, θ is supposed to extend from $\theta = 0$ to $\theta = \pi$, and ϖ, from $\varpi = 0$ to $\varpi = 2\pi$: it is therefore evident, by constructing the curve whose equation is

$$r = \frac{k^2}{a}(1+\sqrt{2}\cos\tfrac{1}{2}\theta),$$

that the parts about P, where $\theta = \pi$, approximate continually in form towards a cone whose apex is P, and as the density of the electricity at P is null, in the example before us, we may make this general inference: when any body whatever, has a part of its surface in the form of a cone, directed inwards; the density of the electricity in equilibrium upon it, will be null at its apex, precisely the reverse of what would take place, if it were directed outwards, for then, the density at the apex would become infinite. *)

---

*) Since this was written, I have obtained formulae serving to express, generally, the law of the distribution of the electric fluid near the apex O of a cone, which forms part of a conducting surface of revolution having the same axis. From these formulae it results that, when the apex of the cone is directed inwards, the density of the electric fluid at any point p, near to it, is proportional to r^{n-1}; r being the distance Op, and the exponent n very nearly such as would satisfy the simple equation $(4n+2)\beta = 3\pi$: where 2β is the angle at the summit of the cone. If 2β exceeds π, this summit is directed outwards, and when the excess is not very considerable, n will be given as above: but 2β still increasing, until it becomes $2\pi - 2\gamma$; the angle 2γ at the summit of the cone, which is now directed outwards, being very small, n will be given by $2n\log\frac{2}{\gamma} = 1$, and in case the conducting body is a sphere whose radius is b, on which P represents the mean density of the electric fluid, ϱ, the value of the density near the apex O, will be determined by the formula

$$\varrho = \frac{2Pbn}{(a+b)\gamma}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1};$$

a being the length of the cone.

As a second example, we will assume for V', the value of the potential function arising from the action of a line uniformly covered with electricity. Let $2a$ be the length of the line, y the perpendicular falling from any point p' upon it, x the distance of the foot of this perpendicular form the middle of the line, and x' that of the element dx' from the same point: then taking the element dx', as the measure of the quantity of electricity it contains, the assumed value of V' will be

$$V' = \int \frac{dx'}{\sqrt{[y^2+(x-x')^2]}} = \log \frac{a-x+\sqrt{[y^2+(a-x)^2]}}{-a-x+\sqrt{[y^2+(a+x)^2]}};$$

the integral being taken from $x' = -a$ to $x' = +a$. Making this equal to a constant quantity $\log b$, we shall have, for the equation of the surface A,

$$\frac{a-x+\sqrt{[y^2+(a-x)^2]}}{-a-x+\sqrt{[y^2+(a+x)^2]}} = b,$$

which by reduction becomes

$$0 = y^2(1-b^2)^2 + x^2 . 4b(1-b)^2 - a^2 . 4b(1+b)^2.$$

We thus see that this surface is a spheroid produced by the revolution of an ellipsis about its greatest diameter; the semi-transverse axis being $a\frac{1+b}{1-b} = \beta$, and semi-conjugate $a\frac{2\sqrt{b}}{1-b} = \gamma$.

By differentiating the general value of V', just given, and substituting for y its value at the surface A, we obtain

$$\frac{d\overline{V}'}{dx} = \frac{-2x\frac{1-b}{1+b}}{\left(\frac{1+b}{1-b}\right)^2 a^2 - \left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2 x^2} = \frac{-2ab x}{\beta^4 - a^2x^2}.$$

Now writing φ for the angle formed by dx and dw', we have

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{ds}{-dy} = \frac{1-b}{2x\sqrt{b}}\sqrt{\left[\left(\frac{1+b}{1-b}\right)^4 a^2 - x^2\right]} = \frac{\sqrt{(\beta^4-a^2x^2)}}{\gamma x};$$

ds being an element of the generating ellipsis. Hence, as in the preceding example, we shall have,

$$\frac{d\overline{V}'}{dw'} = \frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{d\overline{V}'}{dx} = \frac{-2ab}{\gamma\sqrt{(\beta^4-a^2x^2)}}.$$

On the surface A therefore, in this example, the general value of ϱ is

$$\varrho = \frac{-h}{4\pi}\frac{d\overline{V}'}{dw'} = \frac{ah\beta}{2\pi\gamma\sqrt{(\beta^4-a^2x^2)}},$$

and the potential function for any point p', exterior to A, is

$$hV' = h\log\frac{a-x+\sqrt{[y^2+(a-x)^2]}}{-a-x+\sqrt{[y^2+(a+x)^2]}}.$$

Making now x and y both infinite, in order that p' may be at an infinite distance, there results

$$hV' = \frac{2ah}{\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

and thus the condition determining h, in Q, the quantity of electricity upon the surface, is, since R may be supposed equal to $\sqrt{(x^2+y^2)}$,

$$\frac{Q}{R} = hV' = \frac{2ah}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \quad \text{i. e.} \quad h = \frac{Q}{2a}.$$

These results of our analysis, agree with what has been long known concerning the law of the distribution of electric fluid on the surface of a spheroid, when in a state of equilibrium.

13.

In what has preceded, we have confined ourselves to the consideration of perfect conductors. We will now give an example of the application of our general method, to a body that is supposed to conduct electricity imperfectly, and which will, moreover, be interesting, as it serves to illustrate the magnetic phenomena, produced by the rotation of bodies under the influence of the earth's magnetism.

If any solid body whatever of revolution, turn about its axis, it is required to determine what will take place, when the matter of this solid is not perfectly conducting, supposing it under the influence of a constant electrical force, acting parallel to any given right line fixed in space, the body being originally in a natural state.

Let β designate the coercive force of the body, which we will suppose analogous to friction in its operation, so that as long as the total force acting upon any particle within the body is less than β, its electrical state shall remain unchanged, but when it begins to exceed β, a change shall ensue.

In the first place, suppose the constant electrical force, which we will designate by b, to act in a direction parallel to a line passing through the centre of the body, and perpendicular to its axis of revolution; and let us consider this line as the axis of x, that of revolution being the axis of z, and y the other rectangular co-ordinate of a point p, within the body and

fixed in space. Thus, if V be the value of the total potential function for the same point p, at any instant of time, arising from the electricity of the body and the exterior force,

$$bx + V$$

will be the part due to the body itself at the same instant; since $-bx$ is that due to the constant force b, acting in the direction of x, and tending to increase it. If now we make

$$z = r\cos\theta, \quad x = r\sin\theta\cos\varpi, \quad y = r\sin\theta\sin\varpi;$$

the angle ϖ being supposed to increase in the direction of the body's revolution, the part due to the body itself becomes

$$br\sin\theta\cos\varpi + V.$$

Were we to suppose the value of the potential function V given at any instant, we might find its value at the next instant, by conceiving, that whilst the body moves forward through the infinitely small angle $d\omega$, the electricity within it shall remain fixed, and then be permitted to move, until it is in equilibrium with the coercive force.

Now the value of the potential function at p, arising from the body itself, after having moved through the angle $d\omega$ (the electricity being fixed), will evidently be obtained by changing ϖ into $\varpi - d\omega$ in the expression just given, and is therefore

$$br\sin\theta\cos\varpi + V + br\sin\theta\sin\varpi\, d\omega - \frac{dV}{d\varpi}d\omega,$$

adding now the part $-bx = -br\sin\theta\cos\varpi$, due to the exterior bodies, and restoring x, y, etc. we have since $\frac{dV}{d\varpi} = -y\frac{dV}{dx} + x\frac{dV}{dy}$,

$$V + d\omega\left\{by + y\frac{dV}{dx} - x\frac{dV}{dy}\right\}$$

for the value of the total potential function at the end of the next instant, the electricity being still supposed fixed. We have now only to determine what this will become, by allowing the electricity to move forward until the total forces acting on points within the body, which may now exceed the coercive force by an infinitely small quantity, are again reduced to an equilibrium with it. If this were done, we should, when the initial state of the body was given, be able to determine, successively, its state for every one of the following instants. But since it is evident from the nature of the problem,

that the body, by revolving, will quickly arrive at a permanent state, in which the value of V will afterwards remain unchanged and be independent of its initial value, we will here confine ourselves to the determination of this permanent state. It is easy to see, by considering the forces arising from the new total potential function, whose value has just been given, that in this case the electricity will be in motion over the whole interior of the body, and consequently

$$\beta^2 = \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2,$$

which equation expresses that the total force to move any particle p, within the body, is just equal to β, the coercive force. Now if we can assume any value for V, satisfying the above, and such, that it shall reproduce itself after the electricity belonging to the new total potential function (art. 7), is allowed to find its equilibrium with the coercive force, it is evident this will be the required value, since the rest of the electricity is exactly in equilibrium with the exterior force b, and may therefore be here neglected. To be able to do this the more easily, conceive two new axes X', Y', in advance of the old ones X, Y, and making the angle γ with them; then the value of the new potential function, before given, becomes

$$V + d\omega . \left\{ by' \cos\gamma + bx' \sin\gamma + y' \frac{dV}{dx'} - x' \frac{dV}{dy'} \right\},$$

which, by assuming $V = \beta y'$, and determining γ by the equation

$$0 = b \sin\gamma - \beta,$$

reduces itself to

$$y' (\beta + b \cos\gamma \, d\omega).$$

Considering now the symmetrical distribution of the electricity belonging to this potential function, with regard to the plane whose equation is $0 = y'$, it will evident that, after the electricity has found its equilibrium, the value of V at this plane must be equal to *zero:* a condition which, combined with the partial differential equation before given, will serve to determine, completely, the value of V at the next instant, and this value of V will be

$$V = \beta y'.$$

We thus see that the assumed value of V reproduces itself at the end of the following instant, and is therefore the one required belonging to the permanent state.

If the body had been a perfect conductor, the value of V would evidently have been equal to *zero*, seeing that it was supposed originally in a natural state: that just found is therefore due to the rotation combined with the coercive force, and we thus see that their effect is to polarise the body in the direction of y' positive, making the angle $\frac{1}{2}\pi+\gamma$ with the direction of the constant force b; and the degree of polarity will be the same as would be produced by a force equal to β, acting in this direction on a perfectly conducting body of the same dimensions.

We have hitherto supposed the constant force to act in a direction parallel to the equatorial plane of the body, but whatever may be its direction, we may conceive it decomposed into two; one equal to b as before, and parallel to this plane, the other perpendicular to it, which last will evidently produce no effect on the value of V, as this is due to the coercive force, and would still be equal to *zero* under the influence of the new force, if the body conducted electricity perfectly.

Knowing the value of the potential function at the surface of the body, due to the rotation, its value for all the exterior space may be considered as determined (art. 5), and if the body be a solid sphere, may easily be expressed analytically; for it is evident (art. 7), from the value of V just given, that even in the present case all the electricity will be confined to the surface of the solid; and it has been shown (art. 10), that when the value of the potential function for the point p within a spherical surface, whose radius is a, is represented by

$$\varphi(r),$$

the value of the same function for a point p', situate without this sphere, on the prolongation of r, and at the distance r' from its centre, will be

$$\frac{a}{r'}\varphi\left(\frac{a^2}{r'}\right).$$

But we have seen that the value of V due to the rotation, for the point p, is

$$V=\beta y'=\beta r\cos\theta';$$

θ' being the angle formed by the ray r and the axis of y'; the corresponding value for the point p' will therefore be

$$V'=\frac{\beta a^3\cos\theta'}{r'^2}.$$

And hence, by differentiation, we immediately obtain the value of the forces

acting on any particle situate without the sphere, which arise from its rotation; but, if we would determine the total forces arising from the sphere, we must, to the value of the potential function just found, add that part which would be produced by the action of the constant force upon this sphere, when it is supposed to conduct electricity perfectly, which will be given in precisely the same way as the former. In fact, f designating the constant force, and θ'' the angle formed by r and a line parallel to the direction of f, the potential function arising from it, for the point p, will be

$$-rf\cos\theta'',$$

and consequently the part arising from the electricity, induced by its action, must be

$$+fr\cos\theta'',$$

seeing that their sum ought to be equal to *zero*. The corresponding value for the point p', exterior to the sphere, is therefore

$$\frac{fa^3\cos\theta''}{r'^2},$$

this added to the value of V', before found, will give the value of the total potential function for the point p', arising from the sphere itself.

It will be seen when we come to treat of the theory of magnetism, that the results of this theory, in general, agree very nearly with those which would arise from supposing the magnetic fluid at liberty to move from one part of a magnetized body to another; at least, for bodies whose magnetic powers admit of considerable developement, as iron and nickel for example; the errors of the latter supposition being of the order $1-g$ only; g being a constant quantity dependant on the nature of the body, which in those just mentioned, differs very little from unity. It is therefore evident that when a solid of revolution, formed of iron, is caused to revolve slowly round its axis, and placed under the influence of the earth's magnetic force f, the act of revolving, combined with the coercive force β of the body, will produce a new polarity, whose direction and quantity will be very nearly the same as those before determined. Now f having been supposed resolved into two forces, one equal to b in the plane of the body's equator, and another perpendicular to this plane; if β be very small compared with b, the angle γ will be very small, and the direction of the new polarity will be very nearly at right angles to the direction of b, a result which has been confirmed by

many experiments: but by our analysis we moreover see that when b is sufficiently reduced, the angle γ may be rendered sensible, and the direction of the new polarity will then form with that of b the angle $\frac{1}{2}\pi+\gamma$; γ being determined by the equation

$$\sin\gamma = \frac{\beta}{b}.$$

This would be very easily put to the test of experiment by employing a solid sphere of iron.

The values of the forces induced by the rotation of the body, which would be observed in the space exterior to it, may be obtained by differentiating that of V' before given, and will be found to agree with the observations of Mr. *Barlow* (Phil. Tran. 1825), on the supposition of β being very small.

As the experimental investigation of the magnetic phenomena developed by the rotation of bodies, has lately engaged the attention of several distinguished philosophers, it may not be amiss to consider the subject in a more general way, as we shall thus not only confirm the preceding analysis, but be able to show with what rapidity the body approaches that permanent state, which it has been the object of the preceding part of this article to determine.

Let us now, therefore, consider a body A fixed in space, under the influence of electric forces which vary according to any given law; then we might propose to determine the electrical state of the body, after a certain interval of time, from the knowledge of its initial state; supposing a constant coercive force to exist within it. To resolve this in its most general from, it would be necessary to distinguish between those parts of the body where the fluid was at rest, from the forces acting there being less than the coercive force, and those where it would be in motion; moreover these parts would vary at every instant, and the problem therefore become very intricate: were we however to suppose the initial state so chosen, that the total force to move any particle p within A, arising from its electric state and exterior actions, was then just equal to the coercive force β; also, that the alteration in the exterior forces should always be such, that if the electric fluid remained at rest during the next instant, this total force should no where be less than β; the problem would become more easy, and still possess a great degree of generality. For in this case, when the fluid is moveable, the whole force tending to move any particle p within A, will, at every instant, be

exactly equal to the coercive force. If therefore x, y, z, represent the co-ordinates of p, and V the value of the total potential function at any instant of time t, arising from the electric state of the body and exterior forces, we shall have the equation

$$(a.) \qquad \beta^2 = \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2,$$

whose general integral may be thus constructed:

Take the value of V arbitrarily over any surface whatever S, plane or curved, and suppose three rectangular co-ordinates w, w', w'', whose origin is at a point P on S: the axis of w being a normal to S, and those of $w'w''$, in its plane tangent. Then the values of $\frac{dV}{dw'}$ and $\frac{dV}{dw''}$ are known at the point P, and the value of $\frac{dV}{dw}$ will be determined by the equation

$$\left(\frac{dV}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dw'}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dw''}\right)^2 = \beta^2,$$

which is merely a transformation of the above.

Take now another point P_1, whose co-ordinates referred to these axes are $\frac{dV}{dw}$, $\frac{dV}{dw'}$ and $\frac{dV}{dw''}$, and draw a right line L through the points P, P_1, then will the value of V at any point p, on L, be expressed by

$$V_0 + \beta\lambda;$$

λ being the distance Pp, measured along the line L, considered as increasing in the direction PP_1, and V_0, the given value of V at P. For it is very easy to see that the value of V furnished by this construction, satisfies the partial differential equation (a), and is its general integral, moreover the system of lines L, L', L'', etc. belonging to the points P, P', P'', etc. on S, are evidently those along which the electric fluid tends to move, and will move during the following instant.

Let now $V + DV$ represent what V becomes at the end of the time $t + dt$; substituting this for V in (a) we obtain

$$(b.) \qquad 0 = \frac{dV}{dx}\cdot\frac{dDV}{dx} + \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dDV}{dy} + \frac{dV}{dz}\cdot\frac{dDV}{dz}.$$

Then, if we designate by $D'V$, the augmentation of the potential function, arising from the change which takes place in the exterior forces during the element of time dt,

$$DV - D'V$$

will be the increment of the potential function, due to the corresponding alterations $D\varrho$ and $D\varrho'$ in the densities of the electric fluid at the surface of A and within it, which may be determined from $DV - D'V$ by art. 7. But, by the known theory of partial differential equations, the most general value of DV satisfying (b), will be constant along every one of the lines L, L', L'', etc., and may vary arbitrarily in passing from one of them to another: as it is also along these lines the electric fluid moves during the instant dt, it is clear the total quantity of fluid in any infinitely thin needle, formed by them, and terminating in the opposite surfaces of A, will undergo no alteration during this instant. Hence therefore

$$(c.) \qquad 0 = \int D\varrho' dv + D\varrho d\sigma + D\varrho_{,} d\sigma_{,};$$

dv being an element of the volume of the needle, and $d\sigma$, $d\sigma_{,}$, the two elements of A's surface by which it is terminated. This condition, combined with the equation (b), will completely determine the value of DV, and we shall thus have the value of the potential function $V + DV$, at the instant of time $t + dt$, when its value V, at the time t, is known.

As an application of this general solution; suppose the body A is a solid of revolution, whose axis is that of the co-ordinate z, and let the two other axes X, Y, situate in its equator, be fixed in space. If now the exterior electric forces are such that they may be reduced to two, one equal to c, acting parallel to z, the other equal to b, directed parallel to a line in the plane (xy), making the variable angle φ with X; the value of the potential function arising from the exterior forces, will be

$$-zc - xb\cos\varphi - yb\sin\varphi;$$

where b and c are constant quantities, and φ varies with the time so as to be constantly increasing. When the time is equal to t, suppose the value of V to be

$$V = \beta(x\cos\varpi + y\sin\varpi):$$

then the system of lines L, L', L'', will make the angle ϖ with the plane (xz), and be perpendicular to another plane whose equation is

$$0 = x\cos\varpi + y\sin\varpi.$$

If during the instant of thime dt, φ becomes $\varphi + D\varphi$, the augmentation of the potential function due to the elementary change in the exterior forces, will be

$$D'V = (x\sin\varphi - y\cos\varphi)\, bD\varphi;$$

moreover the equation (b) becomes

$$(b'.) \qquad 0 = \cos\varpi \cdot \frac{dDV}{dx} + \sin\varpi \cdot \frac{dDV}{dy},$$

and therefore the general value of DV is

$$DV = DF\{y\cos\varpi - x\sin\varpi\,;\, z\};$$

DF being the characteristic of an infinitely small arbitrary function. But, it has been before remarked that the value of DV will be completely determined, by satisfying the equation (b) and the condition (c). Let us then assume

$$DF\{y\cos\varpi - x\sin\varpi;\, z\} = hD\varphi(y\cos\varpi - x\sin\varpi);$$

h being a quantity independent of x, y, z, and see if it be possible to determine h so as to satisfy the condition (c). Now on this supposition

$$\begin{aligned} DV - D'V &= hD\varphi(y\cos\varpi - x\sin\varpi) - (x\sin\varphi - y\cos\varphi)bd\varphi \\ &= D\varphi[y(h\cos\varpi + b\cos\varphi) - x(h\sin\varpi + b\cos\varphi)]. \end{aligned}$$

The value of $D\varrho'$ corresponding to this potential function is (art. 7)

$$D\varrho' = 0,$$

and on account of the parallelism of the lines L, L', etc. to each other, and to A's equator $d\sigma = d\sigma_1$. The condition (c) thus becomes

$$(c'.) \qquad 0 = D\varrho + D\varrho_1:$$

$D\varrho$ and $D\varrho_1$ being the elementary densities on A's surface at opposite ends of any of the lines L, L', etc. corresponding to the potential function $DV - D'V$. But it is easy to see from the form of this function, that these elementary densities at opposite ends of any line perpendicular to a plane whose equation is

$$0 = y(h\cos\varpi + b\cos\varphi) - x(h\sin\varpi + b\sin\varphi),$$

are equal and of contrary signs, and therefore the condition (c) will be satisfied by making this plane coincide with that perpendicular to L, L', etc., whose equation, as before remarked, is

$$0 = x\cos\varpi + y\sin\varpi;$$

that is the condition (c) will be satisfied, if h be determined by the equation

$$\frac{h\cos\varpi + b\cos\varphi}{\sin\varpi} = -\frac{h\sin\varpi + b\sin\varphi}{\cos\varpi},$$

which by reduction becomes

$$0 = h + b\cos(\varphi - \varpi),$$

and consequently

$$V+DV = \beta(x\cos\varpi+y\sin\varpi)+hD\varphi(y\cos\varpi-x\sin\varpi)$$
$$= \beta x\left(\cos\varpi+\frac{b}{\beta}\sin\varpi\cos(\varphi-\varpi)D\varphi\right)+\beta y\left(\sin\varpi-\frac{b}{\beta}\cos\varpi\cos(\varphi-\varpi)D\varphi\right)$$
$$= \beta x\cos\left(\varpi-\frac{b}{\beta}\cos(\varphi-\varpi)D\varphi\right)+\beta y\sin\left(\varpi-\frac{b}{\beta}\cos(\varphi-\varpi)D\varphi\right).$$

When therefore φ is augmented by the infinitely small angle $D\varphi$, ϖ receives the corresponding increment $-\frac{b}{\beta}\cos(\varphi-\varpi)D\varphi$, and the form of V remains unaltered; the preceding reasoning is consequently applicable to every instant, and the general relation between φ and ϖ expressed by

$$0 = D\varpi+\frac{b}{\beta}\cos(\varphi-\varpi)D\varphi:$$

a common differential equation, which by integration gives

$$H.e^{\varphi\cot\gamma} = \frac{\sin(\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2}\varpi-\frac{1}{2}\varphi)}{\sin(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2}\varpi-\frac{1}{2}\varphi)};$$

H being an arbitrary constant, and γ, as in the former part of this article, the smallest root of

$$0 = b\sin\gamma-\beta.$$

Let ϖ_0 and φ_0 be the initial values of ϖ and φ; then the total potential function at the next instant, if the electric fluid remained fixed, would be

$$V_1 = \beta(x\cos\varpi_0+y\sin\varpi_0)+(x\sin\varphi_0-y\cos\varphi_0)bd\varphi,$$

and the whole force to move a particle p, whose co-ordinates are x, y, z,

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dV_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV_1}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV_1}{dz}\right)^2\right]} = \beta+d\varphi.b\sin(\varphi_0-\varpi_0),$$

which, in order that our solution may be applicable, must not be less than β, and consequently the angle $\varphi_0-\varpi_0$ must be between 0 and π: when this is the case, ϖ is immediately determined from φ by what has preceded. In fact, by finding the value of H from the initial values ϖ_0 and φ_0, and making $\zeta=\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2}\varpi-\frac{1}{2}\varphi$, we obtain

$$\tan\zeta = \frac{\tan\zeta_0}{e^{(\varphi-\varphi_0)\cot\gamma}+\tan\gamma\tan\zeta_0(e^{(\varphi-\varphi_0)\cot\gamma}-1)};$$

ζ_0 being the initial value of ζ.

We have, in the latter part of this article, considered the body A at rest, and the line X', parallel to the direction of b, as revolving round it: but if, as in the former, we now suppose this line immovable and the body

to turn the contrary way, so that the relative motion of X' to X may remain unaltered, the electric state of the body referred to the axes X, Y, Z, evidently depending on this relative motion only, will consequently remain the same as before. In order to determine it on the supposition just made, let X' be the axis of x', one of the co-ordinates of p, referred to the rectangular axes X', Y', Z, also y', z, the other two; the direction $X'Y'$, being that in which A revolves. Then, if ϖ' be the angle the system of lines L, L', etc. forms with the plane (x', z), we shall have

$$\varpi + \varpi' = \varphi;$$

φ, as before stated, being the angle included by the axes X, X'. Moreover the general values of V and ζ will be

$$V = \beta(x' \cos\varpi' + y' \sin\varpi') \quad \text{and} \quad \zeta = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{2}\varpi',$$

and the initial condition, in order that our solution may be applicable, will evidently become $\varphi_0 - \varpi_0 = \varpi_0' =$ a quantity betwixt 0 and π.

As an example, let $\tan\gamma = \frac{1}{10}$, since we know by experiment that γ is generally very small; then taking the most unfavorable case, viz. where $\varpi_0' = 0$, and supposing the body to make one revolution only, the value of ζ, determined from its initial one, $\zeta_0 = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\varpi_0'$, will be found extremely small and only equal to a unit in the 27th decimal place. We thus see with what rapidity ζ decreases, and consequently, the body approaches to a permanent state, defined by the equation

$$0 = \zeta = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{2}\varpi'.$$

Hence, the polarity induced by the rotation is ultimately directed along a line, making an angle equal to $\frac{1}{2}\pi + \gamma$ with the axis X', which agrees with what was shown in the former part of this article.

The value of V at the body's surface being thus known at any instant whatever, that of the potential function at a point p' exterior to the body, together with the forces acting there, will be immediately determined as before.

Application of the preliminary results to the theory of magnetism.

14.

The electric fluid appears to pass freely from one part of a continuous conductor to another, but this is by no means the case with the magnetic fluid, even with respect to those bodies which, from their instantly returning to a natural state the moment the forces inducing a magnetic one are removed, must be considered, in a certain sense, as perfect conductors of magnetism. *Coulomb,* I believe, was the first who proposed to consider these as formed of an infinite number of particles, each of which conducts the magnetic fluid in its interior with perfect freedom, but which are so constituted that it is impossible there shall be any communication of it from one particle to the next. This hypotesis is now generally adopted by philosophers, and its consequences, as far as they have hitherto been developed, are found to agree with observation; we will therefore admit it in what follows, and endeavour thence to deduce, mathematically, the laws of the distribution of magnetism in bodies of any shape whatever.

Firstly, let us endeavour to determine the value of the potential function, arising from the magnetic state induced in a very small body A, by the action of constant forces directed parallel to a given right line; the body being composed of an infinite number of particles, all perfect conductors of magnetism and originally in a natural state. In order to deduce this more immediately from art. 6, we will conceive these forces to arise from an infinite quantity Q of magnetic fluid, concentrated in a point p on this line, at an infinite distance from A. Then the origin O of the rectangular co-ordinates being any where within A, if x, y, z, be those of the point p, and x', y', z', those of any other exterior point p', to which the potential function V arising from A belongs, we shall have (vide Méc. Cél. Liv. 3)

$$V = \frac{U^{(0)}}{r'} + \frac{U^{(1)}}{r'^2} + \frac{U^{(2)}}{r'^3} + \text{etc.};$$

$r' = \sqrt{(x' + y'^2 + z'^2)}$ being the distance Op'.

Moreover, since the total quantity of magnetic fluid in A is equal to *zero*, $U^{(0)} = 0$. Supposing now r' very great compared with the dimensions of the body, all the terms after $\frac{U^{(0)}}{r'^2}$ in the expression just given will be exceedingly small compared with this, by neglecting them, therefore, and substituting for $U^{(1)}$ its most general value, we obtain

$$V = \frac{U^{(1)}}{r'^2} = \frac{Ax' + By' + Cz'}{r'^3};$$

$A, B, C,$ being quantities independent of $x', y', z',$ but which may contain $x, y, z.$

Now (art. 6) the value of V will remain unaltered, when we change $x, y, z,$ into $x', y', z',$ and reciprocally. Therefore.

$$V = \frac{Ax' + By' + Cz'}{r'^3} = \frac{A'x + B'y + C'z}{r^3};$$

$A', B', C',$ being the same functions of $x', y', z',$ as $A, B, C,$ are of $x, y, z.$ Hence it is easy to see that V must be of the form

$$V = \frac{a''xx' + b''yy' + c''zz' + e''(xy' + yx') + f''(xz' + zx') + g''(yz' + zy')}{r^3 r'^3};$$

$a'', b'', c'', e'', f'', g'',$ being constant quantities.

If $X, Y, Z,$ represent the forces arising from the magnetism concentrated in $p,$ in the directions of $x, y, z,$ positive, we shall have

$$X = \frac{-Qx}{r^3}; \quad Y = \frac{-Qy}{r^3}; \quad Z = \frac{-Qz}{r^3};$$

and therefore V is of the form

$$V = \frac{a'Xx' + b'Yy' + c'Zz' + e'(Xy' + Yx') + f'(Xz' + Zx') + g'(Yz' + Zy')}{r'^3};$$

$a', b',$ etc. being other constant quantities. But it will always be possible to determine the situation of three rectangular axes, so that $e, f,$ and g may each be equal to *zero*, and consequently V be reduced to the following simple form

$$(a.) \qquad V = \frac{aXx' + bYy' + cZz'}{r'^3};$$

$a, b,$ and c being three constant quantities.

When A is a sphere, and its magnetic particles are either spherical, or, like the integrant particles of non-crystalized bodies, arranged in a confused manner; it is evident the constant quantities $a', b', c',$ etc. in the general value of $V,$ must be the same for every system of rectangular

co-ordinates, and consequently we must have $a' = b' = c'$, $e' = o$, $f' = o$, and $g' = o$, therefore in this case

$$(b.) \qquad V = \frac{a'(Xx' + Yy' + Zz')}{r'^3};$$

a' being a constant quantity dependant on the magnitude and nature of A.

The formula (a) will give the value of the forces acting on any point p', arising from a mass A of soft iron or other similar matter, whose magnetic state is induced by the influence of the earth's action; supposing the distance Ap' to be great compared with the dimensions of A, and if it be a solid of revolution, one of the rectangular axes, say X, must coincide with the axis of revolution, and the value of V reduce itself to

$$V = \frac{a'Xx' + b'(Yy' + Zz')}{r'^3};$$

a' and b' being two constant quantities dependant on the form and nature of the body. Moreover the forces acting in the directions of x', y', z', positive, are expressed by

$$-\left(\frac{dV}{dx'}\right), \quad -\left(\frac{dV}{dy'}\right), \quad -\left(\frac{dV}{dz}\right).$$

We have thus the means of comparing theory with experiment, but these are details into which our limits will not permit us to enter.

The formula (b), which is strictly correct for an infinitely small sphere, on the supposition of its magnetic particles being arranged in a confused manner, will, in fact, from the basis of our theory, and although the preceding analysis seems sufficiently general and rigorous, it may not be amiss to give a simpler proof of this particular case. Let, therefore, the origin O of the rectangular co-ordinates be placed at the centre of the infinitely small sphere A, and OB be the direction of the parallel forces acting upon it; then, since the total quantity of magnetic fluid in A is equal to *zero*, the value of the potential function V, at the point p', arising from A, must evidently be of the form

$$V = \frac{k\cos\theta}{r'^2};$$

r' representing as before the distance Op', and θ the angle formed between the line Op', and another line OD fixed in A. If now f be the magnitude of the force directed along OB, the constant k will evidently be of the form $k = a'f$; a' being a constant quantity. The value of V, jnst given, holds

good for any arrangement, regular or irregular, of the magnetic particles composing A, but on the latter supposition, the value of V would evidently remain unchanged, provided the sphere, and consequently the line OD, revolved round OB as an axis, which could not be the case unless OB and OD coincided. Hence $\theta =$ angle BOp' and

$$V = \frac{a' f \cos\theta}{r'^2}.$$

Let now α, β, γ, be the angles that the line $Op' = r'$ makes with the axes of x, y, z, and α', β', γ', those wich OB makes with the same axes; then substituting for $\cos\theta$ its value $\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$, we have, since $f\cos\alpha = X$, $f\cos\beta = Y$, $f\cos\gamma = Z$,

$$(b'.) \qquad V = \frac{a'(X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)}{r'^2}.$$

Which agrees with the equation (b), seeing that $\cos\alpha = \frac{x'}{r'}$, $\cos\beta = \frac{y'}{r'}$, $\cos\gamma = \frac{z'}{r'}$.

15.

Conceive now, a body A, of any form, to have a magnetic state induced in its particles by the influence of exterior forces, it is clear that if dv be an element of its volume, the value of the potential function arising from this element, at any point p' whose co-ordinates are x', y', z', must, since the total quantity of magnetic fluid in dv is equal to *zero*, be of the form

$$(a.) \qquad \frac{dv[X(x'-x) + Y(y'-y) + Z(z'-z)]}{r^3};$$

x, y, z, being the co-ordinates of dv, r the distance p', dv and X, Y, Z, three quantities dependant on the magnetic state induced in dv, and serving to define this state. If therefore dv' be an infinitely small volume within the body A and inclosing the point p', the potential function arising from the whole A exterior to dv', will be expressed by

$$\int dx\,dy\,dz\,\frac{X(x'-x) + Y(y'-y) + Z(z'-z)}{r^3};$$

the integral extending over the whole volume of A exterior to dv'.

It is easy to show from this expression that, in general, although dv' be infinitely small, the forces acting in its interior vary in magnitude and direction by passing from one part of it to another; but, when dv' is spherical, these forces are sensibly constant in magnitude and direction, and consequently,

in this case, the value of the potential function induced in dv' by their action, may be immediately deduced from the preceding article.

Let ψ' represent the value of the integral just given, when dv' is an infinitely small sphere. The force acting on p' arising from the mass exterior to dv', tending to increase x', will be

$$-\left(\frac{\overline{d\psi'}}{dx'}\right);$$

the line above the differential co-efficient indicating that it is to be obtained by supposing the radius of dv' to vanish after differentiation, and this may differ from the one obtained by first making the radius vanish, and afterwards differentiating the resulting function of x', y', z', which last being represented as usual by $\frac{d\psi'}{dx'}$, we have

$$\frac{\overline{d\psi'}}{dx'} = \frac{d}{dx'}\int dxdydz\,\frac{X(x'-x)+Y(y'-y)+Z(z'-z)}{r^3}$$

$$\frac{d\psi'}{dx'} = \frac{d}{dx'}\int dxdydz\,\frac{X(x'-x)+Y(y'-y)+Z(z'-z)}{r^3};$$

the first integral being taken over the whole volume of A exterior to dv', and the second over the whole of A including dv'. Hence

$$\frac{d\psi'}{dx'} - \frac{\overline{d\psi'}}{dx'} = \frac{d}{dx'}\int dxdydz\,\frac{X(x'-x)+Y(y'-y)+Z(z'-z)}{r^3};$$

the last integral comprehending the volume of the spherical particle dv' only, whose radius a is supposed to vanish after differentiation. In order to effect the integration here indicated, we may remark that X, Y and Z are sensibly constant within dv', and may therefore be replaced by X_1, Y_1 and Z_1, their values at the centre of the sphere dv', whose co-ordinates are x_1, y_1, z_1; the required integral will thus become

$$\int dxdydz\,\frac{X_1(x'-x)+Y_1(y'-y)+Z_1(z'-z)}{r^3}.$$

Making for a moment $E = X_1x+Y_1y+Z_1z$, we shall have $X_1 = \frac{dE}{dx}$, $Y_1 = \frac{dE}{dy}$, $Z_1 = \frac{dE}{dz}$, and as also $\frac{x'-x}{r^3} = \frac{d\frac{1}{r}}{dx}$; $\frac{y'-y}{r^3} = \frac{d\frac{1}{r}}{dy}$; $\frac{z'-z}{r^3} = \frac{d\frac{1}{r}}{dz}$, this integral may be written

$$\int dxdydz\left\{\frac{dE}{dx}\cdot\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\frac{dE}{dy}\cdot\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+\frac{dE}{dz}\cdot\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right\},$$

which since $\delta E = 0$, and $\delta \frac{1}{r} = 0$, reduces itself by what is proved in art. 3, to

$$-\int \frac{d\sigma}{r}\left(\frac{dE}{dw}\right) = (\text{because } dw = -da)\int \frac{d\sigma}{r}\frac{dE}{da};$$

the integral extending over the whole surface of the sphere dv', of which $d\sigma$ is an element; r being the distance p', $d\sigma$, and dw measured from the surface towards the interior of dv'. Now $\int \frac{d\sigma}{r}\frac{dE}{da}$ expresses the value of the potential function for a point p', within the sphere, supposing its surface every where covered with electricity whose density is $\frac{dE}{da}$, and may very easily be obtained by No. 13, Liv. 3, Méc. Céleste. In fact, using for a moment the notation there employed, supposing the origin of the polar co-ordinates at the centre of the sphere, we have

$$E = E_{,} + a[X_{,}\cos\theta + Y_{,}\sin\theta\cos\varpi + Z_{,}\sin\theta\sin\varpi];$$

$E_{,}$ being the value of E at the centre of the sphere. Hence

$$\frac{dE}{da} = X_{,}\cos\theta + Y_{,}\sin\theta\cos\varpi + Z_{,}\sin\theta\sin\varpi,$$

and as this is of the form $U^{(1)}$ (Vide Méc. Céleste Liv. 3.), we immediately obtain

$$\int \frac{d\sigma}{r}\frac{dE}{da} = \tfrac{4}{3}\pi r'\{X_{,}\cos\theta' + Y_{,}\sin\theta'\cos\varpi' + Z_{,}\sin\theta'\sin\varpi'\}$$

where r', θ', ϖ', are the polar co-ordinates of p'. Or by restoring x', y', and z'

$$\int \frac{d\sigma}{r}\frac{dE}{da} = \tfrac{4}{3}\pi\{X_{,}(x'-x_{,}) + Y_{,}(y'-y_{,}) + Z_{,}(z'-z_{,})\}.$$

Hence we deduce successively

$$\frac{d\psi'}{dx'} - \frac{\overline{d\psi'}}{dx'} = \frac{d}{dx}\int dx\,dy\,dz\,\frac{X(x'-x)+Y(y'-y)+Z(z'-z)}{r^3}$$

$$= \frac{d}{dx'}\int \frac{d\sigma}{r}\frac{dE}{da} = \frac{d}{dx'}\tfrac{4}{3}\pi\{X_{,}(x'-x_{,}) + Y_{,}(y'-y_{,}) + Z_{,}(z'-z_{,})\} = \tfrac{4}{3}\pi X_{,}.$$

If now we make the radius a vanish, $X_{,}$ must become equal to X', the value of X at the point p', and there will result

$$\frac{d\psi'}{dx'} - \frac{\overline{d\psi'}}{dx'} = \tfrac{4}{3}\pi X' \quad \text{i. e.} \quad \frac{\overline{d\psi'}}{dx'} = \frac{d\psi'}{dx'} - \tfrac{4}{3}\pi X'.$$

But $-\frac{\overline{d\psi'}}{dx'}$ expresses the value of the force acting in the direction of x positive, on a point p' within the infinitely small sphere dv', arising from

the whole of A exterior to dv'; substituting now for $\frac{d\overline{\psi'}}{dx'}$ its value just found, the expression of this force becomes

$$\tfrac{4}{3}\pi X' - \frac{d\psi'}{dx'}.$$

Supposing V' to represent the value of the potential function at p', arising from the exterior bodies which induce the magnetic state of A, the force due to them acting in the same direction, is

$$-\frac{dV'}{dx'},$$

and therefore the total force in the direction of x' positive, tending to induce a magnetic state in the spherical element dv', is

$$\tfrac{4}{3}\pi X' - \frac{d\psi'}{dx'} - \frac{dV'}{dx'} = \overline{X}.$$

In the same way, the total forces in the directions of y' and z' positive, acting upon dv', are shown to be

$$\tfrac{4}{3}\pi Y' - \frac{d\psi'}{dy'} - \frac{dV'}{dy'} = \overline{Y}, \quad \text{and,} \quad \tfrac{4}{3}\pi Z' - \frac{d\psi'}{dz'} - \frac{dV'}{dz'} = \overline{Z}.$$

By the equation (b') of the preceding article, we see that when dv' is a perfect conductor of magnetism, and its particles are not regularly arranged, the value of the potential function at any point p'', arising from the magnetic state induced in dv' by the action of the forces $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, is of the form

$$\frac{a'(\overline{X}\cos\alpha + \overline{Y}\cos\beta + \overline{Z}\cos\gamma)}{r'^2};$$

r' being the distance p'', dv', and α, β, γ, the angles which r' forms with the axes of the rectangular co-ordinates. If then x'', y'', z'', be the co-ordinates of p'', this becomes, by observing that here $a' = kdv'$,

$$\frac{kdv'[\overline{X}(x''-x') + \overline{Y}(y''-y') + \overline{Z}(z''-z')]}{r'^3}$$

k being a constant quantity dependant on the nature of the body. The same potential function will evidently be obtained from the expression (a) of this article, by changing dv, p', and their co-ordinates, into dv', p'', and their co-ordinates; thus we have

$$\frac{dv'[X'(x''-x') + Y'(y''-y') + Z'(z''-z')]}{r'^3}.$$

Equating these two forms of the same quantity, there results the three following equations:

$$X' = k\overline{X} = \tfrac{4}{3}\pi k X' - k\frac{d\psi'}{dx'} - k\frac{dV'}{dx'}$$

$$Y' = k\overline{Y} = \tfrac{4}{3}\pi k Y' - k\frac{d\psi'}{dy'} - k\frac{dV'}{dy'}$$

$$Z' = k\overline{Z} = \tfrac{4}{3}\pi k Z' - k\frac{d\psi'}{dz'} - k\frac{dV'}{dz'},$$

since the quantities x'', y'', z'', are perfectly arbitrary. Multiplying the first of these equations by dx', the second by dy', the third by dz', and taking their sum, we obtain

$$0 = (1 - \tfrac{4}{3}\pi k)(X'dx' + Y'dy' + Z'dz') + kd\psi' + kdV'.$$

But $d\psi'$ and dV' being perfect differentials, $X'dx' + Y'dy' + Z'dz'$ must be so likewise, making therefore

$$d\varphi' = X'dx' + Y'dy' + Z'dz',$$

the above, by integration, becomes

$$\text{const} = (1 - \tfrac{4}{3}\pi k)\varphi' + k\psi' + kV'.$$

Although the value of k depends wholly on the nature of the body under consideration, and is to be determined for each by experiment, we may yet assign the limits between which it must fall. For we have, in this theory, supposed the body composed of conducting particles, separated by intervals absolutely impervious to the magnetic fluid; it is therefore clear the magnetic state induced in the infinitely small sphere dv', cannot be greater than that which would be induced, supposing it one continuous conducting mass, but may be made less in any proportion, at will, by augmenting the non-conducting intervals.

When dv' is a continuous conductor, it is easy to see the value of the potential function at the point p'', arising from the magnetic state induced in it by the action of the forces $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, will be

$$\frac{3dv}{4\pi} \cdot \frac{X(x''-x') + Y(y''-y') + Z(z''-z')}{r'^3},$$

seeing that $\frac{3dv}{4\pi} = a^3$; a representing, as before, the radius of the sphere dv'. By comparing this expression with that before found, when dv' was not a

continuous conductor, it is evident k must be between the limits 0 and $\frac{3}{4}\pi$, or, which is the same thing, $k=\frac{3g}{4\pi}$; g being any positive quantity less than 1.

The value of k, just found, being substituted in the equation serving to determine φ', there arises

$$\text{const} = (1-g)\varphi' + \frac{3g}{4\pi}(\psi' + V').$$

Moreover

$$\psi' = \int dxdydz \frac{X(x'-x)+Y(y'-y)+Z(z'-z)}{r^3}$$

$$= \int dxdydz \left\{ \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right\} = 4\pi\varphi' - \int d\sigma\overline{\varphi}\left(\frac{d\overline{\frac{1}{r}}}{dw}\right) \text{ (art. 3)};$$

the triple integrals extending over the whole volume of A, and that relative to $d\sigma$ over its surface, of which $d\sigma$ is an element; the quantities $\overline{\varphi}$ and $\frac{d\overline{\frac{1}{r}}}{dw}$ belonging to this element. We have, therefore, by substitution

$$\text{const} = (1+2g)\varphi' + \frac{3g}{4\pi}\left(V' - \int d\sigma\overline{\varphi}\left(\frac{d\overline{\frac{1}{r}}}{dw}\right)\right).$$

Now $\delta' V' = 0$, and $\delta' \int d\sigma\overline{\varphi}\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dw}\right) = 0$, and consequently $\delta'\varphi' = 0$; the symbol δ' referring to x', y', z', the co-ordinates of p'; or, since x', y' and z' are arbitrary, by making them equal to x, y, and z, respectively, there results

$$0 = \delta\varphi,$$

in virtue of which, the value of ψ', by article 3, becomes

$$(b.) \qquad \psi' = -\int \frac{d\sigma}{r}\left(\frac{\overline{d\varphi}}{dw}\right);$$

r being the distance p', $d\sigma$, and $\left(\frac{\overline{d\varphi}}{dw}\right)$ belonging to $d\sigma$. The former equation serving to determine φ' gives, by changing x', y', z', into x, y, z,

$$(c.) \qquad \text{const} = (1-g)\varphi + \frac{3g}{4\pi}(\psi + V);$$

φ, ψ and V belonging to a point p, within the body, whose co-ordinates are x, y, z. It is moreover evident from what precedes that, the functions

φ, ψ and V satisfy the equations $0 = \delta\varphi$, $0 = \delta\psi$ and $0 = \delta V$ and have no singular values in the interior of A.

The equations (b) and (c) serve to determine φ and ψ, completely, when the value of V arising from the exterior bodies is known, and therefore they enable us to assign the magnetic state of every part of the body A, seeing that it depends on X, Y, Z, the differential co-efficients of φ. It is also evident that ψ', when calculated for any point p', not contained within the body A, is the value of the potential function at this point arising from the magnetic state induced in A, and therefore this function is always given by the equation (b).

The constant quantity g, which enters into our formulae, depends on the nature of the body solely, and, in a subsequent article, its value is determined for a cylindric wire used by *Coulomb*. This value differs very little from unity: supposing therefore $g = 1$, the equations (b) and (c) become

$$(b'.) \qquad \psi' = -\int \frac{d\sigma}{r}\left(\overline{\frac{d\varphi}{dw}}\right)$$

$$(c'.) \qquad \text{const} = \psi + V,$$

evidently the same, in effect, as would be obtained by considering the magnetic fluid at liberty to move from one part of the conducting body to another; the density ϱ being here replaced by $-\left(\overline{\frac{d\varphi}{dw}}\right)$, and since the value of the potential function for any point exterior to the body is, on either supposition, given by the formula (b), the exterior actions will be precisely the same in both cases. Hence, when we employ iron, nickel, or similar bodies, in which the value of g is nearly equal to 1, the observed phenomena will differ little from those produced on the latter hypothesis, except when one of their dimensions is very small compared with the others, in which case the results of the two hypotheses differ widely, as will be seen in some of the applications which follow.

If the magnetic particles composing the body were not perfect conductors, but indued with a coercive force, it is clear there might always be equilibrium, provided the magnetic state of the element dv' was such as would be induced by the forces $\overline{\frac{d\psi'}{dx'}} + \frac{dV'}{dx'} + A'$, $\overline{\frac{d\psi'}{dy'}} + \frac{dV'}{dy'} + B'$ and $\overline{\frac{d\psi'}{dz'}} + \frac{dV'}{dz'} + C'$, instead of $\overline{\frac{d\psi'}{dx'}} + \frac{dV'}{dx'}$, $\overline{\frac{d\psi'}{dy'}} + \frac{dV'}{dy'}$ and $\overline{\frac{d\psi'}{dz'}} + \frac{dV'}{dz'}$; supposing the resultant of

the forces A', B', C', no where exceeds a quantity β, serving to measure the coercive force. This is expressed by the condition

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 < \beta^2.$$

The equation (c) would then be replaced by

$$(c'.) \quad 0 = (1-g)d\varphi + \frac{3g}{4\pi}(d\psi + dV + Adx + Bdy + Cdz);$$

A, B, C, being any functions of x, y, z, as A', B', C', are of x', y', z', subject only to the condition just given.

It would be extremely easy so to modify the preceding theory, as to adapt it to a body whose magnetic particles are regularly arranged, by using the equation (a) in the place of the equation (b) of the preceding article; but, as observation has not yet offered any thing which would indicate a regular arrangement of magnetic particles, in any body hitherto examined, it seems superfluous to introduce this degree of generality, more particularly as the omission may be so easily supplied.

16.

As an application of the general theory contained in the preceding article, suppose the body A to be a hollow spherical shell of uniform thickness, the radius of whose inner surface is a, and that of its outer one a_1; and let the forces inducing a magnetic state in A, arise from any bodies whatever, situate at will, within or without the shell. Then since in the interior of A's mass $0 = \delta\varphi$, and $0 = \delta V$, we shall have (Méc. Cél. Liv. 3)

$$\varphi = \Sigma\varphi^{(i)} r^i + \Sigma\varphi_1^{(i)} r^{-i-1} \quad \text{and} \quad V = \Sigma U^{(i)} r^i + \Sigma U_1^{(i)} r^{-i-1};$$

r being the distance of the point p, to which φ and V belong, from the shell's centre, $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}$, etc. — $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, etc. functions of θ and ϖ, the two other polar co-ordinates of p, whose nature has been fully explained by *Laplace* in the work just cited; the finite integrals extending from $i = 0$ to $i = \infty$.

If now, to prevent ambiguity, we enclose the r of equation (b) art. 15 in a parenthesis, it will become

$$\psi = \int \frac{d\sigma}{(r)} \left(\overline{\frac{d\varphi}{dw}}\right);$$

(r) representing the distance p, $d\sigma$, and the integral extending over both surfaces of the shell. At the inner surface we have $\overline{\frac{d\varphi}{dw}} = \overline{\frac{d\varphi}{dr}}$ and $r = a$:

hence the part of ψ due to this surface is

$$-\int\frac{d\sigma}{(r)}\frac{\overline{d\varphi}}{dr}=-\int\frac{d\sigma}{(r)}\Sigma i\varphi^{(i)}a^{i-1}+\int\frac{d\sigma}{(r)}\Sigma(i+1)\varphi_{,}^{(i)}a^{-i-2};$$

the integrals extending over the whole of the inner surface, and $d\sigma$ being one of its elements. Effecting the integrations by the formulae of ***Laplace*** (Méc. Céleste, Liv. 3), we immediately obtain the part of ψ, due to the inner surface, viz.

$$\frac{4\pi a^2}{r}\Sigma\frac{a^i}{(2i+1)r^i}(-ia^{i-1}\varphi^{(i)}+(i+1)\varphi_{,}^{(i)}a^{-i-2}).$$

In the same way the part of ψ due to the outer surface, by observing that for it $\frac{\overline{d\varphi}}{dw}=-\frac{\overline{d\varphi}}{dr}$ and $r=a_{,}$, is found to be

$$4\pi a_{,}\Sigma\frac{r^i}{(2i+1)a_{,}^i}(ia_{,}^{i-1}\varphi^{(i)}-(i+1)\varphi^{(i)}a_{,}^{-i-2}).$$

The sum of these two expressions is the complete value of ψ, which, together with the values of φ and V before given, being substituted in the equation (c) art. 15, we obtain

$$\begin{aligned}\text{const}=&(1-g)\Sigma\varphi_{,}^{(i)}r^{-i-1}+(1-g)\Sigma\varphi^{(i)}r^i+\frac{3g}{4\pi}\Sigma U_{,}^{(i)}r^{-i-1}+\frac{3g}{4\pi}\Sigma U^{(i)}r^i\\&+\frac{3ga^2}{r}\Sigma\frac{a^i}{(2i+1)r^i}(-ia^{i-1}\varphi^{(i)}+(i+1)\varphi_{,}^{(i)}a^{-i-2})\\&+3ga_{,}\Sigma\frac{r^i}{(2i+1)a_{,}^i}(ia_{,}^{i-1}\varphi^{(i)}-(i+1)\varphi_{,}^{(i)}a_{,}^{-i-2}).\end{aligned}$$

Equating the co-efficients of like powers of the variable r, we have generally, whatever i may be,

$$0=(1-g)\varphi_{,}^{(i)}+\frac{3ga^{i+2}}{2i+1}(-ia^{i-1}\varphi^{(i)}+(i+1)\varphi_{,}^{(i)}a^{-i-2})+\frac{3g}{4\pi}U_{,}^{(i)}$$

$$0=(1-g)\varphi^{(i)}+\frac{3g}{(2i+1)a_{,}^{i-1}}(ia_{,}^{i-1}\varphi^{(i)}-(i+1)\varphi_{,}^{(i)}a_{,}^{-i-2})+\frac{3g}{4\pi}U^{(i)};$$

neglecting the constant on the right side of the equation in r as superfluous, since it may always be made to enter into $\varphi^{(0)}$. If now, for abridgment, we make

$$D=(2i+1)^2(1+g)+(i-1)(i+2)g^2-9g^2i(i+1)\left(\frac{a}{a_{,}}\right)^{2i+1},$$

we shall obtain by elimination

$$\varphi^{(i)}=-\frac{3g}{4\pi}U^{(i)}\frac{(2i+1)(2i+1+(i+2)g)}{D}-\frac{3g}{4\pi}U_{,}^{(i)}\frac{3g(i+1)(2i+1)a_{,}^{-2i-1}}{D}$$

$$\varphi_{,}^{(i)}=-\frac{3g}{4\pi}U^{(i)}\frac{3gi(2i+1)a^{2i+1}}{D}-\frac{3g}{4\pi}U_{,}^{(i)}\frac{(2i+1)(2i+1+(i-1)g)}{D}.$$

These values substituted in the expression

$$\varphi = \Sigma\varphi^{(i)} r^i + \Sigma\varphi_1^{(i)} r^{-i-1},$$

give the general value of φ in a series of the powers of r, when the potential function due to the bodies inducing a magnetic state in the shell is known, and thence we may determine the value of the potential function ψ arising from the shell itself, for any point whatever, either within or without it.

When all the bodies are situate in the space exterior to the shell, we may obtain the total actions exerted on a magnetic particle in its interior, by the following simple method, applicable to hollow shells of any shape and thickness.

The equation (*c*) art. 15 becomes, by neglecting the superfluous constant,

$$0 = (1-g)\varphi + \frac{3g}{4\pi}(\psi + V).$$

If now (φ) represent the value of the potential function, corresponding to φ the value of φ at the inner surface of the shell, each of the functions (φ), ψ and V, will satisfy the equations $0 = \delta(\varphi)$, $0 = \delta\psi$ and $0 = \delta V$, and moreover, have no singular values in the space within the shell; the same may therefore be said of the function

$$(1-g)(\varphi) + \frac{3g}{4\pi}(\psi + V),$$

and as this function is equal to *zero* at the inner surface, it follows (art. 5) that it is so for any point p of the interior space. Hence

$$0 = (1-g)(\varphi) + \frac{3g}{4\pi}(\psi + V).$$

But $\psi + V$ is the value of the total potential function at the point p, arising from the exterior bodies and shell itself: this function will therefore be expressed by

$$-\frac{4\pi(1-g)}{3g}(\varphi).$$

In precisely the same way, the value of the total potential function at any point p', exterior to the shell, when the inducing bodies are all within it, is shown to be

$$-\frac{4\pi(1-g)}{3g}\cdot(\varphi');$$

(φ') being the potential function corresponding to the value of φ at the exterior surface of the shell. Having thus the total potential functions, the total

action exerted on a magnetic particle in any direction, is immediately given by differentiation.

To apply this general solution to our spherical shell, the inducing bodies being all exterior to it, we must first determine $\overline{\varphi}$, the value of φ at its inner surface, making $0 = \Sigma U_i^{(i)} r^{-i-1}$ since there are no interior bodies, and thence deduce the value of (φ). Substituting for $\varphi^{(i)}$ and $\varphi_i^{(i)}$ their values before given, making $U_i^{(i)} = 0$ and $r = a$, we obtain

$$\overline{\varphi} = \frac{-3g}{4\pi}(1+2g)\Sigma U^{(i)}\frac{(2i+1)^2 a^i}{D},$$

and the corresponding value of (φ) is (Méc. Cél. Liv. 3)

$$(\varphi) = \frac{-3g}{4\pi}(1+2g)\Sigma U^{(i)}\frac{(2i+1)^2 r^i}{D}.$$

The value of the total potential function at any point p within the shell, whose polar coordinates are r, θ, ϖ, is

$$-\frac{4\pi}{3g}(1-g)(\varphi) = (1-g)(1+2g)\Sigma U^{(i)}\frac{(2i+1)^2 r^i}{D}.$$

In a similar way, the value of the same function at a point p' exterior to the shell, all the inducing bodies being within it, is found to be

$$(1-g)(1-2g)\Sigma U_i^{(i)}\frac{(2i+1)^2}{D.r^{i+1}};$$

r, θ and ϖ in this expression representing the polar co-ordinates of p'.

To give a very simple example of the use of the first of these formulae, suppose it were required to determine the total action exerted in the interior of a hollow spherical shell, by the magnetic influence of the earth; then making the axis of x to coincide with the direction of the dipping needle, and designating by f, the constant force tending to impel a particle of positive fluid in the direction of x positive, the potential function V, due to the exterior bodies, will here become

$$V = -f.x = -f\cos\theta.r = U^{(1)}.r.$$

The finite integrals expressing the value of V reduce themselves therefore, in this case, to a single term, in which $i = 1$, and the corresponding value of D being $9\left(1+g-2g^2\frac{a^3}{a_i^3}\right)$, the total potential function within the shell is

$$-(1-g)(1+2g)U^{(1)}\frac{r}{1+g-2g^2\frac{a^3}{a_i^3}} = -\frac{1+g-2g^2}{1+g-2g^2\frac{a^3}{a_i^3}}f.x.$$

We therefore see that the effect produced by the intervening shell, is to reduce the directive force which would act on a very small magnetic needle,

$$\text{from } f, \text{ to } \frac{1+g-2g^2}{1+g-2g^2\frac{a^3}{a_i^3}}f.$$

In iron and other similar bodies, g is very nearly equal to 1, and therefore the directive force in the interior of a hollow spherical shell is greatly diminished, except when its thickness is very small compared with its radius, in which case, as is evident from the formula, it approaches towards the original value f, and becomes equal to it when this thickness is infinitely small.

To give an example of the use of the second formula, let it be proposed to determine the total action upon a point p, situate on one side of an infinitely extended plate of uniform thickness, when another point P, containing a unit of positive fluid, is placed on the other side of the same plate considering it as a perfect conductor of magnetism. For this, let fall the perpendicular PQ upon the side of the plate next P, on PQ prolonged, demit the perpendicular pq, and make $PQ=b$, $Pq=u$, $pq=v$, and $t=$ the thickness of the plate; then, since its action is evidently equal to that of an infinite sphere of the same thickness, whose centre is upon the line QP at an infinite distance from P, we shall have the required value of the total potential function at p by supposing $a_i=a+t$, a infinite, and the line PQ prolonged to be the axis from which the angle θ is measured. Now in the present case

$$V=\frac{1}{Pp}=\frac{1}{\sqrt{(r^2-2r(a-b)\cos\theta+(a-b)^2)}}=\Sigma U_i^{(i)}r^{-i-1},$$

and the value of the potential function, as before determined, is

$$(1-g)(1-2g)\Sigma\frac{(2i+1)^2}{D}U_i^{(i)}r^{-i-1}.$$

From the first expression we see that the general term $U_i^{(i)}r^{-i-1}$ is a quantity of the order $(a-b)^i r^{-i-1}$. Moreover, by substituting for r its value in u

$$(a-b)^i r^{-i-1}=(a-b)^i(a-b+u)^{-i-1}=\frac{1}{a}e^{-\frac{iu}{a}};$$

neglecting such quantities as are of the order $\frac{1}{a}$ compared with those retained. The general term $U_i^{(i)}r^{-i-1}$, and consequently $U_i^{(i)}$, ought therefore to be considered as functions of $\frac{i}{a}=\gamma$. In the finite integrals just given, the in-

crement of i is 1, and the corresponding increment of γ is $\frac{1}{a} = d\gamma$ (because a is infinite), the finite integrals thus change themselves into ordinary integrals or fluents. In fact (Méc. Cél. Liv. 3), $U_i^{(i)}$ always satisfies the equation

$$\frac{d^2 U_i^{(i)}}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dU_i^{(i)}}{d\theta} + i(i+1)U_i^{(i)} = 0,$$

and as θ is infinitely small whenever V has a sensible value, we may eliminate it from the above by means of the equation $a\theta = v$, and we obtain by neglecting infinitessimals of higher orders than those retained, since $\frac{i}{a} = \gamma$,

$$0 = \frac{d^2 U_i^{(i)}}{dv^2} + \frac{dU_i^{(i)}}{vdv} + \gamma^2 U_i^{(i)}.$$

Hence the value $U_i^{(i)}$ is of the form

$$U_i^{(i)} = A\int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\cos(\beta\gamma v);$$

seeing that the remaining part of the general integral becomes infinite when v vanishes, and ought therefore to be rejected. It now only remains to determine the value of the arbitrary constant A. Making, for this purpose, $\theta = 0$, i. e. $v = 0$, we have

$$U_i^{(i)} = (a-b)^i \text{ and } \int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)}} = \tfrac{1}{2}\pi \text{ : hence } (a-b)^i = \tfrac{1}{2}(A\pi)$$

$$\text{i. e. } A = \frac{2}{\pi}(a-b)^i.$$

By substituting for A and r their values, there results

$$U_i^{(i)} r^{-i-1} = \frac{2}{\pi}(a-b)^i(a-b+u)^{-i-1}\int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\cos(\beta\gamma v)$$

$$= \frac{2d\gamma}{\pi}e^{-\gamma u}\int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\cos(\beta\gamma v);$$

because $\frac{i}{a} = \gamma$ and $\frac{1}{a} = d\gamma$. Writing now in the place of i its value $a\gamma$, and neglecting infinitessimal quantities, we have

$$\frac{(2i+1)^2}{D} = \frac{4}{4+4g+g^2-9g^2e^{-2\gamma t}}.$$

Hence the value of the total potential function becomes

$$\frac{8}{\pi}(1-g)(1+2g)\int_0^\infty \frac{d\gamma . e^{-\gamma u}}{4+4g+g^2-9g^2e^{-2\gamma t}}\int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\text{oos}(\beta\gamma v);$$

where the integral relative to γ is taken from $\gamma = 0$ to $\gamma = \infty$, to correspond with the limits 0 and ∞ of i, seeing that $i = a\gamma$.

The preceding solution is immediately applicable to the imaginary case only, in which the inducing bodies reduce themselves to a single point P, but by the following simple artifice we may give it a much greater degree of generality:

Conceive another point P', on the line PQ, at an arbitrary distance c from P, and suppose the unit of positive fluid concentrated in P' instead of P; then if we make $r' = Pp$, and $\theta' = \angle pPQ$, we shall have $u = r'\cos\theta'$, $v = r'\sin\theta'$, and the value of the potential function arising from P' will be

$$\frac{1}{P'p} = \frac{1}{\sqrt{(r'^2 - 2r'c\cos\theta' + c^2)}} = Q^{(0)}\frac{1}{r'} + Q^{(1)}\frac{c}{r'^2} + Q^{(2)}\frac{c^2}{r'^3} + \text{etc.}$$

Moreover, the value of the total potential function at p due to this, arising from P' and the plate itself, will evidently be obtained by changing u into $u - c$ in that before given, and is therefore

$$\frac{8}{\pi}(1-g)(1+2g)\int_0^\infty \frac{e^{\gamma c}\,d\gamma e^{-\gamma u}}{(2+g)^2 - 9g^2 e^{-2\gamma t}}\int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\cos(\beta\gamma v).$$

Expanding this function in an ascending series of the powers of c, the term multiplied by c^i is

$$\frac{8}{\pi}(1-g)(1+2g)\int_0^\infty \frac{\frac{\gamma^i c^i}{1.2.3\ldots n}\,d\gamma e^{-\gamma u}}{(2+g)^2 - 9g^2 e^{-2\gamma t}}\int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\cos(\beta\gamma v),$$

which, as c is perfectly arbitrary, must be the part due to the term $Q^{(i)}\frac{c_i}{r^{i+1}}$ in the potential function arising from the inducing bodies. If then this function had been

$$Q^{(0)}\frac{k_0}{r'} + Q^{(1)}\frac{k_1}{r'^2} + Q^{(2)}\frac{k_2}{r'^3} + Q^{(3)}\frac{k_3}{r'^4} + \text{etc.};$$

where the successive powers c^0, c^1, c^2 etc. of c are replaced by the arbitrary constant quantities k_0, k_1, k_2, etc., the corresponding value of the total potential function will be given by making a like change in that due to P'. Hence if, for abridgment, we make

$$\varphi(\gamma) = k_0 + \frac{k_1}{1}\gamma + \frac{k_2}{1.2}\gamma^2 + \frac{k_3}{1.2.3}\gamma^3 + \text{etc.},$$

the value of this function at the point p will be

$$\frac{8}{\pi}(1-g)(1+2g)\int_0^\infty \frac{\varphi(\gamma)\,d\gamma e^{-\gamma u}}{(2+g)^2 - 9g^2 e^{-2\gamma t}}\int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\cos(\beta\gamma v).$$

Now, if the original one due to the point P be called F, it is clear the expression just given may be written

$$\varphi\left(\frac{-d}{du}\right).F;$$

where the symbols of operation are separated from those of quantity, according to *Arbogast's* method; thus all the difficulty is reduced to the determination of F.

Resuming therefore the original supposition of the plate's magnetic state being induced by a particle of positive fluid concentrated in P, the value of the total potential function at p will be

$$F = \frac{8}{\pi}(1-g)(1+2g)\int_0^\infty \frac{d\gamma e^{-u\gamma}}{(2+g)^2-9g^2e^{-2\gamma t}}\int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\cos(\beta\gamma v),$$

as was before shown.

Let $\frac{3g}{2+g} = m$: we shall have

$$F = \frac{2}{\pi}(1-m^2)\int_0^1 \frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty \frac{d\gamma e^{-u\gamma}}{1-m^2e^{-2\gamma t}}\cos(\beta\gamma v)$$

$$= \frac{2}{\pi}(1-m^2)\int_0^1 \frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^\infty d\gamma e^{-u\gamma}(1+m^2e^{-2\gamma t}+m^4e^{-4\gamma t}+\text{etc.})\cos(\beta\gamma v)$$

$$= \frac{2}{\pi}(1-m^2)\int_0^1 \frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{u}{u^2+\beta^2v^2}+\frac{m^2(u+2t)}{(u+2t)^2+\beta^2v^2}+\frac{m^4(u+4t)}{(u+4t)^2+\beta^2v^2}+\text{etc.}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}(1-m^2)\Sigma\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{m^{2i}u_i d\theta}{u_i^2+v^2\sin^2\theta}, \quad \text{where } u_i = u+2it$$

$$= (1-m^2)\Sigma\frac{m^{2i}}{(u_i^2+v^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Writing now $e^{-v\beta\gamma\sqrt{-1}}$ in the place of $\cos(\beta\gamma v)$, we obtain

$$F = \frac{8}{\pi}(1-g)(1+2g)\int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\int_0^\infty \frac{d\gamma e^{-\gamma(u+\beta v\sqrt{-1})}}{(2+g)^2-9g^2e^{-2\gamma t}},$$

provided we reject the imaginary quantities which may arise. In order to transform this double integral let $z = \frac{3g}{2+g}e^{-\gamma t}$, and we shall have

$$F = \frac{8(1-g)(1+2g)}{9\pi g^2 t}\left(\frac{2+g}{3g}\right)^{\frac{u}{t}-2}\int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\left(\frac{2+g}{3g}\right)^{\frac{\beta v\sqrt{-1}}{t}}\int \frac{dz.z^{\frac{u}{t}-1+\frac{\beta v\sqrt{-1}}{t}}}{1-z^2};$$

the integral relative to z being taken from $z=0$ to $z=\frac{3g}{2+g}$.

The value of $1-g$, for iron and other similar bodies, is very small, neglecting therefore quantities which are of the order $(1-g)$ compared with those retained, there results

$$(a.) \qquad F = \frac{8(1-g)}{3\pi t}\int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\int_0^1 \frac{dz}{1-z^2}\, z^{\frac{u}{t}-1+\frac{\beta v}{t}\sqrt{-1}};$$

where u and v may have any values whatever provided they are not very great and of the order $\frac{t}{1-g}$. If F_1 represents what F becomes by changing u into $u+2t$, we have

$$F_1 = \frac{8(1-g)}{3\pi t}\int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\int_0^1 \frac{z^2 dz}{1-z^2}\, z^{\frac{u}{t}-1+\frac{\beta v}{t}\sqrt{-1}};$$

and consequently

$$F - F_1 = \frac{8(1-g)}{3\pi t}\int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)}}\int_0^1 dz\,.\,z^{\frac{u}{t}-1+\frac{\beta v}{t}\sqrt{-1}}$$

which, by effecting the integrations and rejecting the imaginary quantities, becomes

$$F - F_1 = \frac{4(1-g)}{3\sqrt{(u^2+v^2)}} = \frac{4(1-g)}{3r'}.$$

Suppose now pO is a perpendicular falling from the point p upon the surface of the plate, and on this line, indefinitely extended in the direction Op, take the points p_1, p_2, p_3, etc., at the distances $2t$, $4t$, $6t$, etc. from p; then F_1, F_2, F_3, etc. being the values of F, calculated for the points p_1, p_2, p_3, etc. by the formula (a) of this article, and r'_1, r'_2, r'_3, etc. the corresponding values of r', we shall equally have

$$F_1 - F_2 = \frac{4(1-g)}{3r'_1}; \qquad F_2 - F_3 = \frac{4(1-g)}{3r'_2}, \text{ etc.};$$

and consequently

$$F = \tfrac{4}{3}(1-g)\left\{\frac{1}{r'} + \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2} + \text{etc. in infinitum}\right\}; \quad \text{seeing that } F_\infty = 0.$$

From this value of F, it is evident the total action exerted upon the point p, in any given direction pn, is equal to the sum of the actions which would be exerted without the interposition of the plate, on each of the points p, p_1, p_2, etc. in infinitum, in the directions pn, p_1n_1, p_2n_2, etc. multiplied by the constant factor $\frac{4}{3}(1-g)$: the lines pn, p_1n_1, p_2n_2, etc. being all parallel. Moreover, as this is the case wherever the inducing point P may be situate, the same will hold good when, instead of P, we substitute a body

of any figure whatever magnetized at will. The only condition to be observed, is, that the distance between p and every part of the inducing body be not a very great quantity of the order $\frac{t}{1-g}$.

On the contrary, when the distance between p and the inducing body is great enough to render $\frac{(1-g)r'}{t}$ a very considerable quantity, it will be easy to show, by expanding F in a descending series of the powers of r', that the actions exerted upon p are very nearly the same as if no plate were interposed.

We have before remarked (art. 15,) that when the dimensions of a body are all quantities of the same order, the results of the true theory differ little from those, which would be obtained by supposing the magnetic like the electric fluid, at liberty to move from one part of a conducting body to another; but when, as in the present example, one of the dimensions is very small compared with the others, the case is widely different; for if we make g rigorously equal to 1 in the preceding formulae, they will belong to the latter supposition (art. 15), and as F will then vanish, the interposing plate will exactly neutralize the action of any magnetic bodies however they may be situate, provided they are on the side opposite the attracted point. This differs completely from what has been deduced above by employing the correct theory. A like difference between the results of the two suppositions takes place. when we consider the action exerted by the earth on a magnetic particle, placed in the interior of a hollow spherical shell, provided its tickness is very small compared with its radius, as will be evident by making $g=1$ in the formulae belonging to this case, which are given in a preceding part of the present article.

17.

Since *Coulomb's* experiments on cylindric wires magnetized to saturation are numerous and very accurate, it was thought this little work could not be better terminated, than by directly deducing from theory such consequences as would admit of an immediate comparison with them, and in order to effect this, we will, in the first place, suppose a cylindric wire whose radius is a and length 2λ, is exposed to the action of a constant force, equal to f, and directed parallel to the axis of the wire, and then endeavour to determine the magnetic state which will thus be induced in it. For this, let r be a

perpendicular falling from a point p within the wire upon its axis, and x, the distance of the foot of this perpendicular from the middle of the axis; then f being directed along x positive, we shall have for the value of the potential function due to the exterior forces

$$V = -fx,$$

and the equations (b), (c) (art. 15) become, by omitting the superfluous constant,

$$(b.) \qquad \psi' = -\int \frac{d\sigma}{(r)} \left(\frac{\overline{d\varphi}}{dw}\right),$$

$$(c.) \qquad 0 = (1-g)\varphi + \frac{3g}{4\pi}\psi - \frac{3gf}{4\pi}x:$$

(r), the distance p', $d\sigma$ being inclosed in a parenthesis to prevent ambiguity, and p' being the point to which ψ' belongs. By the same article we have $0 = \delta\varphi$ and $0 = \delta\psi$, and as φ and ψ evidently depend on x and r only, these equations being written at length are

$$0 = r^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{rd}{dr}\left(\frac{rd\varphi}{dr}\right)$$

$$0 = r^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{rd}{dr}\left(\frac{rd\psi}{dr}\right).$$

Since r is always very small compared with the length of the wire, we may expand φ in an ascending series of the powers of r, and thus

$$\varphi = X + X_1 r + X_2 r^2 + \text{etc.};$$

X, X_1, X_2, etc. being functions of x only. By substituting this value in the equation just given, and comparing the co-efficients of like powers of r, we obtain

$$\varphi = X - \frac{d^2X}{dx^2}\frac{r^2}{2^2} + \frac{d^4X}{dx^4}\frac{r^4}{2^2.4^2} + \text{etc.}$$

In precisely the same way the value of ψ is found to be

$$\psi = Y - \frac{d^2Y}{dx^2}\frac{r^2}{2^2} + \frac{d^4Y}{dx^4}\frac{r^4}{2^2.4^2} - \text{etc.}$$

It now only remains to find the values of X and Y in functions of x. By supposing p' placed on the axis of the wire, the equation (c) becomes

$$Y = -\int \frac{d\sigma}{(r)}\left(\frac{\overline{d\varphi}}{dw}\right);$$

the integral being extended over the whole surface of the wire: Y' belonging to the point p', whose co-ordinates will be marked with an accent.

The part of Y' due to the circular plane at the end of the cylinder, where $x = -\lambda$, is

$$-\frac{dX''}{dx}\int_0^a \frac{2\pi r dr}{(r)} = -2\pi\frac{dX''}{dx}\{\sqrt{((\lambda+x')^2+a^2)}-\lambda-x'\},$$

since here $d\sigma = 2\pi r dr$ and $\frac{\overline{d\varphi}}{dw} = \frac{dX''}{dx}$, by neglecting quantities of the order a^2 on account of their smallnes; X'' representing the value of X when $x = -\lambda$.

At the other end where $x = +\lambda$ we have $d\sigma = 2\pi r dr$, $\frac{d\varphi}{dw} = -\frac{dX'''}{dx}$, and consequently the part due to it is

$$\frac{dX'''}{dx}\int_0^a \frac{2\pi r dr}{(r)} = 2\pi\frac{dX'''}{dx}\{\sqrt{((\lambda-x')^2+a^2)}-\lambda+x'\};$$

X''' designating the value of X when $x = +\lambda$.

At the curve surface of the cylinder

$$d\sigma = 2\pi a dx \quad \text{and} \quad \frac{\overline{d\varphi}}{dw} = -\frac{\overline{d\varphi}}{dr} = \tfrac{1}{2}a\frac{d^2X}{dx^2}$$

provided we omit quantities of the order a^2 compared with those retained. Hence the remaining part due to this surface is

$$-\pi a^2\int\frac{dx}{(r)}\frac{d^2X}{dx^2};$$

the integral being taken from $x = -\lambda$ to $x = +\lambda$. The total value of Y' is therefore

$$Y' = 2\pi\frac{dX'''}{dx}\{\sqrt{((\lambda-x')^2+a^2)}+\lambda-x'\} - 2\pi\frac{dX''}{dx}\{\sqrt{((\lambda+x')^2+a^2)}-\lambda-x'\}$$
$$-\pi a^2\int\frac{dx}{(r)}\frac{d^2X}{dx^2};$$

the limits of the integral being the same as before. If now we substitute for (r) its value $\sqrt{((x-x')^2+a^2)}$ we shall have

$$-\pi a^2\int\frac{dx}{(r)}\frac{d^2X}{dx^2} = -\pi a^2\int\frac{dx}{\sqrt{[(x-x')^2+a^2]}}\frac{d^2X}{dx^2};$$

both integrals extending from $x = -\lambda$ to $x = +\lambda$.

On account of the smallness of a, the elements of the last integral where x is nearly equal to x' are very great compared with the others, and therefore the approximate value of the expression just given, will be

$$-\pi a^2 A\frac{d^2X'}{dx'^2} \quad \text{where} \quad A = \int\frac{dx}{\sqrt{[(x-x')^2+a^2]}} = 2\log\frac{2\mu}{a} \text{ very nearly;}$$

the two limits of the integral being $-\mu$ and $+\mu$ and μ so chosen that when p' is situate any where on the wire's axis, except in the immediate vicinity of either end, the approximate shall differ very little from the true value, which may in every case be done without difficulty. Having thus, by substitution, a value of Y' free from the sign of integration, the value of Y is given by merely changing x' into x and X' into X; in this way

$$Y = 2\pi \frac{dX'''}{dx}\{\sqrt{((\lambda-x)^2+a^2)}-\lambda+x\} - 2\pi\frac{dX''}{dx}\{\sqrt{((\lambda+x)^2+a^2)}-\lambda-x\} - \pi a^2 A \frac{d^2X}{dx^2}.$$

The equation (c), by making $r=0$, becomes

$$0 = (1-g)X + \frac{3g}{4\pi}Y - \frac{3gf}{4\pi}x,$$

or by substituting for Y

$$0 = (1-g)X - \tfrac{3}{4}(ga^2A)\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{3gf}{4\pi}x + \tfrac{3}{2}g\frac{dX'''}{dx}\{\sqrt{((\lambda-x)^2+a^2)}-\lambda+x\} - \tfrac{3}{2}g\frac{dX''}{dx}\{\sqrt{((\lambda+x)^2+a^2)}-\lambda-x\};$$

an equation which ought to hold good, for every value of x, from $x=-\lambda$ to $x=+\lambda$.

In those cases to which our theory will be applied, $1-g$ is a small quantity of the same order as a^2A, and thus the three terms of the first line of our equation will be of the order a^2AX; making now $x=+\lambda$, $\frac{3}{2}g\frac{dX'''}{dx}a$ is shown to be of the order a^2AX''', and therefore $\frac{dX'''}{dx}\div X'''$ is a small quantity of the order aA; but for any other value of x the function multiplying $\frac{dX'''}{dx}$ becomes of the order a^2, and therefore we may without sensible error neglect the term containing it, and likewise suppose

$$\frac{dX'''}{dx}\div X''' = 0.$$

In the same way by making $x=-\lambda$, it may be shown that the term containing $\frac{dX''}{dx}$ is negligible, and

$$\frac{dX''}{dx}\div X'' = 0.$$

Thus our equation reduces itself to

$$0 = (1-g)X - \tfrac{3}{4}(ga^2A)\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{3gf}{4\pi}x,$$

of which the general integral is

$$X = \frac{3gfx}{4\pi(1-g)} + Be^{-\beta x} + Ce^{+\beta x};$$

where $\beta^2 = \frac{4(1-g)}{3ga^2A}$: B and C being two arbitrary constants. Determining these by the conditions $0 = \frac{dX'''}{dx} \div X'''$ and $0 = \frac{dX''}{dx} \div X''$, we ultimately obtain

$$X = \frac{3gf}{4\pi(1-g)}\left\{x - \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{\beta(e^{\beta\lambda} + e^{-\beta\lambda})}\right\}.$$

But the density of the fluid at the surface of the wire, which would produce the same effect as the magnetized wire itself, is

$$-\overline{\frac{d\varphi}{dw}} = \overline{\frac{d\varphi}{dr}} = -\tfrac{1}{2}a\frac{d^2X}{dx^2} \text{ very nearly,}$$

and therefore the total quantity in an infinitely thin section whose breadth is dx, will be

$$-\pi a^2\frac{d^2X}{dx^2}dx = \frac{3gf\beta a^2}{4(1-g)}\cdot\frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{e^{\beta\lambda} + e^{-\beta\lambda}}dx.$$

As the constant quantity f may represent the coercive force of steel or other similar matter, provided we are allowed to supposse this force the same for every particle of the mass, it is clear that when a wire is magnetized to saturation, the effort it makes to return to a natural state must, in every part, be just equal to f, and therefore, on account of its elongated form, the degree of magnetism retained by it will be equal to that which would be induced in a conducting wire of the same form by the force f, directed along lines parallel to its axis. Hence the preceding formulae are applicable to magnetized steel wires. But it has been shown by M. *Biot* (Ttaité de Phy. Tome 3, Chap. 6,) from *Coulomb's* experiments, that the apparent quantity of free fluid in any infinitely thin section is represented by

$$A'(\mu'^{-x} - \mu'^{+x})dx.$$

This expression agrees precisely with the one before deduced from theory, and gives, for the determination of the constants A' and μ', the equations

$$\beta = -\log\mu'; \quad A' = \frac{3gf\beta a^2}{4(1-g)(e^{\beta\lambda} + e^{-\beta\lambda})}.$$

The chapter in which these experiments are related, contains also a number of results, relative to the forces with which magnetized wires tend to turn towards the meridian, when retained at a given angle from it, and it is easy to prove that this force for a fine wire, whose variable section is s, will be proportional to the quantity

$$\int s dx \frac{d\varphi}{dx},$$

where the wire is magnetized in any way either to saturation or otherwise, the integral extending over its whole lenght. But in a cylindric wire magnetized to saturation, we have, by neglecting quantities of the order a^2,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{dX}{dx} = \frac{3gf}{4\pi(1-g)}\left\{1 - \frac{e^{\beta x}+e^{-\beta x}}{e^{\beta\lambda}+e^{-\beta\lambda}}\right\} \text{ and } s = \pi a^2,$$

and therefore for this wire the force in question is proportional to

$$\frac{3gfa^2}{4(1-g)}\left\{2\lambda - \frac{2(e^{\beta\lambda}-e^{-\beta\lambda})}{\beta(e^{\beta\lambda}+e^{-\beta\lambda})}\right\}.$$

The value of g, dependant on the nature of the substance of which the needles are formed, being supposed given as it ought to be, we have only to determine β in order to compare this result with observation. But β depends upon $A = 2\log\frac{\mu}{a}$, and on account of the smallness of a, A undergoes but little alteration for very considerable variations in μ, so that we shall be able in every case to judge with sufficient accuracy what value of μ ought to be employed: nevertheless, as it is always desirable to avoid every thing at all vague, it will be better to determine A by the condition, that the sum of the squares of the errors committed by employing, as we have done, $A\frac{d^2X'}{dx'^2}$ for the approximate value of $\int_{-\lambda}^{+\lambda}\frac{dx}{\sqrt{[(x-x')^2+a^2]}}$, shall be a minimum for the whole length of the wire. In this way I find when λ is so great that quantities of the order $\frac{1}{\beta\lambda}$ may be neglected:

$$A = ,231863 - 2\log a\beta + 2a\beta;$$

where ,231863 etc. $= 2\log 2 - 2(A)$; (A) being the quantity represented by A in *Lacroix*' Traité du Cal. Diff. Tome 3, p. 521. Substituting the value of A just found in the equation $\beta^2 = \frac{4(1-g)}{3ga^2A}$ before given, we obtain

$$(a.) \qquad \frac{4(1-g)}{3g.a^2\beta^2} = ,231863 - 2\log a\beta + 2a\beta.$$

We hence see that when the nature of the substance of which the wires are formed remains unchanged, the quantity $a\beta$ is constant, and therefore β varies in the inverse ratio of a. This agrees with what M. ***Biot*** has found by experiment in the chapter before cited, as will be evident by recollecting that $\beta = -\log \mu'$.

From an experiment made with extreme care by ***Coulomb***, on a magnetized wire whose radius was $\frac{1}{12}$ inch, M. ***Biot*** has found the value of μ' to be ,517948 (Traité de Phy. Tome 3, p. 78). Hence we have in this case

$$a\beta = \frac{-1}{12}\log \mu' = ,0548235,$$

which, according to a remark just made, ought to serve for all steel wires. Substituting this value in the equation (a) of the present article, we obtain

$$g = ,986636.$$

With this value of g we may calculate the forces with which different lengths of a steel wire whose radius is $\frac{1}{12}$ inch, tend to turn towards the meridian, in order to compare the results with the table of ***Coulomb's*** observations, given by M. ***Biot*** (Traité de Phy. Tome 3, p. 84). Now we have before proved that this force for any wire may be represented by

$$\boldsymbol{K}\left(\beta\lambda - \frac{e^{\beta\lambda} - e^{-\beta\lambda}}{e^{\beta\lambda} + e^{-\beta\lambda}}\right) = \boldsymbol{K}\left(\beta\lambda - \frac{1 - e^{-2\beta\lambda}}{1 + e^{-2\beta\lambda}}\right);$$

where, for abridgment, we have supposed

$$\boldsymbol{K} = \frac{3gfa^2}{2\beta(1-g)}.$$

It has also been shown that for any steel wire:

$$a\beta = ,0548235,$$

the French inch being the unit of space, and as in the present case $a = \frac{1}{12}$ there results $\beta = ,657882$. It only remains therefore to determine $\boldsymbol{K}$ from one observation, the first for example, from which we obtain $\boldsymbol{K} = 58^{0},5$ very nearly; the forces being measured by their equivalent torsions. With this value of $\boldsymbol{K}$ we have calculated the last column of the following table: —

Length 2λ.	*Observed Torsion.*	*Calculated Torsion.*
18 in.	288^0	$287^0 9$
12	172	172,1
9	115	115,3
6	59	59,3
4,5	34	33,9
3	13	13,5

The three last observations have been purposely omitted, because the approximate equation (a) does not hold good for very short wires.

The very small difference existing between the observed and calculated results will appear the more remarkable, if we reflect that the value of β was determined from an experiment of quite a different kind to any of the present series, and that only one of these has been employed for the determination of the constant quantity K, which depends on f, the measure of the coërcive force.

The table page 87 of the volume just cited, contains another set of observed torsions, for different lengths of a much finer wire whose radius $a = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{38}{865}}$: hence we find the corresponding value of $\beta = 3{,}13880$, and the first observation in the table gives $K = {}^0{,}6448$. With these values the last column of the following table has been calculated as before:

Length 2λ.	*Observed Torsion.*	*Calculated Torsion.*
12 in.	$11^0 50$	$11^0 50$
9	8,50	8,46
6	5,30	5,43
3	2,30	2,39
2	1,30	1,38
1	,35	,42
,5	,07	,084
,25	,02	,012

Here also the differences between the observed and calculated values are extremely small, and as the wire is a very fine one, our formula is applicable to much shorter pieces than in the former case. In general, when the length of the wire exceeds 10 or 15 times its diameter, we may employ it without hesitation.

The end.

11.

Über eine Sammlung von bestimmten Integralen.

(Von Herrn *Bierens de Haan,* Oberlehrer der Math. am Gymnasio zu Deventer, math. mag. phil. nat. Doctor.)

Dafs dem Mathematiker verschiedene Tafeln nöthig sind, bedarf wohl nicht des Beweises. Er bedarf Tafeln, die ihm die Resultate verschiedener, oft mühseliger Forschungen in der Ordnung unter die Augen bringen, wie er sie zu benutzen Anlafs findet. Wer ist nicht froh, dafs andere vor ihm die Logarithmen berechnet haben. Ohne Tafeln würde der Gebrauch der Logarithmen ihm wohl untersagt sein; obwohl er sie selbst, nach festgesetzter, uniformer Behandlungsweise, selbst zu berechnen vermöchte. Aber für eine andere Art von Ausdrücken, den ***bestimmten Integralen,*** fehlt eine uniforme Berechnungsweise; und deshalb wäre, wegen ihres häufigen Gebrauchs, eine Tafel derselben unter den mathematischen Hülfsmitteln um so mehr zu wünschen. In einigen Sammlungen findet man wohl Tafeln *einiger* bestimmten Integrale mit aufgenommen, aber meines Wissens giebt es nichts der Art, was man einigermafsen *vollständig* nennen könnte. Woran mag dies liegen?

Erstens ist die Methode der ganzen Integralrechnung gewissermafsen indirect; namentlich auch die Lehre von den bestimmten Integralen. Es ist nur durch eine grofse Zahl ganz verschiedener Methoden gelungen, die Formeln aufzustellen, die uns zu Gebote stehen. Nachdem für dieselben ***Euler, Cauchy, Legendre, Poisson, Laplace*** den Grund gelegt haben, sind die Methoden vervielfältigt und durch mehrere Mathematiker zur Ermittlung neuer Formeln angewandt worden. Diese Arbeiten sind aber in Journalen und in den Abhandlungen der verschiedenen Akademieen zerstreut, und nicht Jeder ist in der Lage, die verschiedenen Resultate benutzen zu können; noch weniger, sie alle beisammen zu haben. Auch hat noch die indirecte Form der Methode ein anderes Übel, welches, wie in der Integralrechnung überhaupt, bei den bestimmten Integralen um so stärker ist. Nämlich, dafs es in dem Bekannten zuweilen kleinere, öfters gröfsere *Lücken* giebt; dafs Ausdrücke, obgleich oft nur wenig von einander verschieden, doch nur mittels anderer Methoden, und bisweilen gar nicht zu ermitteln sind. Man könnte fast sagen,

dafs es noch kein Ganzes gebe, und dafs nur lauter einzelne Bruchstücke dastehen, welche zu einem Ganzen zusammenzubringen noch nicht gelang. Dies hat seinen Grund in dem indirecten Gange der Behandlungs-Arten, und auch wohl in deren Verschiedenheit.

Da die Ungleichartigkeit der Methoden einen eigenthümlichen Vortheil gewährt hat, so läfst sich ihr nicht entsagen. Man ist öfters auf von einander ganz unabhängigen Wegen zu denselben Resultaten gelangt, und man konnte also die eine Methode durch die andere prüfen und ihre Gültigkeit beweisen. Nicht immer indessen war Dies der Fall, sondern nicht selten waren die Resultate von einander abweichend, also die Unzuläfslichkeit der betretenen Wege, wenigstens des einen, aufser Zweifel; so dafs man erst die Grund-Ideen nach der Theorie der Functionen näher prüfen, genauer bestimmen und wo möglich berichtigen mufste; woraus man dann sahe, was unzuläfslich, oder in der Lehre von den unbestimmten Coëfficienten, in der Theorie der Reihen (ohne Rücksicht auf ihre Convergenz) falsch war. Bei der Ableitung bestimmter Integrale ist auf dem nämlichen Wege Manches näher bestimmt und beschränkt, und dadurch der Gebrauch vor Fehlern gesichert worden.

Diese Umstände, die Zerstreutheit der Ergebnisse, der Mangel an Einheit und die bisweilige Unsicherheit vieler Resultate sind vielleicht Schuld daran, dafs man Tafeln bestimmter Integrale noch entbehrt. Sie wären aber nicht nur nützlich, sondern sogar nothwendig; denn aufser ihrer steten Anwendung in der Analysis überhaupt, können sie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in der Mechanik, in der mathemathischen Physik, nicht entbehrt werden. Auch würde die Sammlung den nicht geringen Nutzen haben, den Zustand ihrer Theorie klar vor Augen zu legen, das schon Bekannte von dem Unbekannten zu trennen, und die Lücken, die sich noch finden, nachzuweisen.

Durch diese Erwägung veranlafst, habe ich mich seit einigen Jahren mit einer *Sammlung von bestimmten Integralen* beschäftigt, und es enthält diese Sammlung schon zwischen zwei- und dreitausend Formeln. Aufser den Hauptwerken von *Euler, Cauchy, Legendre, Schlömilch,* habe ich die mathematischen Journale von *Crelle, Grunert, Liouville* und der polytechnischen Schule zu Paris, so wie die Abhandlungen der Akademieen benutzt, wozu ich zuweilen Gelegenheit hatte. Aber es wird aufserdem gewifs noch mehrere Monographieen geben, die mir unbekannt blieben, oder die ich mir nicht verschaffen konnte; was indessen zur möglichsten Vollständigkeit der Arbeit noth-

wendig wäre. Wenn also die geehrten Herrn Verfasser meine Unbekanntheit zu übersehen die Güte haben wollten, würde ich Sie im Interesse der Wissenschaft bitten, mir (z. B. auf dem Wege des Buchhandels) solche Monographieen zuzusenden; wogegen ich verspreche, mein Bestes zu thun, um eine vollständige und correcte Sammlung zu liefern.

Es würde dann auch vielleicht gelingen, ein Nebenziel zu erreichen, welches ich mir vorgesteckt habe: nämlich durch die Tafeln den Gang der Entwicklung ihrer Berechnung darzustellen. Dies würde dadurch zu erreichen gesucht werden, dafs bei jeder Formel notirt wird, *welcher* Autor sie abgeleitet habe, und *wo* die Ableitung zu finden sei; mit der dazu gehörigen Litteratur; so dafs man die Quelle nachschlagen, und die Ableitung einzelner Formeln, nebst ihrem Zusammenhange mit andern Formeln, prüfen könnte.

Wenn ich mich der erbetenen Unterstützung der Mathematiker erfreuen sollte, so traue ich meiner Arbeit zu, dafs sie nicht eine blofse Compilation sein, sondern der Wissenschaft und ihren Verehrern zum Nutzen gereichen solle.

Deventer in den Niederlanden den 8. Mai 1853.

12.

Two lettres of the Geometrical correspondence between M. *Donkin* and M. *Spottiswoode*.

. . . . The following is partly a simplification and partly a development of a method which you once shewed me for determining two cyclie sections of a surface of the second order.

If θ, μ, l, m, n, l', m', n', P, Q, R, K, be any constants (I shall suppose

$$l^2+m^2+n^2=1, \quad l'^2+m'^2+n'^2=1),$$

it is clear that the surface, whose equation is

(1) $\theta(x^2+y^2+z^3)+\mu(lx+my+nz)(l'x+m'y+n'z)+Px+Qy+Rz=K,$

is cut circularly by the two systems of planes represented by

$$lx+my+nz = \text{Const.}$$
$$l'x+m'y+n'z = \text{Const.},$$

since either of these assumptions reduces (1.) to the equation of a sphere. Now (1) will coïncide with the general equation

(2) $Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy+Px+Qy+Rz=K;$

provided we have

$$\theta+\mu ll' = A, \quad \mu(mn'+m'n)=2F,$$

which conditions may be written:

$$\frac{ll'}{A-\theta}=\frac{mm'}{B-\theta}=\frac{nn'}{C-\theta}=\frac{mn'+m'n}{2F}=\frac{nl'+n'l}{2G}=\frac{lm'+l'm}{2H}=\frac{1}{\mu},$$

from which (writing $A-\theta=A'$, $B-\theta=B'$, $C-\theta=C'$) the following are immediately deducible:

(3) $$\frac{mn'-m'n}{\sqrt{(F^2-BC)}}=\frac{nl'-n'l}{\sqrt{(G^2-CA)}}=\frac{lm'-l'm}{\sqrt{(H^2-AB)}}=\frac{2}{\mu}.$$

We have then, if

$$F^2-BC=\mathrm{F}, \quad G^2-CA=\mathrm{G}, \quad H^2-AB=\mathrm{H}:$$

$$mn'+m'n = \frac{2}{\mu}F$$

$$mn'-m'n = \frac{2}{\mu}\sqrt{\mathrm{F}},$$

whence

$$mn' = \frac{1}{\mu}(F+\sqrt{\mathrm{F}}), \quad m'n = \frac{1}{\mu}(F-\sqrt{\mathrm{F}});$$

which equations, combined with

$$mm' = \frac{B'}{\mu}, \quad nn' = \frac{C'}{\mu},$$

give immediately:

$$\frac{n'}{m'} = \frac{F+\sqrt{\mathrm{F}}}{B'} = \frac{C'}{F-\sqrt{\mathrm{F}}}, \quad \frac{m}{n} = \frac{F+\sqrt{\mathrm{F}}}{C'} = \frac{B'}{F-\sqrt{\mathrm{F}}},$$

$$\frac{l'}{n'} = \frac{G+\sqrt{\mathrm{G}}}{C'} = \frac{A'}{G-\sqrt{\mathrm{G}}}, \quad \frac{n}{l} = \frac{G+\sqrt{\mathrm{G}}}{A'} = \frac{C'}{G-\sqrt{\mathrm{G}}},$$

$$\frac{m'}{l'} = \frac{H+\sqrt{\mathrm{H}}}{A'} = \frac{B'}{H-\sqrt{\mathrm{H}}}, \quad \frac{l}{m} = \frac{H+\sqrt{\mathrm{H}}}{B'} = \frac{A'}{H-\sqrt{\mathrm{H}}}.$$

Thus the six direction-cosines l, m, n, l', m', n' are completely determined as soon as θ (which is involved in A' etc.) is known. To find an equation for determining θ, we have only to substitute for $m:n$, $n:l$, $l:m$, their values in the identical equation

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{l}\cdot\frac{l}{m} = 1;$$

we find

$$(F\pm\sqrt{\mathrm{F}})(G\pm\sqrt{\mathrm{G}})(H\pm\sqrt{\mathrm{H}}) = A'B'C'.$$

But it is better to employ your original method. Reverting, namely to the equations (1 and 2), we obtain, by subtraction:

$$A'x^2+B'y^2+C'z^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy = \mu(lx+my+nz)(l'x+m'y+n'z),$$

so that we have only to express the condition that the function on the left-handside of this equation is capable of being resolved into linear factors, which, as is well known, is

$$(4) \quad A'B'C'-A'F^2-B'G^2-C'H^2+2FGH = 0.$$

It is to be remarked, that the expressions $mn'-m'n$, etc. are proportional to the direction-cosines of the line of intersection of the cyclic planes; and their values being proportional (3) to $\sqrt{(F^2-B'C')}$, $\sqrt{(G^2-C'A')}$, $\sqrt{(H^2-A'B')}$, it follows that the line in question coïncides with one of the principal axes of the cone. In fact, the equation (4), multiplied by A', may be put in the form

$$(G^2-C'A')(H^2-A'B') = (GH-FA')^2$$

and in like manner, multiplying by B' and C', we set the two other forms

$$(H^2 - A'B')(F^2 - B'C') = (HF - GB')^2,$$
$$(F^2 - B'C')(G^2 - C'A') = (FG - HC')^2,$$

by means of which expressions it is easy to deduce the above forms for the direction-cosines of the principal axes.

But there are other important consequences to be drawn from the equation (4), when put in the three forms last written. In the first place we see that the three equations F, G, H, have necessarily the same sign; so that $\sqrt{F}$, $\sqrt{G}$, $\sqrt{H}$ are either all real, or all imaginary.

Next taking any one of the three forms, for example

$$(G^2 - C'A')(H^2 - A'B') - (G'H - FA')^2 = 0,$$

let β, β' be the two values of θ which satisfy the equation $G^2 - C'A' = 0$ (which are necessarily real), and in like manner let γ, γ' be the two roots of $H^2 - A'B' = 0$. Let these four quantities, arranged in order of magnitude, be called [1], [2], [3], [4]. In the above equation, which we will write thus:

$$S = \mathrm{GH} - \mathrm{A}^2 = 0$$

(which is of the *fourth* degree, with respect to θ, having been multiplied by A'). Let us examine the value of S, while θ varies continuously from $-\infty$ to $+\infty$. We see that when $\theta = -\infty$, G and H are both negative and S is positive.

When $\theta = [1]$, we have S negative; so that there is a root of S less than [1]. But since G and H are negative as long as $\theta < [1]$, such a root gives *imaginary* values to the direction-cosines l, m, n; l', m', n'. Again no root of S can lie between [1] and [2], because it is plain that for values of θ between these limits, G and H have different signs. For the same reason no root can lie between [3] and [4]. When $\theta = [4]$, we have S negative, and when $\theta = +\infty$, S is positive. Therefore there is one root greater than [4]; but this again gives imaginary direction-cosines, because G and H are both negative, when $\theta > [4]$. Of the two remaining roots, one is given by $A' = 0$, or $\theta = A$, and is extraneous to the geometrical question, having been introduced by multiplication. But it will enable us to shew that the *fourth* root lies between [2] and [3]. For since $\theta = [2]$ and $\theta = [3]$ both give S negative, *both roots*, or else *neither*, must lie between [2] and [3]. Now it is easy to shew that A does lie between these limits. For the quantities [1], [2], [3], [4], are the values of the expressions

$$\tfrac{1}{2}(A + B) \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}(A - B)^2 + H^2)}, \quad \tfrac{1}{2}(A + C) \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}(A - C)^2 + G^2)},$$

which may obviously be written in the form

$$A \pm C, \quad A + C_1,$$

where C and C_1 are positive. And it is plain that either $A \pm C$ are the values of [1] and [4] and $A \pm C_1$ of [2] and [3]; or vice versa. In either case A lies between [2] and [3], and therefore also so does the fourth root of S. And since for values of θ between [2] and [3], G and H are both positive, the root in question gives ***real*** values of the direction-cosines.

These conclusions may be recapitulated as follows.

Let θ', θ'' be two roots of that one of the three equations

$$F = 0, \quad G = 0, \quad H = 0,$$

whose roots are closet together, and $\theta_{,}$, $\theta_{,,}$, the roots of that one that are farthest a part. Then of the three roots of the cubic [4], two lie respectively without the limits $\theta_{,}$, $\theta_{,,}$, and the third within the limits θ', θ''; and this third root gives an unique system of real values to the direction-cosines l, m, n; l', m', n'; thus determining an unique pair of real cyclic planes.

It would be easy to examine the peculiarities of the cases in which the cubic has equal or evanescent roots. But I will not pursue the subject farther.

It should be added that the limits of the roots of the cubic [4] were originally tracted by M. ***Cauchy*** (see ***Exercices de Math.*** 1828. p. 9.), but in a manner less simple, as it appears to me, than the above.

Oxford, March 24. 1853.

W. F. Donkin.

. . . . Your method in applicable to the case of four variables, and when so applied, gives rise to some interesting geometrical results. Let

$$(1) \quad U = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Ew^2 + 2(Fyz + Gzx + Hxy + Lwx + Mwy + Nwz) = 0,$$

then, if U can be put in the form

$$(2) \quad \theta(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) + (lx + my + wz + kw)(l'x + m'y + n'z + k'w) = 0$$

we have, writing

$$(3) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \varrho^2, \\ lx + my + nz + kw = u, \\ l'x + m'y + n'z + k'w = v: \end{cases}$$

$$(4.) \quad U - \theta\varrho^2 = uv.$$

Hence, comparing coefficients:

$$(5)\qquad \frac{ll'}{A-\theta}=\frac{mm'}{B-\theta}=\frac{nn'}{C-\theta}=\frac{kk'}{E-\theta}$$
$$=\frac{mn'+m'n}{2F}=\frac{nl'+n'l}{2G}=\frac{lm'+l'm}{2H}=\frac{lk'+l'k}{2L}=\frac{mk'+m'k}{2M}=\frac{nk'+n'k}{2N},$$

also, writing

$$(6)\qquad \begin{cases} A-\theta=A', & B-\theta=B', & C-\theta=C', & E-\theta=E', \\ F^2-B'C'=\mathrm{F}, & G^2-C'A'=\mathrm{G}, & H^2-A'B'=\mathrm{H}, \\ L^2-A'E'=\mathrm{L}, & M^2-B'E'=\mathrm{M}, & N^2-C'E'=\mathrm{N}; \end{cases}$$

each of these ratios is equal to

$$(7)\qquad \frac{mn'-m'n}{2\sqrt{\mathrm{F}}}=\frac{nl'-n'l}{2\sqrt{\mathrm{G}}}=\frac{lm'-l'm}{2\sqrt{\mathrm{H}}}=\frac{lk'-l'k}{2\sqrt{\mathrm{L}}}=\frac{mk'-m'k}{2\sqrt{\mathrm{M}}}=\frac{nk'-n'k}{2\sqrt{\mathrm{N}}},$$

from which, combined with (5), we derive the following systems:

$$(8)\qquad \begin{cases} \frac{m}{n}=\frac{F+\sqrt{\mathrm{F}}}{C'}=\frac{B'}{F-\sqrt{\mathrm{F}}}=\frac{H-\sqrt{\mathrm{H}}}{G+\sqrt{\mathrm{G}}}=\frac{M+\sqrt{\mathrm{M}}}{N+\sqrt{\mathrm{N}}}, \\ \frac{n}{l}=\frac{G+\sqrt{\mathrm{G}}}{A'}=\frac{C'}{G-\sqrt{\mathrm{G}}}=\frac{F-\sqrt{\mathrm{F}}}{H+\sqrt{\mathrm{H}}}=\frac{N+\sqrt{\mathrm{N}}}{L+\sqrt{\mathrm{L}}}, \\ \frac{l}{m}=\frac{H+\sqrt{\mathrm{H}}}{B'}=\frac{A'}{H-\sqrt{\mathrm{H}}}=\frac{G-\sqrt{\mathrm{G}}}{F+\sqrt{\mathrm{F}}}=\frac{L+\sqrt{\mathrm{L}}}{M+\sqrt{\mathrm{M}}}, \\ \frac{l}{k}=\frac{L+\sqrt{\mathrm{L}}}{E'}=\frac{A'}{L-\sqrt{\mathrm{L}}}=\frac{H+\sqrt{\mathrm{H}}}{M-\sqrt{\mathrm{M}}}=\frac{G-\sqrt{\mathrm{G}}}{N+\sqrt{\mathrm{N}}}, \\ \frac{m}{k}=\frac{M+\sqrt{\mathrm{M}}}{E'}=\frac{B'}{M-\sqrt{\mathrm{M}}}=\frac{F+\sqrt{\mathrm{F}}}{N-\sqrt{\mathrm{N}}}=\frac{H-\sqrt{\mathrm{H}}}{L+\sqrt{\mathrm{L}}}, \\ \frac{n}{k}=\frac{N+\sqrt{\mathrm{N}}}{E'}=\frac{C'}{N-\sqrt{\mathrm{N}}}=\frac{G+\sqrt{\mathrm{G}}}{L-\sqrt{\mathrm{L}}}=\frac{F-\sqrt{\mathrm{F}}}{M+\sqrt{\mathrm{M}}}, \end{cases}$$

with a corresponding set of values for $l':m':n':k'$, obtained from (8) by writing $F\mp\sqrt{\mathrm{F}}$ etc. instead of $F\pm\sqrt{\mathrm{F}}$ etc. troughout. From these may be obtained the equations of condition:

$$(9)\qquad \begin{cases} (F\pm\sqrt{\mathrm{F}})(G\pm\sqrt{\mathrm{G}})(H\pm\sqrt{\mathrm{H}}) = A'B'C', \\ (F\pm\sqrt{\mathrm{F}})(M\mp\sqrt{\mathrm{M}})(N\pm\sqrt{\mathrm{N}}) = E'B'C', \\ (G\pm\sqrt{\mathrm{G}})(N\mp\sqrt{\mathrm{N}})(L\pm\sqrt{\mathrm{L}}) = E'C'A', \\ (H\pm\sqrt{\mathrm{H}})(L\mp\sqrt{\mathrm{L}})(M\pm\sqrt{\mathrm{M}}) = E'A'B', \end{cases}$$

each of which, although apparently two distinct equations, is equivalent to only one, on account of the identities

$$(10)\qquad \begin{cases} (F^2-\mathrm{F})(G^2-\mathrm{G})(H^2-\mathrm{H}) = A'^2B'^2C'^2, \\ \cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot \end{cases}$$

and the system is finally equivalent to only three independent conditions on account of the identity

$$(11)\qquad (L^2-\mathrm{L})(M^2-\mathrm{M})(N^2-\mathrm{N}) = E'^3A'B'C'.$$

It may be noticed in passing that two of the conditions (9) may be thrown into the form

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{M+\sqrt{\mathrm{M}}}{M-\sqrt{\mathrm{M}}} : \dfrac{N+\sqrt{\mathrm{N}}}{N-\sqrt{\mathrm{N}}} = \dfrac{F+\sqrt{\mathrm{F}}}{F-\sqrt{\mathrm{F}}} \\ \dfrac{N+\sqrt{\mathrm{N}}}{N-\sqrt{\mathrm{N}}} : \dfrac{L+\sqrt{\mathrm{L}}}{L-\sqrt{\mathrm{L}}} = \dfrac{G+\sqrt{\mathrm{G}}}{G-\sqrt{\mathrm{G}}} \\ \dfrac{L+\sqrt{\mathrm{L}}}{L-\sqrt{\mathrm{L}}} : \dfrac{M+\sqrt{\mathrm{M}}}{M-\sqrt{\mathrm{M}}} = \dfrac{H+\sqrt{\mathrm{H}}}{H-\sqrt{\mathrm{H}}}, \end{cases}$$

to which others might be added.

The conditions (9) may likewise be put in a form better known, as follows. Developping the first pair of equations, and subtracting the results, we have

$$(13)\qquad GH\sqrt{\mathrm{F}} + HF\sqrt{\mathrm{G}} + FG\sqrt{\mathrm{H}} + \sqrt{(\mathrm{FGH})} = 0;$$

adding the results, we have

$$(14)\qquad F\sqrt{(\mathrm{GH})} + G\sqrt{(\mathrm{HF})} + H\sqrt{(\mathrm{FG})} + FGH - A'B'C' = 0;$$

transponing the last termes of (13) and quadring:

$$\mathrm{F}G^2H^2 + \mathrm{G}H^2F^2 + \mathrm{H}F^2G^2 + 2FGH(F\sqrt{(\mathrm{GH})} + G\sqrt{(\mathrm{HF})} + H\sqrt{(\mathrm{FG})}) = \mathrm{FGH};$$

substituting from (14), and dividing throughout by $A'B'C'$, there finally results:

$$(15)\qquad A'B'C' - A'F^2 - B'G^2 - C'H^2 + 2FGH = 0.$$

By means of this reduction the system (9) admits of being expressed in a brief manner, as follows: Let

$$(16)\qquad \begin{cases} \Omega = A'HGL \\ \qquad\quad HB'FM \\ \qquad\quad GFC'N \\ \qquad\quad LMNE', \end{cases}$$

then (9) take the form

$$(17)\qquad \frac{d\Omega}{dA'} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dB'} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dC'} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dE'} = 0.$$

Writing, for convenience,

$$(18)\qquad \begin{cases} -(A+B+C) = (A,B,C)_1 \\ -(BC+CA+AB)+F^2+G^2+H^2 = (A,B,C)_2 \\ AF^2+BG^2+CH^2-ABC-2FGH = (ABC)_3, \end{cases}$$

the four conditions (17) may be written:

$$(19)\qquad \begin{cases} \theta^3+(ABC)_1\theta^2+(ABC)_2\theta+(ABC)_3 = 0, \\ \theta^3+(BCE)_1\theta^2+(BCE)_2\theta+(BCE)_3 = 0, \\ \theta^3+(CEA)_1\theta^2+(CEA)_2\theta+(CEA)_3 = 0, \\ \theta^3+(EAB)_1\theta^2+(EAB)_2\theta+(EAB)_3 = 0, \end{cases}$$

and the two conditions resulting from the elimination of θ from any three of these equations will be those to which the quantities $A, B, C, F, G, H, L, M, N$, must be subject, in order that the transformation from (1) to (2) may be possible. But it does not seem worth, while to proceed to the development of the results, which would be a work of great labour.

It remains to determine the geometrical results, ensuing upon the transformation in question; the principal peculiarities of which depend on the value of the quantity w.

1. Let $w = 0$; then the problem reduces itself to that considered in the latter part of your letter.

2. Let w be a real constant; then the surface will be cut circularly by either of the planes

$$lx+my+nz+kw = \varpi$$
$$l'x+m'y+n'z+k'w = \varpi'$$

(or, as they may be termed, the planes ϖ, ϖ'). It may also be noticed that ϖ, ϖ' and ϖ vanish together.

3. Let w be an imaginary constant; then the surface is cut circularly by either of the imaginary planes $\varpi = 0$, or $\varpi' = 0$, and also by the real hyperboloïd

$$(lx+my+nz)(l'x+m'y+n'z) = k^2w^2.$$

4. Let w be a homogeneous linear function of x, y, z; e. g. let

$$w = \lambda x+\mu y+\nu z;$$

then if the surface be cut by either of the planes

$$u+kw = 0,$$
$$v+kw = 0,$$

i. e. by a plane making angles with the planes u and w, or v and w, the ratio of whose series is $= -k$; it will be cut also in its intersection with the surface

$$x^2+y^2+z^2+(\lambda x+\mu y+\nu z)^2 = 0,$$

and if moreover

$$w_1 = w\sqrt{-}, \quad \lambda_1 = \lambda\sqrt{-}, \quad \mu_1 = \mu\sqrt{-}, \quad \nu_1 = \nu\sqrt{-},$$

the two surfaces

$$uv + k^2 w_1^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - (\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z)^2 = 0$$

will both intersect (1) in the same curve. This latter surface has a double contact with the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.}$$

and is cut circularly by the plane

$$w_1 = 0,$$

a plane which cuts the former surface in the straight line

$$u = 0, \quad v = 0.$$

It may further be remarked that the plane $w_1 = 0$ cuts the original surface in the same curve as does the cone

$$\theta r^2 + uv = 0,$$

whose cyclic planes are $u = 0$, $v = 0$.

London, March 26. 1853.

W. Spottiswoode.

13.

Lösung der Aufgaben *C.* und *D.* in Nr. 21. Band 45 dieses Journals S. 284.

(Von dem Herrn Dr. phil. *Lottner*, Lehrer der Mathematik und Physik an der höhern Bürgerschule zu Lippstadt.)

Aufgabe *C.*

Es sei die aufzulösende Gleichung 4ten Grades, deren Coëfficienten, um die Brüche zu vermeiden, mit passenden Zahlen multiplicirt sind:

$$x^4 - 8ax^3 - 12bx^2 - 48cx + 12d = 0.$$

Bezeichnet man:

$$(1.)\quad \begin{cases} \sqrt[3]{\{6a^2d + 18c^2 - b^3 + 3bd + 12abc \\ \qquad + \sqrt{[(6a^2d + 18c^2 - b^3 + 3bd + 12abc)^2 - (b^2 - 8ac + d)^3]}\} \\ \qquad = \sqrt[3]{[A + \sqrt{(A^2 - B^3)}]} \text{ mit } p \text{ und} \\ \sqrt[3]{\{6a^2d + 18c^2 - b^3 + 3bd + 12abc \\ \qquad - \sqrt{[6a^2d + 18c^2 - b^3 + 3bd + 12abc)^2 - (b^2 - 8ac + d)^3]}\} \\ \qquad = \sqrt[3]{[A - \sqrt{(A^2 - B^3)}]} \text{ mit } q, \end{cases}$$

so sind, vorausgesetzt, dafs $A^2 - B^3 > 0$ ist, die 4 Wurzeln der Gleichung:

$$(2.)\quad \begin{cases} x_1 = 2a + \sqrt{(4a^2 + 2b + p + q)} \\ \qquad + \sqrt{\{8a^2 + 4b - p - q + \sqrt{[(8a^2 + 4b - p - q)^2 + 3(p - q)^2]}\}}, \\ x_2 = 2a + \sqrt{(4a^2 + 2b + p + q)} \\ \qquad - \sqrt{\{8a^2 + 4b - p - q + \sqrt{[(8a^2 + 4b - p - q)^2 + 3(p - q)^2]}\}}, \\ x_3 = 2a - \sqrt{(4a^2 + 2b + p + q)} \\ \qquad + i\sqrt{\{-8a^2 - 4b + p + q + \sqrt{[(8a^2 + 4b - p - q)^2 + 3(p - q)^2]}\}}, \\ x_4 = 2a - \sqrt{(4a^2 + 2b + p + q)} \\ \qquad - i\sqrt{\{-8a^2 - 4b + p + q + \sqrt{[(8a^2 + 4b - p - q)^2 + 3(p - q)^2]}\}}. \end{cases}$$

Im andern Falle, wenn $A^2 - B^3 < 0$ ist, setze man:

$$\cos\alpha = \frac{6a^2d + 18c^2 + 3bd - b^3 + 12abc}{(b^2 - 8ac + d)^{\frac{3}{2}}} = \frac{A}{B^{\frac{3}{2}}},$$

so sind die vier Wurzeln:

$$(4.)\quad \begin{cases} x_1 = 2a+\sqrt{(4a^2+2b+2B^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}\alpha)}+\sqrt{(4a^2+2b-2B^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}(\pi+\alpha))} \\ \qquad\qquad +\sqrt{(4a^2+2b-2B^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}(\pi-\alpha))}, \\ x_2 = 2a+\sqrt{(4a^2+2b+2B^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}\alpha)}-\sqrt{(4a^2+2b-2B^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}(\pi+\alpha))} \\ \qquad\qquad -\sqrt{(4a^2+2b-2B^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}(\pi-\alpha))}, \\ x_3 = 2a-\sqrt{(4a^2+2b+2B^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}\alpha)}-\sqrt{(4a^2+2b-2B^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}(\pi+\alpha))} \\ \qquad\qquad +\sqrt{(4a^2+2b-2B^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}(\pi-\alpha))}, \\ x_4 = 2a-\sqrt{(4a^2+2b+2B^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}\alpha)}+\sqrt{(4a^2+2b-2B^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}(\pi+\alpha))} \\ \qquad\qquad -\sqrt{(4a^2+2b-2B^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}(\pi-\alpha))}. \end{cases}$$

Wie man sieht, müssen in diesem Falle die vier Wurzeln entweder alle reell, oder alle imaginär sein, je nachdem $4a^2+2b-2B^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}(\pi+\alpha)$ und $4a^2+2b-2B^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}(\pi-\alpha)$ beide positiv oder einer von beiden Ausdrücken negativ ist.

Aufgabe *D.*

Es ist nun zu zeigen, dafs wenn $d=0$ ist, die Auflösung mit der der cubischen Gleichung

$$x^3-8ax^2-12bx-48c = 0$$

übereinstimmt.

Setzt man:

$$(5.)\quad \begin{cases} \sqrt[3]{\{\frac{64}{27}a^3+2ab+3c+\sqrt{[(\frac{64}{27}a^3+2ab+3c)^2-(\frac{16}{9}a^2+b)^3]}\}} \\ \qquad = \sqrt[3]{\{C+\sqrt{(C^2-D^3)}\}} = u \text{ und} \\ \sqrt[3]{\{\frac{64}{27}a^3+2ab+3c-\sqrt{[(\frac{64}{27}a^3+2ab+3c)^2-(\frac{16}{9}a^2+b)^3]}\}} \\ \qquad = \sqrt[3]{\{C-\sqrt{(C^2-D^3)}\}} = v, \end{cases}$$

so sind bekanntlich die drei Wurzeln derselben:

$$(5\,a.)\quad x_1 = \tfrac{8}{3}a+2(u+v),\quad x_3 = \tfrac{8}{3}a-(u+v)-(u-v)\sqrt{3}\,i.$$

$$(6.)\quad x_2 = \tfrac{8}{3}a-(u+v)+(u-v)\sqrt{3}\,i,$$

Wird $d=0$, so reduciren sich p und q auf:

$$(7.)\quad \begin{cases} p = \sqrt[3]{[A+\sqrt{(A^2-B^3)}]} \\ \quad = \sqrt[3]{\{18c^2+12abc-b^3+\sqrt{[(18c^2+12abc-b^3)^2-(b^2-8ac)^3]}\}}, \\ q = \sqrt[3]{[A-\sqrt{(A^2-B^3)}]} \\ \quad = \sqrt[3]{\{18c^2+12abc-b^3-\sqrt{[(18c^2+12abc-b^3)^2-(b^2-8ac)^3]}\}}. \end{cases}$$

Es ist also zu zeigen, dafs nach der Substitution der Werthe (7.) in (2.), die Ausdrücke daselbst mit denen in (5 *a.*) übereinstimmen.

Man erhält

$$(8.) \qquad p = -\tfrac{4}{3}av + u^2, \qquad q = -\tfrac{4}{3}au + v^2.$$

Die Richtigkeit ergiebt sich aus folgender Rechnung.

Es müfste sein:

$$(9.) \qquad \begin{cases} p^3 = u^6 - 4au^4v + \tfrac{16}{3}a^2u^2v^2 - \tfrac{64}{27}a^3v^3, \\ q^3 = v^6 - 4av^4u + \tfrac{16}{3}a^2u^2v^2 - \tfrac{64}{27}a^3u^3, \end{cases}$$

oder, nach Einsetzung der Werthe aus (5. und 7):

$$(10.) \begin{cases} A + \sqrt{(A^2 - B^3)} \\ = 2C^2 - D^3 - 4aCD + \tfrac{16}{3}a^2D^2 - \tfrac{64}{27}a^3C + (2C - 4aD + \tfrac{64}{27}a^3)\sqrt{(C^2 - D^3)} \text{ und} \\ A - \sqrt{(A^2 - B^3)} \\ = 2C^2 - D^3 - 4aCD + \tfrac{16}{3}a^2D^2 - \tfrac{64}{27}a^3C - (2C - 4aD + \tfrac{64}{27}a^3)\sqrt{(C^2 - D^3)}. \end{cases}$$

Hieraus müfste ferner folgen:

$$(11.) \qquad \begin{cases} (2C - 4aD + \tfrac{64}{27}a^3)^2(C^2 - D^3) = A^2 - B^3, \\ 2C^2 - D^3 - 4aCD + \tfrac{16}{3}a^2D^2 - \tfrac{64}{27}a^3C = A. \end{cases}$$

Nun erhält man in der That, nach einiger Rechnung:

$$2C - 4aD + \tfrac{64}{27}a^3 = 2(\tfrac{64}{27}a^3 + 2ab + 3c) - 4a(\tfrac{16}{9}a^2 + b) + \tfrac{64}{27}a^3 = 6c,$$

$$A^2 - B^3 = 3bc^2(-b^3 + 9c^2 + 12abc + \tfrac{128}{9}a^3c - \tfrac{4}{3}a^2b^2) = 3bc^2(C^2 - D^3).$$

Die erste Gleichung (11.) wäre also verificirt; die zweite verwandelt sich, mit Hülfe der ersten, in:

$$(12.) \begin{cases} (bc - \tfrac{128}{27}a^3)C + D^2(\tfrac{16}{3}a^2 - D) = A, \text{ oder in} \\ (bc - \tfrac{128}{27}a^3)(\tfrac{64}{27}a^3 + 2abc + 3c) + (\tfrac{16}{9}a^2 + b)^2(\tfrac{32}{9}a^2 - b) = 12abc + 18c^2 - b^3; \end{cases}$$

welche Gleichung nach einigen Reductionen sich ebenfalls als identisch erweiset. Da die beiden Gleichungen (11.) zur Bestimmung von C und D hinreichen und ihre Identität nachgewiesen ist, so folgt die Richtigkeit der Gleichungen (8.).

Es folgt aus denselben:

$$(13.) \qquad \begin{cases} p + q = -\tfrac{4}{3}a(u + v) + u^2 + v^2 = (u + v - \tfrac{2}{3}a)^2 - 2uv - \tfrac{4}{9}a^2 \\ \qquad\qquad = (u + v - \tfrac{2}{3}a)^2 - 2D - \tfrac{4}{9}a^2, \\ p - q = (\tfrac{4}{3}a + u + v)(u - v). \end{cases}$$

Die Gröfse $4a^2 + 2b$ läfst sich unter der Form $\tfrac{4}{9}a^2 + 2D$ darstellen; also ist:

$$p + q + 4a^2 + 2b = (u + v - \tfrac{2}{3}a)^2,$$

$$8a^2 - 4b - p - q = \tfrac{8}{9}a^2 + 4D + \tfrac{4}{3}a(u + v) - u^2 - v^2.$$

Da $D = 4v$ ist, so wird hieraus:

$$(14.) \quad 8a^2 - 4b - p - q = 2[(\tfrac{4}{3}a + u + v)^2 - 3(u - v)^2],$$

folglich:

$$(15.) \quad \begin{cases} & (8a^2 - 4b - p - q)^2 + 3(p - q)^2 \\ = & \tfrac{1}{4}[(\tfrac{4}{3}a + u + v)^2 - 3(u - v)^2]^2 + 3(\tfrac{4}{3}a + u + v)^2 (u - v)^2 \\ = & \tfrac{1}{4}[(\tfrac{4}{3}a + u + v)^2 + 3(u - v)^2]^2, \\ & \sqrt{((8a^2 - 4b - p - q)^2 + 3(p - q)^2)} \pm (8a^2 + 4b - p - q) \\ = & \begin{cases} (\tfrac{4}{3} + u + v)^2 \\ 3(u - v)^2. \end{cases} \end{cases}$$

Der erste Werth pafst für das obere, der zweite für das untere Zeichen.

Mit Hülfe dieser Transformationen verwandeln sich in dem Falle $d = 0$ die Ausdrücke in (2.) in folgende:

$$x_1 = 2a + u + v - \tfrac{2}{3}a + \tfrac{4}{3}a + u + v = \tfrac{8}{3}a + 2(u + v),$$
$$x_2 = 2a + u + v - \tfrac{2}{3}a - \tfrac{4}{3}a - u - v = 0,$$
$$x_3 = 2a - u - v + \tfrac{2}{3}a - (u - v)\sqrt{3}.i = \tfrac{8}{3}a - (u + v) - (u - v)\sqrt{3}.i,$$
$$x_4 = 2a - u - v + \tfrac{2}{3}a + (u - v)\sqrt{3}.i = \tfrac{8}{3}a - (u + v) + (u - v)\sqrt{3}.i;$$

welche genau mit den Ausdrücken in (6.) übereinstimmen.

Für den Fall der trigonometrischen Auflösung verwandelt sich (3.) in

$$\cos\alpha = \frac{A}{B^{\frac{3}{2}}} = \frac{18c^2 + 12ab - b^3}{(b^2 - 8ac)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die dann entstehende cubische Gleichung hat, wenn

$$\cos\alpha_1 = \frac{C}{D^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{6}{2}\frac{4}{7}a^3 + 2ab + 3c}{(\frac{1}{9}^6 a^2 + b)^{\frac{3}{2}}}$$

gesetzt wird,

$$(16.) \quad \begin{cases} x_1 = \tfrac{8}{3}a + 4D^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{3}\alpha_1, \\ x_2 = \tfrac{8}{3}a + 4D^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{3}(\pi + \alpha_1), \\ x_3 = \tfrac{8}{3}a + 4D^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{3}(\pi - \alpha_1) \end{cases}$$

zu Wurzeln, deren Identität mit den Ausdrücken in (4.) für diesen Fall nachzuweisen ist.

Die Gleichungen:

$$p = -\tfrac{4}{3}av + u^2, \qquad q = -\tfrac{4}{3}au + v^2$$

verwandeln sich jetzt in folgende:

$$(17.) \quad \begin{cases} B^{\frac{1}{2}}e^{+\frac{1}{3}i\alpha} = -\tfrac{4}{3}aD^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{3}i\alpha_1} + De^{+\frac{2}{3}i\alpha_1} \\ B^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{3}i\alpha} = -\tfrac{4}{3}aD^{\frac{1}{2}}e^{+\frac{1}{3}i\alpha_1} + De^{-\frac{2}{3}i\alpha_1}. \end{cases}$$

Die Addition der Cuben dieser Ausdrücke giebt:

$$B^{\frac{3}{2}}\cos\alpha = 2D^3\cos^2\alpha_1 - D^3 - 4aD^{\frac{5}{2}}\cos\alpha_1 + \tfrac{16}{3}a^2D^2 - \tfrac{64}{27}a\,D^{\frac{3}{2}}\cos\alpha_1$$

oder

$$A = 2C^2 - D^3 - 4aCD + \tfrac{19}{3}a^2D^3 - \tfrac{64}{27}a^3C;$$

also dieselbe Gleichung wie (11.).

Multiplicirt man die beiden Ausdrücke (17.), so erhält man für die zweite zur Bestimmung von C und D nothwendige Gleichung:

$$B = \tfrac{16}{9}a^2D - \tfrac{8}{3}aD^{\frac{3}{2}}\cos\alpha_1 + D^2 = \tfrac{16}{9}a^2D - \tfrac{8}{3}aC + D^2,$$

die ebenfalls durch eine kleine Rechnung als identisch sich erweiset. Also gelten die Ausdrücke in (17.).

Man erhält aus denselben leicht die reellen Formen:

$$(18.)\quad \begin{cases} 2B^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}\alpha - \frac{8}{3}aD^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}\alpha_1 + 2D\cos\frac{2}{3}\alpha_1, \\ 2B^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{3}\alpha_1 - \frac{8}{3}aD^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{3}\alpha_1 + 2D\sin\frac{2}{3}\alpha_1. \end{cases}$$

Berücksichtigt man, dafs $4a^2 + 2b = 2D + \frac{4}{9}a^2$ ist, so wird

$$(19.)\quad 4a^2 + 2b + 2B^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{3}\alpha_1 = (2D^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{3}\alpha_1 - \tfrac{2}{3}a)^2.$$

Ferner findet man

$$(20.)\quad \begin{cases} 2B^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}(\pi\pm\alpha) = -\frac{8}{3}aD^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}(\pi\mp\alpha_1) - 2D\cos\frac{2}{3}(\pi\mp\alpha_1) \\ 4a^2 + 2b - 2B^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}(\pi\pm\alpha) = (2D^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{3}(\pi\mp\alpha_1) + \frac{2}{3}a)^2. \end{cases}$$

Mit Hülfe von (19. und 20.) und der Formeln

$$\cos\tfrac{1}{3}(\pi-\alpha_1)+\cos\tfrac{1}{3}(\pi+\alpha_1) = \cos\tfrac{1}{3}\alpha_1, \quad \cos\tfrac{1}{3}(\pi-\alpha_1)-\cos\tfrac{1}{3}(\pi+\alpha_1) = \sqrt{3}\sin\tfrac{1}{3}\alpha_1$$

verwandeln sich die Wurzeln (4.) in

$$x_1 = \tfrac{8}{3}a + 4D^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{3}\alpha_1,$$
$$x_2 = 0,$$
$$x_3 = \tfrac{8}{3}a - 2D^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{3}\alpha_1 - 2D^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}\sin\tfrac{1}{3}\alpha_1 = \tfrac{8}{3}a - 4D^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{3}(\pi-\alpha_1),$$
$$x_4 = \tfrac{8}{3}a - 2D^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{3}\alpha_1 + 2D^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}\sin\tfrac{1}{3}\alpha_1 = \tfrac{8}{3}a - 4D^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{3}(\pi+\alpha_1).$$

Dies sind die Ausdrücke (16.); mithin ist die in der Aufgabe verlangte Reduction in allen Fällen ausgeführt.

Lippstadt, den 19ten April 1853.

14.

Theorie der Dreh- und Flieh-momente der parallelen Seitenkräfte, in welche Kräfte im Raume zerlegt werden können.

(Vom Herrn geh. Rathe und Professor Dr. *Schweins* in Heidelberg.)

---

§. 1.

Bisher kannte man nur die Gleichungen zwischen den Drehmomenten um verschiedene Axen, aber nicht die Gleichungen zwischen ihren Bestandtheilen oder zwischen den Drehmomenten der parallelen Seitenkräfte, welche durch Zerlegen der Kräfte nach den Richtungen der Coordinatenaxen entstehen. Diese Gleichungen sollen hier entwickelt werden. Ihre Kenntnifs ist nützlich, was sich bei späteren Untersuchungen bewähren wird.

Die Bezeichnung ist folgende: ich nehme zwei rechtwinklichte Coordinatensysteme an x, y, z und x', y', z', und nenne die Cosinusse der Winkel, welche

x' mit x, y, z bildet, α, β, γ
y' . . . . . α', β', γ'
z' . . . . . α'', β'', γ''

und die Coordinaten des Anfangspunctes des zweiten Coordinatensystems a, b, c. Ferner setze ich

$$\Sigma X = A, \quad \Sigma yZ = F, \quad \Sigma z Y = F_1, \quad \Sigma xX = l, \quad l+m = h$$
$$\Sigma Y = B, \quad \Sigma zX = G, \quad \Sigma xZ = G_1, \quad \Sigma y Y = m, \quad l+n = g$$
$$\Sigma Z = C, \quad \Sigma x Y = H, \quad \Sigma yX = H_1, \quad \Sigma zZ = n, \quad m+n = f$$

und

$$\Sigma X' = A', \quad \Sigma y'Z' = F', \quad \Sigma z'Y' = F'', \quad \Sigma x'X' = l', \quad l'+m' = h'$$
$$\Sigma Y' = B', \quad \Sigma z'X' = G', \quad \Sigma x'Z' = G', \quad \Sigma y'Y' = m', \quad l'+n' = g'$$
$$\Sigma Z' = C', \quad \Sigma x'Y' = H', \quad \Sigma y'X' = H', \quad \Sigma z'Z' = n', \quad m'+n' = f'$$

und

$$\Sigma(yZ - zY) = F - F_1 = L, \quad \Sigma(y'Z' - z'Y') = F' - F_1' = L'$$
$$\Sigma(zX - xZ) = G - G_1 = M, \quad \Sigma(z'X' - x'Z') = G' - G_1' = M'$$
$$\Sigma(xY - yX) = H - H_1 = N, \quad \Sigma(x'Y' - y'X') = H' - H_1' = N'$$

und

$$\Sigma((y-b)\mathbf{Z}-(z-c)\,\mathbf{Y}) = \mathbf{L}_{bc}$$
$$\Sigma((z-c)\,\mathbf{X}-(x-a)\,\mathbf{Z}) = \mathbf{M}_{ac}$$
$$\Sigma((x-a)\,\mathbf{Y}-(y-b)\,\mathbf{X}) = \mathbf{N}_{ab}$$

und zuletzt

$$\Sigma(y-b)\mathbf{Z} = \mathbf{F}_b, \quad \Sigma(z-c)\,\mathbf{Y} = \mathbf{F}_{1c}, \quad \Sigma(x-a)\,\mathbf{X} = l_a, \quad l_a+m_b = h_{ab}$$
$$\Sigma(z-c)\,\mathbf{X} = \mathbf{G}_c, \quad \Sigma(x-a)\,\mathbf{Z} = \mathbf{G}_{1a}, \quad \Sigma(y-b)\,\mathbf{Y} = m_b, \quad l_a+n_c = g_{ac}$$
$$\Sigma(x-a)\,\mathbf{Y} = \mathbf{H}_a, \quad \Sigma(y-b)\,\mathbf{X} = \mathbf{H}_{1b}, \quad \Sigma(z-c)\,\mathbf{Z} = n_c, \quad m_b+n_c = f_{bc}$$
$$u_{abc} = l_a+m_b+n_c, \quad u = l+m+n.$$

§. 2.

Das Product

$$(x-a).\mathbf{Z}'$$

läfst sich auf zwei verschiedene Weisen durch andere Producte ersetzen, nämlich, wenn entweder statt $\mathbf{Z}'$

$$\mathbf{Z}' = \alpha''\mathbf{X}+\beta''\mathbf{Y}+\gamma''\mathbf{Z}$$

oder statt des anderen Factors $x-a$

$$x-a = \alpha x'+\alpha' y'+\alpha'' z'$$

gesetzt wird. Man erhält dadurch die Gleichung

$$(x-a)(\alpha''\mathbf{X}+\beta''\mathbf{Y}+\gamma''\mathbf{Z}) = (\alpha x'+\alpha' y'+\alpha'' z')\,\mathbf{Z}'.$$

Eben so kann man bei den Producten

$$(y-b)\,\mathbf{Z}' \quad \text{und} \quad (z-c)\,\mathbf{Z}'$$

verfahren, nämlich

$$(y-b)(\alpha''\mathbf{X}+\beta''\mathbf{Y}+\gamma''\mathbf{Z}) = (\beta x'+\beta' y'+\beta'' z')\,\mathbf{Z}'$$
$$(z-c)(\alpha''\mathbf{X}+\beta''\mathbf{Y}+\gamma''\mathbf{Z}) = (\gamma x'+\gamma' y'+\gamma'' z')\,\mathbf{Z}'.$$

Wenn man nun den einzelnen Producten das Summenzeichen vorsetzt, und sich der obigen Zeichen bedient, so erhält man folgende Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \alpha'' l_a + \beta''\mathbf{H}_a + \gamma''\mathbf{G}_{1a} = \alpha\mathbf{G}_1'+\alpha'\mathbf{F}'+\alpha''n' \\ \alpha''\mathbf{H}_{1b}+\beta'' m_b + \gamma''\mathbf{F}_b = \beta\mathbf{G}_1'+\beta'\mathbf{F}'+\beta''n' \\ \alpha''\mathbf{G}_c + \beta''\mathbf{F}_{1c}+\gamma'' n_c = \gamma\mathbf{G}_1'+\gamma'\mathbf{F}'+\gamma''n'. \end{cases}$$

Eben so behandele ich die Producte

$$z'.\mathbf{X}, \quad z'.\mathbf{Y}, \quad z'.\mathbf{Z},$$

ich ersetze den einen Factor durch andere Gröfsen, während der zweite

Factor unverändert bleibt, nämlich

$$\begin{aligned}(\alpha''(x-a)+\beta''(y-b)+\gamma''(z-c))\,X &= z'(\alpha X'+\alpha' Y'+\alpha'' Z')\\ (\quad\ldots\ldots\ldots\quad)\,Y &= z'(\beta X'+\beta' Y'+\beta'' Z')\\ (\quad\ldots\ldots\ldots\quad)\,Z &= z'(\gamma X'+\gamma' Y'+\gamma'' Z'),\end{aligned}$$

und erhalte folgende Gleichungen:

$$(2.)\quad \begin{cases}\alpha'' l_a+\beta'' H_{1b}+\gamma'' G_c = \alpha G'+\alpha' F_1'+\alpha'' n'\\ \alpha'' H_a+\beta'' m_b+\gamma'' F_{1c} = \beta G'+\beta' F_1'+\beta'' n'\\ \alpha'' G_{1a}+\beta'' F_b+\gamma'' n_c = \gamma G'+\gamma' F_1'+\gamma'' n'.\end{cases}$$

Werden die Producte

$$(x-a)\,Y',\quad (y-b)\,Y',\quad (z-c)\,Y',\quad y'X,\quad y'Y,\quad y'Z$$

einer gleichen Behandlung unterworfen, so entstehen die Gleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases}\alpha' l_a+\beta' H_a+\gamma' G_{1a} = \alpha H'+\alpha' m'+\alpha'' F_1'\\ \alpha' H_{1b}+\beta' m_b+\gamma' F_b = \beta H'+\beta' m'+\beta'' F_1'\\ \alpha' G_c+\beta' F_{1c}+\gamma' n_c = \gamma H'+\gamma' m'+\gamma'' F_1'\end{cases}$$

und

$$(4.)\quad \begin{cases}\alpha' l_a+\beta' H_{1b}+\gamma' G_c = \alpha H_1'+\alpha' m'+\alpha'' F''\\ \alpha' H_a+\beta' m_b+\gamma' F_{1c} = \beta H_1'+\beta' m'+\beta'' F''\\ \alpha' G_{1a}+\beta' F_b+\gamma' n_c = \gamma H_1'+\gamma' m'+\gamma'' F''.\end{cases}$$

Zuletzt erzeugen die Producte

$$(x-a)\,X',\quad (y-b)\,X',\quad (z-c)\,X',\quad x'X,\quad x'Y,\quad x'Z$$

bei einem gleichen Verfahren die Gleichungen

$$(5.)\quad \begin{cases}\alpha l_a+\beta H_a+\gamma G_{1a} = \alpha l'+\alpha' H_1'+\alpha'' G'\\ \alpha H_{1b}+\beta m_b+\gamma F_b = \beta l'+\beta' H_1'+\beta'' G'\\ \alpha G_c+\beta F_{1c}+\gamma n_c = \gamma l'+\gamma' H_1'+\gamma'' G'\end{cases}$$

und

$$(6.)\quad \begin{cases}\alpha l_a+\beta H_{1b}+\gamma G_c = \alpha l'+\alpha' H'+\alpha'' G_1'\\ \alpha H_a+\beta m_b+\gamma F_{1c} = \beta l'+\beta' H'+\beta'' G_1'\\ \alpha G_{1a}+\beta F_b+\gamma n_c = \gamma l'+\gamma' H'+\beta'' G_1'.\end{cases}$$

Diese sechs Gleichungen geben den Zusammenhang der Dreh- und der Flieh-momente der parallelen Seitenkräfte in einem rechtwinklichten Coordinatensysteme mit den Dreh- und Flieh-momenten der Seitenkräfte in anderen rechtwinklichten Coordinatensystemen an.

§. 3.

Die Producte

$$l_a,\ m_b,\ n_c,\qquad l',\ m',\ n',$$

welche in diesen Gleichungen vorkommen, können durch andere ersetzt werden. Es ist nämlich nach meiner früheren Untersuchung über Fliehmomente im 38. Band 1. Heft dieses Journals Nr. 21.

$$l_a + m_b + n_c = l' + m' + n' = U_{abc}$$

eine beständige Gröfse, denn die verschiedene Richtung der Coordinaten hat auf dieselbe keinen Einflufs; daher

$$\begin{aligned} l_a &= u_{abc} - f_{bc}, & l' &= u_{abc} - f' \\ m_b &= u_{abc} - g_{ac}, & m' &= u_{abc} - g' \\ n_c &= u_{abc} - h_{ab}, & n' &= u_{abc} - h'. \end{aligned}$$

Werden diese Producte statt der ersteren gesetzt, so fällt wieder die beständige Gröfse aus den Gleichungen, und diese gehen in folgende über:

$$(7.)\quad \begin{cases} -\alpha'' f_{bc} + \beta'' H_a + \gamma'' G_{1a} = \alpha G_1' + \alpha' F' - \alpha'' h' \\ +\alpha'' H_{1b} + \beta'' g_{ac} + \gamma'' F_b = \beta G_1' + \beta' F' - \beta'' h' \\ +\alpha'' G_c + \beta'' F_{1c} - \gamma'' h_{ab} = \gamma G_1' + \gamma' F' - \gamma'' h' \end{cases}$$

und

$$(8.)\quad \begin{cases} -\alpha'' f_{bc} + \beta'' H_{1b} + \gamma'' G_c = \alpha G' + \alpha' F_1' - \alpha'' h' \\ +\alpha'' H_a - \beta'' g_{ac} + \gamma'' F_{1c} = \beta G' + \beta' F_1' - \beta'' h' \\ +\alpha'' G_{1a} + \beta'' F_b + \gamma'' h_{ab} = \gamma G' + \gamma' F_1' - \gamma'' h', \end{cases}$$

$$(9.)\quad \begin{cases} -\alpha' f_{bc} + \beta' H_a + \gamma' G_{1a} = \alpha H' - \alpha' g' + \alpha'' F_1' \\ +\alpha' H_{1b} - \beta' g_{ac} + \gamma' F_b = \beta H' - \beta' g' + \beta'' F_1' \\ +\alpha' G_c + \beta' F_{1c} - \gamma' h_{ab} = \gamma H' - \gamma' g' + \gamma'' F_1', \end{cases}$$

$$(10.)\quad \begin{cases} -\alpha' f_{bc} + \beta' H_{1b} + \gamma' G_c = \alpha H_1' - \alpha' g' + \alpha'' F'' \\ +\alpha' H_a - \beta' g_{ac} + \gamma' F_{1c} = \beta H_1' - \beta g' + \beta'' F'' \\ +\alpha' G_{1a} + \beta' F_b - \gamma' h_{ab} = \gamma H_1' - \gamma' g' + \gamma'' F', \end{cases}$$

$$(11.)\quad \begin{cases} -\alpha f_{bc} + \beta H_a + \gamma G_{1a} = -\alpha f' + \alpha' H_1' + \alpha'' G' \\ +\alpha H_{1b} - \beta g_{ac} + \gamma F_b = -\beta f' + \beta' H_1' + \beta'' G' \\ +\alpha G_c + \beta F_{1c} - \gamma h_{ab} = -\gamma f' + \gamma' H_1' + \gamma'' G', \end{cases}$$

$$(12.)\quad \begin{cases} -\alpha f_{bc} + \beta H_{1b} + \gamma G_c = -\alpha f' + \alpha' H' + \alpha'' G_1' \\ +\alpha H_a - \beta g_{ac} + \gamma F_{1c} = -\beta f' + \beta' H' + \beta'' G_1' \\ +\alpha G_{1a} + \beta F_b - \gamma h_{ab} = -\gamma f' + \gamma' H' + \gamma'' G_1'. \end{cases}$$

§. 4.

Die Gleichungen, wodurch die Summen der Producte

$$x'X',\ y'Y',\ z'Z',\ x'Y',\ x'Z',\ y'X',\ y'Z',\ z'X',\ z'Y'$$

in einem Coordinatensysteme durch die Summen im anderen Coordinatensysteme dargestellt werden, sind

$$(13.)\ \Sigma x'X' = l' = \alpha^2 l_a + \beta^2 m_b + \gamma^2 n_c + \alpha\beta(H_a + H_{1b}) + \alpha\gamma(G_{1a} + G_c) + \beta\gamma(F_b + F_{1c})$$
$$= \alpha^2 l + \beta^2 m + \gamma^2 n + \alpha\beta(H + H_1) + \alpha\gamma(G_1 + G) + \beta\gamma(F + F_1)$$
$$- (\alpha A + \beta B + \gamma C)(\alpha a + \beta b + \gamma c),$$

$$(14.)\ \Sigma y'Y' = m' = \alpha'^2 l_a + \beta'^2 m_b + \gamma'^2 n_c + \alpha'\beta'(H_a + H_{1b}) + \alpha'\gamma'(G_{1a} + G_c) + \beta'\gamma'(F_b + F_{1c})$$
$$= \alpha'^2 l + \beta'^2 m + \gamma'^2 n + \alpha'\beta'(H + H_1) + \alpha'\gamma'(G_1 + G) + \beta'\gamma'(F + F_1)$$
$$- (\alpha' A + \beta' B + \gamma' C)(\alpha' a + \beta' b + \gamma' c),$$

$$(15.)\ \Sigma x'Y' = H' = \alpha\alpha' l_a + \beta\beta' m_b + \gamma\gamma' n_c$$
$$+ \alpha\beta' H_a + \alpha'\beta H_{1b} + \alpha\gamma' G_{1a} + \alpha'\gamma G_c + \beta\gamma' F_b + \beta'\gamma F_{1c}$$
$$= \alpha\alpha' l + \beta\beta' m + \gamma\gamma' n$$
$$+ \alpha\beta' H + \alpha'\beta H_1 + \alpha\gamma' G_1 + \alpha'\gamma G + \beta\gamma' F + \beta'\gamma F_1$$
$$- (\alpha' A + \beta' B + \gamma' C)(\alpha a + \beta b + \gamma c),$$

$$(16.)\ \Sigma y'X' = H_1' = \alpha\alpha' l_a + \beta\beta' m_b + \gamma\gamma' n_c$$
$$+ \alpha\beta' H_{1b} + \alpha'\beta H_a + \alpha\gamma' G_c + \alpha'\gamma G_{1a} + \beta\gamma' F_{1c} + \beta'\gamma F_b$$
$$= \alpha\alpha' l + \beta\beta' m + \gamma\gamma' n$$
$$+ \alpha\beta' H_1 + \alpha'\beta H + \alpha\gamma' G + \alpha'\gamma G_1 + \beta\gamma' F_1 + \beta'\gamma F$$
$$- (\alpha A + \beta B + \gamma C)(\alpha' a + \beta' b + \gamma' c),$$

u. s. w.

§. 5.

Verbindungen dieser Gleichungen zwischen den Momenten der parallelen Seitenkräfte erzeugen wieder neue Gleichungen zwischen den Momenten der nicht zerlegten Kräfte um die Coordinatenaxen zweier Coordinatensysteme; so entstehen durch Abzählen der Gleichungen 1, 2 oder 7, 8, der Gleichungen 3, 4 oder 9, 10 und der Gleichungen 5, 6 oder 11, 12 folgende:

$$(17.)\quad \begin{cases} \beta'' N_{ab} - \gamma'' M_{ac} = -\alpha M' + \alpha' L' \\ \gamma'' L_{bc} - \alpha'' N_{ab} = -\beta M' + \beta' L' \\ \alpha'' M_{ac} - \beta'' L_{bc} = -\gamma M' + \gamma' L', \end{cases}$$

$$(18.)\quad \begin{cases} \beta' N_{ab} - \gamma' M_{ac} = +\alpha N' - \alpha'' L' \\ \gamma' L_{bc} - \alpha' N_{ab} = +\beta N' - \beta'' L' \\ \alpha' M_{ac} - \beta' L_{bc} = +\gamma N' - \gamma'' L', \end{cases}$$

$$(19.)\quad \begin{cases} \beta N_{ab} - \gamma M_{ac} = -\alpha' N' + \alpha'' M' \\ \gamma L_{bc} - \alpha N_{ab} = -\beta' N' + \beta'' M' \\ \alpha M_{ac} - \beta L_{bc} = -\gamma' N' + \gamma'' M'. \end{cases}$$

§. 6.

Die Gleichungen für Kräfte in einer Ebene ergeben sich aus den obigen, wenn in ihnen gesetzt wird

$$F = F_1 = G = G_1 = n = 0 \quad \text{und} \quad \alpha'' = \beta'' = \gamma = \gamma' = 0$$

und auch

$$F' = F_1' = G' = G_1' = n' = 0,$$

nämlich

$$(20.)\quad \begin{cases} \alpha' l_a + \beta' H_a = \alpha H' + \alpha' m' \\ \alpha' H_{1b} + \beta' m_b = \beta H' + \beta' m' \end{cases}$$

$$(21.)\quad \begin{cases} \alpha' l_a + \beta' H_{1b} = \alpha H_1' + \alpha' m' \\ \alpha' H_a + \beta' m_b = \beta H_1' + \beta' m' \end{cases}$$

$$(22.)\quad \begin{cases} \alpha l_a + \beta H_a = \alpha l' + \alpha' H_1' \\ \alpha H_{1b} + \beta m_b = \beta l' + \beta' H_1' \end{cases}$$

$$(23.)\quad \begin{cases} \alpha l_a + \beta H_{1b} = \alpha l' + \alpha' H' \\ \alpha H_a + \beta m_b = \beta l' + \beta' H' \end{cases}$$

und

$$(24.)\quad \begin{cases} \Sigma x' X' = l' = \alpha^2 l_a + \beta^2 m_b + \alpha\beta (H_a + H_{1b}) \\ \Sigma y' Y' = m' = \alpha'^2 l_a + \beta'^2 m_b + \alpha'\beta' (H_a + H_{1b}) \\ \Sigma x' Y' = H' = \alpha\alpha' l_a + \beta\beta' m_b + \alpha\beta' H_a + \alpha'\beta H_{1b} \\ \Sigma y' X' = H_1' = \alpha\alpha' l_a + \beta\beta' m_b + \alpha\beta' H_{1b} + \alpha'\beta H_a. \end{cases}$$

§. 7.

Die Gleichungen, welche ich im Obigen mitgetheilt habe, finden mannigfaltige Anwendung, besonders bei der Theorie der Mittelpunkte der parallelen Seitenkräfte, die hierauf folgen, und die ganz auf diese Gleichungen sich gründen wird. Aufserdem gibt es Aufgaben, die durch sie nur ihre Lösung erhalten können. Als Beleg hiezu nur folgende drei Fälle:

Die Kräfte eines Kräftensystems nach dreien zu einander senkrechten Richtungen zerlegen, so dafs eine von den dreien Gruppen paralleler Seitenkräfte keinen Einflufs auf das Drehmoment des Kräftensystems hat.

Soll die Gruppe Z' keinen Einflufs auf das Drehmoment haben, so fällt diese Aufgabe mit folgender zusammen: Das Coordinatensystem so

umzuändern, dafs

$$\Sigma x'Z' = \Sigma y'Z' = 0 \quad \text{oder} \quad G_1' = F'' = 0.$$

Die Gleichungen N. 1 lösen diese Aufgabe, sie sind in diesem Falle

$$\begin{aligned} \alpha'' l + \beta'' H_a + \gamma'' G_{1a} &= \alpha'' n' \\ \alpha'' H_{1b} + \beta'' m_b + \gamma'' F_b &= \beta'' n' \\ \alpha'' G_c + \beta'' F_{1c} + \gamma'' n_c &= \gamma'' n'. \end{aligned}$$

Zu diesen kommt noch die Gleichung

$$1 = \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2.$$

Die Verbindung dieser vier Gleichungen führt zu den Werthen von α'', β'' γ'', welche die Coordinaten a, b, c des Anfangspunktes des zweiten Coordinatensystems unbestimmt lassen.

§. 8.

Sollen die Kräfte eines Kräftensystems in drei Gruppen paralleler Seitenkräfte zerlegt werden, so dafs das Drehmoment der Gruppe X' um die Axe y' und das Drehmoment der Gruppe Y' um die Axe x' keinen Einflufs auf das Drehmoment des ganzen Kräftensystems hat, so hat man in N. 2

$$\Sigma z'X' = \Sigma z'Y' = 0 \quad \text{oder} \quad G' = F_1'' = 0$$

zu setzen. Da wenigere Gleichungen als zu bestimmende Gröfsen α'', β'', γ'', a, b, c vorhanden, so können mit den gestellten Bedingungen noch andere verbunden werden.

§. 9.

Können die Kräfte eines Kräftensystems in drei Gruppen paralleler Seitenkräfte zerlegt werden, so dafs das Drehmoment zweier Gruppen X' und Z' um die Axe y' und zwar das Drehmoment einer jeden von ihnen $= 0$ ist?

Nach diesen Bestimmungen soll nicht allein

$$\Sigma(z'X' - x'Z') = 0$$

sondern noch

$$\Sigma z'X' = \Sigma x'Z' = 0 \quad \text{oder} \quad G' = G_1' = 0.$$

Diese Frage wird entschieden durch die Gleichungen 1 und 2, wenn in ihnen die vorstehenden Werthe gesetzt werden. Durch Elimination von F'' und n' erhält man aus ihnen die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha'' l_a + \beta'' H_a + \gamma'' G_{1a})\alpha \\ &+(\alpha'' H_{1b} + \beta'' m_b + \gamma'' F_b)\beta \\ &+(\alpha'' G_c + \beta'' F_{1c} + \gamma'' n_c)\gamma \end{aligned}\right\} = 0, \qquad \left.\begin{aligned} &(\alpha'' l_a + \beta'' H_{1b} + \gamma'' G_c)\alpha \\ &+(\alpha'' H_a + \beta'' m_b + \gamma'' F_{1c})\beta \\ &+(\alpha'' G_{1a} + \beta'' F_b + \gamma'' n_c)\gamma \end{aligned}\right\} = 0,$$

welche in Verbindung mit den Gleichungen

$$1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad 1 = \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2$$

vielen Spielraum für die zu bestimmenden Gröfsen lassen.

Durch Abzählen der beiden ersten Gleichungen entsteht die Gleichung

$$\alpha' \boldsymbol{L}_{bc} + \beta' \boldsymbol{M}_{ac} + \gamma' \boldsymbol{N}_{ab} = 0,$$

welche angiebt, dafs die Coordinatenaxe y' in der Momentenebene des Drehpunkts (abc) liegt, und durch diesen Punkt geht.

Zu demselben Schlusse würde man gekommen sein, wenn man von den Gleichungen §. 5 Anwendung gemacht hätte.

Heidelberg, im December 1852.

15.

Theorie der Mittelpunkte der parallelen Seitenkräfte.

(Vom Herrn geh. Rathe und Professor Dr. *Schweins* in Heidelberg.)

---

§. 1.

Die vorzüglichste Anwendung der Gleichungen, welche den Zusammenhang der Dreh- und Flieh-momente der parallelen Seitenkräfte in zweien Coordinaten-systemen darstellen, findet statt bei der Mittelpunkts-linie und Mittelpunkts-ebene dieser Kräfte, bei einem Gegenstande, welcher aufser der Begründung, die ihm schon Herr Prof. ***Minding*** im 14. Bande dieses Journals und Herr Prof. ***Möbius*** in seiner Statik gegeben haben, von Neuem bearbeitet, und weiter geführt zu werden verdient. Was aber mich besonders zu dieser Untersuchung veranlafst hat, sind nicht allein die eben genannten Gleichungen, durch deren Anwendung das Verändern der Richtung der Kräfte beseitiget werden kann, welches Verändern bei den genannten Gelehrten die Hauptsache, aber den Ergebnissen. in Bezug auf die Mittelpuncte ganz fremd ist, sondern auch weil ich fand, dafs die Hauptflieh-linie und Hauptflieh-ebene bei Kräften in der Ebene und im Raume, deren Theorie ich im 38. Bande dieser Zeitschrift gegeben habe. eben die Elemente sind, durch welche die Zentrallinie und der Zentralpunkt bestimmt werden. Übrigens hat der neue Weg nicht allein zu dem Bekannten, sondern auch zu mehrerem bis jetzt Unbekannten geführt, wozu besonders das reciproke Punkten- und Liniensystem der Mittelpuncte der parallelen Seitenkräfte gerechnet werden kann.

Die Bezeichnung in der vorhergehenden ***Theorie der Momente der parallelen Seitenkräfte*** in §. 1 wird auch hier unverändert beibehalten.

I. Mittelpunktslinie der Kräfte in der Ebene.

§. 2.

1) ***Wenn die Kräfte in einer Ebene nach parallelen Richtungen zerlegt werden, so liegen die Mittelpunkte der parallelen Seitenkräfte in einer geraden Linie.***

Der Beweis, den ich hier gebe, besteht darin, dafs ich den Ort dieser Mittelpunkte aufsuche. Zu diesem Zwecke benutze ich die Gleichungen in der vorhergehenden ***Theorie,*** in welcher die Momente in zweien Coordinaten-

systemen gegeneinander übergestellt sind. Die Momente in dem einen Coordinatensysteme l, m, H, H_1 werden als gegebene Grundlagen der Rechnung angenommen, und nach Erfordernifs der Aufgabe werden den Momenten l', m', H', H_1' im anderen Coordinatensysteme die nöthigen Eigenschaften beigelegt. Diese sind für den Mittelpunkt der Gruppe X_1', X_2', ...

$$\Sigma x' X' = \Sigma y' X' = 0 \quad \text{oder} \quad l' = H_1' = 0$$

und für den Mittelpunkt der Gruppe Y_1', Y_2', ...

$$\Sigma y' Y' = \Sigma x' Y' = 0 \quad \text{oder} \quad m' = H' = 0.$$

Die Gleichungen 22 und 20 in §. 6 gehen hierdurch in folgende über:

$$\alpha l_a + \beta H_a = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha \Sigma(x-a) X + \beta \Sigma(x-a) Y = 0$$
$$\alpha H_{1b} + \beta m_b = 0 \quad - \quad \alpha \Sigma(y-b) X + \Sigma(y-b) Y = 0$$

und

$$\alpha' l_a + \beta' H_a = 0 \quad - \quad \alpha' \Sigma(x-a) X + \beta' \Sigma(x-a) Y = 0$$
$$\alpha' H_{1b} + \beta' m_b = 0 \quad - \quad \alpha' \Sigma(y-b) X + \beta' \Sigma(y-b) Y = 0,$$

aus welcher, wenn a_1, b_1 die Coordinaten des Mittelpunkts der Gruppe X_1', X_2', ... und a_{11}, b_{11} jene der Gruppe Y_1', Y_2', ... sind, sich ergiebt, dafs

$$2) \quad a_1 = \frac{\alpha l + \beta H}{\alpha A + \beta B}, \qquad b_1 = \frac{\alpha H_1 + \beta m}{\alpha A + \beta B}$$
$$a_{11} = \frac{\alpha' l + \beta' H}{\alpha' A + \beta' B}, \qquad b_{11} = \frac{\alpha' H_1 + \beta' m}{\alpha' A + \beta' B}.$$

Die Linie, welche durch die beiden Punkte $(a_1 b_1)$, $(a_{11} b_{11})$ geht, hat zur Gleichung

$$(a_1 - a_{11}) y + (b_{11}' - b_1) x + a_{11} b_1 - a_1 b_{11} = 0$$

welche, wenn die eben gefundenen Werthe eingeführt werden, in folgende übergeht:

$$3) \quad (Bl - AH) y + (Am - BH_1) x + HH_1 - lm = 0.$$

Diese Gleichung, welche, so wie alle folgenden in dieser Abhandlung, hier zuerst erscheint, ist von den Winkelfunctionen, also von der Richtung, nach welcher die Kräfte zerlegt werden, unabhängig, und gibt an, dafs der Ort aller Mittelpunkte der parallelen Seitenkräfte eine gerade Linie ist.

§. 3.

Die Gleichung der Hauptlinie der Drehmomente ist

$$Ay - Bx + H - H_1 = 0$$

und jene der Fliehmomente ist

$$By + Ax - l - m = 0.$$

Verbindet man diese Gleichungen mit der Gleichung 3, so erhält man

4) *für den Durchschnitt der Mittelpunktslinie mit der Hauptlinie der Drehmomente die Coordinaten*

$$u' = \frac{Am(-H+H_1)+B(lm-H_1^2)}{A^2m-AB(H+H_1)+B^2l}, \qquad v' = \frac{A(lm-H^2)+Bl(H-H_1)}{A^2m-AB(H+H_1)+B^2l}$$

und

5) *für den Durchschnitt der Mittelpunktslinie mit der Hauptlinie der Fliehmomente die Coordinaten*

$$u'' = \frac{A(m^2+HH_1)-B(l+m)H_1}{A^2H-AB(l-m)-B^2H_1}, \qquad v'' = \frac{A(l+m)H-B(l^2+HH_1)}{A^2H-AB(l-m)-B^2H_1}.$$

§. 4.

Die Coordinaten des Mittelpunkts des ganzen Kräftensystems, welcher der Durchschnitt der beiden Hauptlinien der Dreh- und der Fliehmomente ist, sind

$$y = u''' = \frac{A(-H+H_1)+B(l+m)}{A^2+B^2}, \qquad x = v''' = \frac{A(l+m)+B(H-H_1)}{A^2+B^2}.$$

Werden diese in die Mittelpunktsgleichung 3 eingeführt, so entsteht die Gleichung

$$(AH-Bl)^2+(Am-BH_1)^2 = 0$$

welche nur dann möglich ist, wenn

$$\frac{A}{B} = \frac{l}{H} = \frac{H_1}{m}.$$

Wenn aber diese Gleichung statt findet, so ist zugleich

$$a_{,} = a_{,,} \quad \text{und} \quad b_{,} = b_{,,}$$

und die Gleichung 3 giebt in diesem Falle nicht eine Linie sondern nur einen Punkt an. Daher

6) *In jedem Kräftensysteme in einer Ebene, welches eine Mittelkraft hat, giebt es aufser den beiden Hauptlinien der Dreh- und der Fliehmomente noch eine dritte feste Linie, nämlich die Mittelpunktslinie der parallelen Seitenkräfte, welche nie durch den Durchschnitt jener beiden Hauptlinien oder durch den Mittelpunkt des ganzen Kräftensystems geht, aufser in dem Falle, wenn alle Mittelpunkte der parallelen Seitenkräfte sich mit dem Mittelpunkte des ganzen Kräftensystems in einem Punkte vereinigen, und welches daran erkannt werden kann, dafs*

$$\frac{A}{B} = \frac{l}{H} = \frac{H_1}{m} \quad \textit{oder} \quad \frac{\Sigma X}{\Sigma Y} = \frac{\Sigma xX}{\Sigma xY} = \frac{\Sigma yX}{\Sigma yY}.$$

Diese drei feste Linien bilden ein rechtwinklichtes Dreieck, die Hypothenuse desselben ist die Mittelpunktslinie der parallelen Seitenkräfte, und die Katheten desselben sind die beiden Hauptlinien der Dreh- und der Fliehmomente.

§. 5.

Man hat die Kräfte nach der Richtung der Mittelpunkts-linie und nach einer Richtung, welche zu dieser senkrecht ist, zerlegt, und den Mittelpunkt der ersteren dadurch ausgezeichnet, dafs man ihn den ***Zentralpunkt*** genannt hat. Mit Hülfe der oben entwickelten Gleichungen ist es leicht, zu beweisen, dafs dieser Zentralpunkt kein anderer ist, als der Durchschnitt der Mittelpunktslinie mit der Hauptlinie der Fliehmomente.

Die Seitenkräfte X_1, X_2, ... bilden in diesem Falle mit x denselben Winkel, welchen die Mittelpunktslinie mit x bildet, also nach N. 3

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{BH_1 - Am}{AH - Bl}, \qquad \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{AH - Bl}{BH_1 - Am}.$$

Werden diese Werthe von $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\alpha'}$ in die Gleichungen N. 2 eingeführt, so entstehen für a_1, b_1 dieselben Werthe, welche in N. 5 für v'', u'' und für $a_{''}$, $b_{''}$ dieselben Werthe, welche in N. 4 für v', u' gefunden wurden. Daher

7) ***Werden die Kräfte nach zweien Richtungen, wovon die eine zu der Mittelpunktslinie parallel und die andere zu derselben senkrecht ist, zerlegt, so fällt der Mittelpunkt der parallelen Seitenkräfte in den Durchschnitt der Mittelpunktslinie mit der Hauptfliehlinie, und der Mittelpunkt der senkrechten Seitenkräfte in den Durchschnitt der Mittelpunktslinie mit der Hauptdrehlinie.***

Anmerkung. Wenn die Kräfte nach der Richtung der Mittelkraft und nach einer Richtung, welche zu dieser senkrecht ist, zerlegt werden, so sind die Coordinaten des Mittelpunkts der parallelen Seitenkräfte

$$a_1 = \frac{Al + BH}{A^2 + B^2}, \qquad b_1 = \frac{AH_1 + Bm}{A^2 + B^2},$$

und der senkrechten Seitenkräfte

$$a_{''} = b_{''} = \tfrac{1}{0},$$

oder der Mittelpunkt der letzteren liegt im Unendlichen.

Nur dann, wenn $\frac{A}{B} = \frac{l}{H} = \frac{H_1}{m}$, fällt der Mittelpunkt des ganzen Kräftensystems mit dem Mittelpunkte, dessen Coordinaten a_1, b_1 so eben angegeben sind, zusammen.

II. Mittelpunktsebene der Kräfte im Raume.

§. 6.

Aufser der früheren Bezeichnung wird hier noch ferner angenommen, dafs

$a_{,}, b_{,}, c_{,}$ die Coordinaten des Mittelpunkts von $X'_1, X'_2, \ldots$
$a_{,,}, b_{,,}, c_{,,}$ – – – – – – – $Y'_1, Y'_2, \ldots$
$a_{,,,}, b_{,,,}, c_{,,,}$ – – – – – – – $Z'_1, Z'_2, \ldots$

seien.

Bei der Bestimmung des Mittelpunkts der Kräfte $X'_1, X'_2, \ldots$ mufs gesetzt werden

$$G' = \Sigma z' X' = 0, \quad H'_1 = \Sigma y' X' = 0, \quad l' = \Sigma x' X' = 0,$$

bei den Seitenkräften $Y'_1, Y'_2, \ldots$ ist zu gleichem Zwecke zu setzen

$$H' = \Sigma x' Y' = 0, \quad F'_1 = \Sigma z' Y' = 0, \quad m' = \Sigma y' Y' = 0$$

und bei den Seitenkräften $Z'_1, Z'_2, \ldots$

$$G'_1 = \Sigma x' Z' = 0, \quad F'' = \Sigma y' Z' = 0, \quad n' = \Sigma z' Z' = 0.$$

Die Gleichungen 5, 3, 1 in der ***Theorie der Momente der parallelen Seitenkräfte*** gehen hierdurch in folgende über:

$$8)\quad \begin{array}{lll} \alpha l_a + \beta H_a + \gamma G_{1a} = 0, & \alpha' l_a + \beta' H_a + \gamma' G_{1a} = 0, & \alpha'' l_a + \beta'' H_a + \gamma'' G_{1a} = 0 \\ \alpha H_{1b} + \beta m_b + \gamma F_b = 0, & \alpha' H_{1b} + \beta' m_b + \gamma' F_b = 0, & \alpha'' H_{1b} + \beta'' m_b + \gamma'' F_b = 0 \\ \alpha G_c + \beta F_{1c} + \gamma n_c = 0, & \alpha' G_c + \beta' F_{1c} + \gamma' n_c = 0, & \alpha'' G_c + \beta'' F_{1c} + \gamma'' n_c = 0. \end{array}$$

Man hat in diesen Gleichungen a, b, c von den übrigen Gröfsen zu trennen, aber auch zu berücksichtigen, dafs

α, β, γ zu $a_{,}, b_{,}, c_{,}$
α', β', γ' – $a_{,,}, b_{,,}, c_{,,}$
$\alpha'', \beta'', \gamma''$ – $a_{,,,}, b_{,,,}, c_{,,,}$

gehören; man erhält für die drei Mittelpunkte folgende Coordinaten:

$$9)\quad \begin{array}{lll} a_{,} = \dfrac{\alpha l + \beta H + \gamma G_1}{\alpha A + \beta B + \gamma C}, & b_{,} = \dfrac{\alpha H_1 + \beta m + \gamma F}{\alpha A + \beta B + \gamma C}, & c_{,} = \dfrac{\alpha G + \beta F_1 + \gamma n}{\alpha A + \beta B + \gamma C} \\ a_{,,} = \dfrac{\alpha' l + \beta' H + \gamma' G_1}{\alpha' A + \beta' B + \gamma' C}, & b_{,,} = \dfrac{\alpha' H_1 + \beta' m + \gamma' F}{\alpha' A + \beta' B + \gamma' C}, & c_{,,} = \dfrac{\alpha' G + \beta' F_1 + \gamma' n}{\alpha' A + \beta' B + \gamma' C} \\ a_{,,,} = \dfrac{\alpha'' l + \beta'' H + \gamma'' G_1}{\alpha'' A + \beta'' B + \gamma'' C}, & b_{,,,} = \dfrac{\alpha'' H_1 + \beta'' m + \gamma'' F}{\alpha'' A + \beta'' B + \gamma'' C}, & c_{,,,} = \dfrac{\alpha'' G + \beta'' F_1 + \gamma'' n}{\alpha'' A + \beta'' B + \gamma'' C}. \end{array}$$

§. 7.

Wenn α, β, γ oder α', β', γ' oder α'', β'', γ'' eliminirt werden, so entstehen aus 8. die Gleichungen

$$10)\quad \frac{l_a F_{1c} - G_c H_a}{n_c H_a - F_{1c} G_{1a}} = \frac{m_b G_c - F_{1c} H_{1b}}{F_b F_{1c} - m_b n_c} = \frac{H_a H_{1b} - l_a m_b}{m_b G_{1a} - F_b H_a},$$

wovon jede zu der Gleichung

$$11)\quad F_b G_c H_a + F_{1c} G_{1a} H_{1b} + l_a m_b n_c - l_a F_b F_{1c} - m_b G_{1a} G_c - n_c H_a H_{1b} = 0$$

führt, die alle Mittelpunkte der parallelen Seitenkräfte, in welche das Kräftensystem zerlegt werden kann, angiebt.

Die Summe der vorstehenden Producte will ich durch

$$\varphi_{abc}$$

vorstellen. Wenn die Producte entwickelt werden, so fallen alle Verbindungen *ab, ac, bc, abc* aus der Rechnung, und es entsteht eine Gleichung vom ersten Grade, nämlich die Mittelpunktsgleichung

$$12)\quad \varphi_{abc} = 0 = \varphi_0 + a.\varphi_1 + b.\varphi_2 + c.\varphi_3,$$

wo

$$\begin{aligned}
13)\quad \varphi_0 &= FGH + F_1G_1H_1 + lmn - lFF_1 - mGG_1 - nHH_1\\
\varphi_1 &= A(FF_1 - mn) + B(nH_1 - FG) + C(mG - F_1H_1)\\
\varphi_2 &= A(nH - F_1G_1) + B(GG_1 - ln) + C(lF_1 - GH)\\
\varphi_3 &= A(mG_1 - FH) + B(lF - G_1H_1) + C(HH_1 - lm).
\end{aligned}$$

Da die so eben entwickelte Gleichung 12 von α, β, γ, ... γ'' also von der Richtung der Seitenkräfte unabhängig ist, so ist durch sie zugleich die schon bekannte und auf anderen Wegen von Herr Prof. *Minding* gefundene Wahrheit hier bewiesen, nämlich:

14) ***Die Mittelpunkte der parallelen Seitenkräfte, in welche die Kräfte eines Systems zerlegt werden können, liegen in einer festen Ebene, welche von der Richtung der Seitenkräfte unabhängig ist.***

§. 8.

In den Vorzahlen φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 der Hauptgleichung 12, 13 kommen die Unterschiede je zweier Producte aus l, m, n, F, G, H, . . . vor. Zur Abkürzung der Rechnungen sollen für sie folgende Zeichen festgestellt werden:

$$\begin{aligned}
15)\quad & HH_1 - lm = Q, \quad nH - F_1G_1 = Q_1, \quad nH_1 - FG = Q_2,\\
& GG_1 - ln = U, \quad mG - F_1H_1 = U_1, \quad mG_1 - FH = U_2,\\
& FF_1 - mn = V, \quad lF - G_1H_1 = V_1, \quad lF_1 - GH = V_2.
\end{aligned}$$

Die Natur von φ_0 erkennt man leicht aus folgenden Gruppirungen vorstehender Elemente:

16) $$\begin{aligned} &QU - V_1V_2 = l.\varphi_0, \quad QV - U_1U_2 = m.\varphi_0, \quad UV - Q_1Q_2 = n.\varphi_0 \\ &Q_1U_1 - VV_2 = F_1.\varphi_0, \quad Q_1V_1 - UU_2 = G_1.\varphi_0, \quad U_1V_1 - QQ_2 = H_1.\varphi_0 \\ &Q_2U_2 - VV_1 = F.\varphi_0, \quad Q_2V_2 - UU_1 = G.\varphi_0, \quad U_2V_2 - QQ_1 = H.\varphi_0. \end{aligned}$$

Aus diesen geht hervor, dafs $\varphi_0 = 0$ ist, wenn entweder Q_p, U_q oder Q_p, V_s oder U_q, V_s zugleich $= 0$, und die angehängten Zahlen ungleich sind.

§. 9.

Um den Zusammenhang der Vorzahlen $\varphi_0, \ldots, \varphi_3$ unter sich darstellen zu können, müssen zuvor folgende Gruppen der Elemente l, m, n, F, G, H mit den Elementen Q, U, V gebildet werden:

17) $$\begin{aligned} nQ + G_1U_1 + FV_2 &= -\varphi_0 \\ F_1Q + HU_1 + mV_2 &= 0 \\ GQ + lU_1 + H_1V_2 &= 0 \\ FQ_1 + nU_2 + G_1V &= 0 \\ mQ_1 + F_1U_2 + HV &= 0 \\ H_1Q_1 + GU_2 + lV &= -\varphi_0 \\ G_1Q_2 + FU + nV_1 &= 0 \\ HQ_2 + mU + F_1V_1 &= -\varphi_0 \\ lQ_2 + H_1U + GV_1 &= 0. \end{aligned}$$

Da nun

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= AV + BQ_2 + CU_1 \\ \varphi_2 &= AQ_1 + BU + CV_2 \\ \varphi_3 &= AU_2 + BV_1 + CQ, \end{aligned}$$

so ergiebt sich vermittelst Elimination der Zusammenhang der Vorzahlen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, nämlich

18) $$\begin{aligned} A.\varphi_0 + l.\varphi_1 + H_1.\varphi_2 + G.\varphi_3 &= 0 \\ B.\varphi_0 + H.\varphi_1 + m.\varphi_2 + F_1.\varphi_3 &= 0 \\ C.\varphi_0 + G_1.\varphi_1 + F.\varphi_2 + n.\varphi_3 &= 0, \end{aligned}$$

welcher folgende für die Untersuchung einflufsreiche Wahrheit begründet:

19) *Wenn drei der Gröfsen* $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *verschwinden, so verschwindet auch die vierte, jedoch nur, wann nicht zugleich*

$$\begin{aligned} l = H = G_1 &= 0 \quad \textit{oder} \\ H_1 = m = F &= 0 \quad \textit{oder} \\ G = F_1 = n &= 0. \end{aligned}$$

§. 10.

Diese Erörterungen mufsten vorhergehen, bevor die Frage gestellt werden kann: wann findet eine Mittelpunktsebene und wann keine statt? Letzteres offenbar nicht, wenn die Vorzahlen der Gleichung 12 verschwinden, und hiezu ist es schon hinreichend, wenn nur drei von ihnen $= 0$ sind. Von den Ausnahmsfällen, welche die gefundene Wahrheit 19 angiebt, soll später das Nöthige beigebracht werden.

Wenn keine Ebene, so kann doch eine Linie möglich seien, in welcher alle Mittelpunkte der parallelen Seitenkräfte liegen. Diese Voraussetzung wird sich bewähren, wenn die Gleichungen einer solchen Linie

$$pa+qb=1, \quad p_{,}a+q_{,}c=1, \quad p_{,,}b+q_{,,}c=1$$

von $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, von $a_{,,}$, $b_{,,}$, $c_{,,}$ und von $a_{,,,}$, $b_{,,,}$, $c_{,,,}$, deren Werthe in N. 9 angegeben sind, befriedigt werden. Es mufs also seien

$$\begin{array}{llllllllll}
p(\alpha l+\beta H+\gamma G_{1})+q(\alpha H_{1}+\beta m+\gamma F) = \alpha A+\beta B+\gamma C \\
\quad \alpha' \quad \beta' \quad \gamma' \qquad \alpha' \quad \beta' \quad \gamma' \qquad \alpha' \quad \beta' \quad \gamma' \\
\quad \alpha'' \quad \beta'' \quad \gamma'' \qquad \alpha'' \quad \beta'' \quad \gamma'' \qquad \alpha'' \quad \beta'' \quad \gamma'' \\
p_{,}(\alpha l+\beta H+\gamma G_{1})+q_{,}(\alpha H_{1}+\beta m+\gamma F) = \alpha A+\beta B+\gamma C \\
\quad \alpha' \quad \beta' \quad \gamma' \qquad \alpha' \quad \beta' \quad \gamma' \qquad \alpha' \quad \beta' \quad \gamma' \\
\quad \alpha'' \quad \beta'' \quad \gamma'' \qquad \alpha'' \quad \beta'' \quad \gamma'' \qquad \alpha'' \quad \beta'' \quad \gamma'' \\
p_{,,}(\ \ldots\ldots\ )+q_{,,}(\ \ldots\ldots\ ) = \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Werden nun diese Gleichungen mit α, α', α'', mit β, β', β'', mit γ, γ', γ'' vervielfacht, so entstehen folgende:

$$\begin{array}{lll}
pl+qH_{,}-A=0, & p_{,}l+q_{,}G-A=0, & p_{,,}H_{,}+q_{,,}G-A=0 \\
pH+qm-B=0, & p_{,}H+q_{,}F_{,}-B=0, & p_{,,}m+q_{,,}F_{,}-B=0 \\
pG_{,}+qF-C=0, & p_{,}G_{,}+q_{,}n-C=0, & p_{,,}F+q_{,,}n-C=0,
\end{array}$$

die durch Elimination zu den Werthen von p, q, $p_{,}$, $q_{,}$, $p_{,,}$, $q_{,,}$ führen. Daher

20) ***Wenn keine Mittelpunktsebene sondern nur eine Mittelpunktslinie statt findet, so können die Vorzahlen von x, y, z, in den Gleichungen dieser Linie***

$$px+qy=1, \quad p_{,}x+q_{,}z=1, \quad p_{,,}y+q_{,,}z=1$$

auf folgende Weise gebildet werden:

$$p=\frac{-Am+BH}{Q}=\frac{-CH_{1}+AF}{V_{1}}=\frac{-BF+Cm}{U_{2}}$$

$$q=\frac{+AH-Bl}{Q}=\frac{+Cl-AG_{1}}{V_{1}}=\frac{+BG_{1}-CH}{U_{2}}$$

$$p_i = \frac{+AF_1 - BG}{V_2} = \frac{+CG - An}{U} = \frac{+Bn - CF_1}{Q_1}$$

$$q_i = \frac{-AH + Bl}{V_2} = \frac{-Cl + AG_1}{U} = \frac{-BG_1 + CH}{Q_1}$$

$$p_{ii} = \frac{-AF_1 + BG}{U_1} = \frac{-CG + An}{Q_2} = \frac{-Bn + CF_1}{V}$$

$$q_{ii} = \frac{+Am - BH_1}{U_1} = \frac{+CH_1 - AF}{Q_2} = \frac{+BF - Cm}{V}$$

Es kann hier noch bemerkt werden, dafs die Gleichungen für die Mittelpunktslinie, die so eben gefunden, auch dadurch entstehen, wenn in den Gleichungen 10, woraus die Gleichung 12 hervorgegangen ist, Zähler und Nenner $= 0$ gesetzt werden. Den Gleichungen für die Mittelpunktslinie kann daher auch folgende Gestalt gegeben werden:

21) $\frac{l_a}{H_a} = \frac{G_c}{F_{1c}} = \frac{H_{1b}}{m_b}$, oder $\frac{l_a}{G_{1a}} = \frac{G_c}{n_c} = \frac{H_{1b}}{F_b}$ oder $\frac{H_a}{G_{1a}} = \frac{F_{1c}}{n_c} = \frac{m_b}{F_b}$.

Die Bedingungsgleichungen, wenn eine Mittelpunktslinie und keine Mittelpunktsebene statt findet, erhält man aus den verschiedenen Ausdrücken für $p, q, \ldots q_{ii}$. Es ist nämlich

$$pQ + Am - BH_1 = 0, \quad pV_1 + CH_1 - AF = 0, \quad pU_2 + BF - Cm = 0.$$

Werden nun diese drei Gleichungen nach ihrer Folge mit C, B, A vervielfacht und zusammengezählt, so entsteht

$$AU + BV_1 + CQ = 0 = \varphi_3.$$

Ebenso sind die übrigen Gleichungen für $p_1, q_1, \ldots$ zu behandeln. Das Ergebnifs der Rechnung ist

22) *Wenn* $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$ *also auch* $\varphi_0 = 0$, *so findet keine Mittelpunktsebene sondern nur eine Mittelpunktslinie statt.*

§. 11.

Hierher gehört der untergeordnete Fall, wenn sämmtliche Kräfte des Systems zu einer Ebene parallel sind. Denn bei dieser Annahme kann die gedachte Ebene zu einer der Coordinatenebene, z. B. (xy), angenommen werden, wo also $Z_1 = Z_2 = \cdots = 0$ mithin

$$C = F = G_1 = n = 0,$$

woraus folgt, dafs

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0.$$

Von den dreien Ausdrücken, welche für jede der Gröfsen $p, q, p_1, q_1, p_{11}, q_{11}$, gefunden sind, bleibt hier nur noch eine, nämlich

$$p = \frac{-Am+BH_1}{Q}, \quad p_1 = \frac{+AF_1-BG}{V_2}, \quad p_{11} = \frac{-AF_1+BG}{U_1}$$

$$q = \frac{+AH-Bl}{Q}, \quad q_1 = \frac{-AH+Bl}{V_2}, \quad q_{11} = \frac{+Am-BH_1}{U_1}.$$

Daher

23) *Wenn alle Kräfte zu der Ebene* (xy) *parallel sind, so liegen alle Mittelpunkte der parallelen Seitenkräfte, in welche die Kräfte zerlegt werden können, in einer festen Linie, welche durch folgende Gleichungen angegeben wird:*

$$\begin{aligned}(Am-BH_1)x+(Bl-AH)y-lm+HH_1 &= 0\\ (AF_1-BG)x+(Bl-AH)z-lF_1+GH &= 0\\ -(AF_1-BG)y+(Am-BH_1)z-mG+F_1H_1 &= 0,\end{aligned}$$

oder durch

$$\frac{l_a}{H_a} = \frac{G_c}{F_{1c}} = \frac{H_{1b}}{m_b}.$$

Diese Gleichungen entstehen, wenn in N. 10 nur die Zähler $= 0$ gesetzt werden.

§. 12.

Vorstehender Bemerkung liegt die Frage sehr nahe: Welchen Einflufs hat das Verschwinden der Zähler und Nenner der vorhergehenden Brüche? Ich nehme zuerst in N. 20 die Nenner $= 0$ an, und setze

$$Q = Q_1 = Q_2 = U = U_1 = U_2 = V = V_1 = V_2 = 0$$

oder

$$\frac{l}{H} = \frac{H_1}{m} = \frac{G}{F_1} \text{ und } \frac{l}{G_1} = \frac{H_1}{F} = \frac{G}{n} \text{ also auch } \frac{H}{G_1} = \frac{m}{F} = \frac{F_1}{n}.$$

In diesem Falle kann von den Gleichungen 12, 13 kein Gebrauch gemacht werden; man mufs zu den ursprünglichen Gleichungen N. 9 zurückkehren. Aus diesen folgt bei vorstehender Annahme, dafs

$$b_1 = a_1 \cdot \frac{m}{H}, \quad b_2 = a_2 \cdot \frac{m}{H}, \quad b_3 = a_3 \cdot \frac{m}{H}$$

$$c_1 = a_1 \cdot \frac{F_1}{H}, \quad c_2 = a_2 \cdot \frac{F_1}{H}, \quad c_3 = a_3 \cdot \frac{F_1}{H},$$

dafs also

$$\frac{a_1}{H} = \frac{b_1}{m} = \frac{c_1}{F_1}, \quad \frac{a_2}{H} = \frac{b_2}{m} = \frac{c_2}{F_1}, \quad \frac{a_3}{H} = \frac{b_3}{m} = \frac{c_3}{F_1}.$$

Daher

24) *Wenn* $\frac{l}{H}=\frac{H_1}{m}=\frac{G}{F}$ *und* $\frac{l}{G_1}=\frac{H_1}{F}=\frac{G}{n}$, *so liegen die Mittelpunkte der parallelen Seitenkräfte in einer festen Linie, welche durch den Anfangspunkt der Coordinatenaxe geht, und welche durch folgende Gleichungen angegeben wird:*

$$\frac{x}{H}=\frac{y}{m}=\frac{z}{F_1} \quad oder \quad \frac{x}{G_1}=\frac{y}{F}=\frac{z}{n} \quad oder \quad \frac{x}{l}=\frac{y}{H_1}=\frac{z}{G}.$$

§. 13.

Zuletzt findet weder eine Ebene noch eine Linie, sondern nur ein einziger Punkt statt, in welchem sich alle Mittelpunkte der parallelen Seitenkräfte vereinigen, wenn die Zähler der Brüche 20 verschwinden. Mit dem Verschwinden der Zähler ist hier auch das Verschwinden der Nenner verbunden, obgleich das Umgekehrte nicht immer statt findet. Diese Annahme bewirkt, dafs nach N. 9

$$a_{,}=a_{,,}=a_{,,,}, \qquad b_{,}=b_{,,}=b_{,,,}, \qquad c_{,}=c_{,,}=c_{,,,}.$$

Daher folgende Wahrheit

25) *Alle Mittelpunkte der parallelen Seitenkräfte, in welche die Kräfte eines Systems zerlegt werden können, fallen in einen einzigen Punkt zusammen, wenn folgende Gleichungen zugleich statt finden:*

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{H}=\frac{C}{G_1}, \qquad \frac{A}{H_1}=\frac{B}{m}=\frac{C}{F}, \qquad \frac{A}{G}=\frac{B}{F_1}=\frac{C}{n}$$

und zwar sind die Coordinaten dieses einzigen Mittelpunktes:

$$a=\frac{l}{A}=\frac{\Sigma xX}{\Sigma X}, \qquad b=\frac{m}{B}=\frac{\Sigma yY}{\Sigma Y}, \qquad c=\frac{n}{C}=\frac{\Sigma zZ}{\Sigma Z}.$$

Diese Werthe leisten der Gleichung für die Hauptfliehebene

$$aA+bB+cC=l+m+n$$

Genüge; daher

26) *Der Ort des einzigen Mittelpuncts der paralleten Seitenkräfte ist die Hauptfliehebene des ganzen Kräftensystems.*

§. 14.

Alle diese Fälle, in welchen keine Mittelpunktsebene sondern nur eine Mittelpunktslinie oder sogar nur ein einziger Mittelpunkt der parallelen Seitenkräfte statt findet, setzen voraus, dafs alle Vorzahlen der Gleichung 12 für die Mittelpunktsebene verschwinden. Hiezu genügt es nach 19, dafs nur drei der

Gröfsen φ_0, φ_1, φ_2, $\varphi_3 = 0$ sind, wobei aber drei Fälle ausgenommen wurden. Ich will jetzt zeigen, wann diese Fälle vorkommen. — Zu diesem Zwecke kehre ich zu den beiden ursprünglichen Coordinatensystemen zurück, und nehme hierbei an, dafs das zweite Coordinatensystem eine solche Stellung zur Mittelpunktsebene hat, dafs eine der Coordinatenaxen $\boldsymbol{Z}'$ zu dieser Ebene senkrecht ist, und die beiden andern Coordinatenaxen x', y' in derselben liegen. Nach dieser Annahme ist

$$\alpha'' = \frac{\varphi_1}{\mathfrak{N}}, \quad \beta'' = \frac{\varphi_2}{\mathfrak{N}}, \quad \gamma'' = \frac{\varphi_3}{\mathfrak{N}}, \quad \text{wo} \quad \mathfrak{N}^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2.$$

Die Gleichungen 2 in der vorangeschickten ***Theorie der Momente der parallelen Seitenkräfte*** gehen hierdurch in folgende über:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{l}_a\,\varphi_1 + \boldsymbol{H}_{1b}\varphi_2 + \boldsymbol{G}_c\,\varphi_3 &= \mathfrak{N}(\alpha\boldsymbol{G}' + \alpha'\boldsymbol{F}_1' + \alpha''\boldsymbol{n}') \\ \boldsymbol{H}_a\,\varphi_1 + \boldsymbol{m}_b\,\varphi_2 + \boldsymbol{F}_{1c}\varphi_3 &= \mathfrak{N}(\beta\boldsymbol{G}' + \beta'\boldsymbol{F}_1' + \beta''\boldsymbol{n}') \\ \boldsymbol{G}_{1a}\varphi_1 + \boldsymbol{F}_b\,\varphi_2 + \boldsymbol{n}_c\,\varphi_3 &= \mathfrak{N}(\gamma\boldsymbol{G}' + \gamma'\boldsymbol{F}_1' + \gamma''\boldsymbol{n}'). \end{aligned}$$

Da nun die Producte zur Linken $= -\boldsymbol{A}\varphi_{abc}$, $= -\boldsymbol{B}\varphi_{abc}$, $= -\boldsymbol{C}\varphi_{abc}$, und da für die Punkte der Mittelpunktsebene $\varphi_{abc} = 0$ ist, so ist für jeden Punkt dieser Ebene

$$\begin{aligned} \alpha\boldsymbol{G}' + \alpha'\boldsymbol{F}_1' + \alpha''\boldsymbol{n}' &= 0 \\ \beta\boldsymbol{G}' + \beta'\boldsymbol{F}_1' + \beta''\boldsymbol{n}' &= 0 \\ \gamma\boldsymbol{G}' + \gamma'\boldsymbol{F}_1' + \gamma''\boldsymbol{n}' &= 0. \end{aligned}$$

Werden nun diese Gleichungen mit α, β, γ, mit α', β', γ' und mit α'', β'', γ'' vervielfacht und jedesmal zusammengezählt, so entstehen die Gleichungen

$$\boldsymbol{G}' = \boldsymbol{F}_1' = \boldsymbol{n}' = 0.$$

Daher folgende Wahrheit:

27) ***Wenn die Kräfte nach dreien zu einander senkrechten Richtnngen, wovon die eine z' senkrecht zur Mittelpunktsebene ist, und die beiden anderen x', y' in der Ebene liegen, zerlegt werden, so ist für jeden Anfangspunkt der Coordinaten in dieser Ebene***

$$\boldsymbol{G}' = \boldsymbol{F}_1' = \boldsymbol{n}' = 0 \quad \textit{oder} \quad \Sigma z'\boldsymbol{X}' = \Sigma z'\boldsymbol{Y}' = \Sigma z'\boldsymbol{Z}' = 0.$$

Wird y' zur Mittelpunktsebene angenommen, so ist

$$\boldsymbol{H}_1' = \boldsymbol{F}'' = \boldsymbol{m}' = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma y'\boldsymbol{X}' = \Sigma y'\boldsymbol{Z}' = \Sigma y'\boldsymbol{Y}' = 0,$$

und ist x' zur Mittelpunktsebene senkrecht, so ist

$$\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{G}_1' = \boldsymbol{l}' = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma x'\boldsymbol{Y}' = \Sigma x'\boldsymbol{Z}' = \Sigma x'\boldsymbol{X}' = 0$$

Wird dieses auf das erste Coordinatensystem angewendet, so geht hieraus Folgendes hervor:

28) ***Verschwinden drei der Gröfsen*** $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ***und ist entweder***

$$G = F_1 = n = 0 \text{ oder}$$
$$H_1 = F = m = 0 \text{ oder}$$
$$H = G_1 = l = 0,$$

so verschwindet die vierte Gröfse nicht, und es ist eine der Coordinatenaxen zur Mittelpunktsebene senkrecht, und die beiden anderen Axen liegen in der Mittelpunktsebene.

§. 15.

In der Mittelpunktsebene ist besonders der Drehpunkt und das vollständige Drehmoment dieser Ebene zu würdigen. Die Coordinaten des Drehpunkts sind nach N. 22, §. 12 der früheren ***Untersuchung der Kräfte im Raume*** im 38. Bande dieser Zeitschrift

$$x_0 = \frac{-A\varphi_0 - M\varphi_0 + N\varphi_2}{A\varphi_1 + B\varphi_2 + C\varphi_3}, \quad y_0 = \frac{-B\varphi_0 - N\varphi_1 + L\varphi_3}{A\varphi_1 + B\varphi_2 + C\varphi_3}, \quad z_0 = \frac{-C\varphi_0 - L\varphi_2 + M\varphi_1}{A\varphi_1 + B\varphi_2 + C\varphi_3}.$$

Die Zähler dieser Brüche können vermittelst der Gleichungen 18 durch andere Gröfsen ersetzt werden, so dafs für die Coordinaten des Drehpunkts der Mittelpunktsebene folgende Ausdrücke gewonnen werden:

29) $$x_0 = \frac{l\varphi_1 + H\varphi_2 + G_1\varphi_3}{A\varphi_1 + B\varphi_2 + C\varphi_3}, \quad y_0 = \frac{H_1\varphi_1 + m\varphi_2 + F\varphi_3}{A\varphi_1 + B\varphi_2 + C\varphi_3}, \quad z_0 = \frac{G\varphi_1 + F_1\varphi_2 + n\varphi_3}{A\varphi_1 + B\varphi_2 + C\varphi_3}.$$

Das Drehmoment der Mittelpunktsebene selbst ist nach N. 23 am angeführten Orte

30) $$R_0 = \frac{(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2)^{\frac{1}{2}}}{A\varphi_1 + B\varphi_2 + C\varphi_3} \cdot (AL + BM + CN).$$

§. 16.

Wird die Mittelpunktsebene selbst zur Coordinatenebene (xy) angenommen, so werden diese Ausdrücke sehr vereinfacht, denn bei dieser Annahme ist nach N. 28

$$F_1 = G = n = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0,$$

ohne dafs $\varphi_3 = 0$ ist, und es werden die Coordinaten des Drehpunkts der Ebene

31) $$x_0 = \frac{G_1}{C} = \frac{\Sigma xZ}{\Sigma Z}, \quad y_0 = \frac{F}{C} = \frac{\Sigma yZ}{\Sigma Z}$$

und das Drehmoment der Ebene ist

32) $$R_0 = \frac{AF - BG_1 + C(H - H_1)}{C}.$$

Die Gleichungen 31 kann man auch aus N. 9 herleiten, wenn man $\alpha'' = \beta'' = \gamma = \gamma' = 0$ und $\gamma'' = 1$, $n = 0$ setzt. Man erhält hiedurch die Coordinaten $a_{III} = x_0$ und $b_{III} = y_0$ für den genannten Drehpunkt. Verfolgt man diesen Weg weiter, und setzt zugleich $\alpha' = \beta' = 0$, so erhält man die Coordinaten der beiden anderen Mittelpunkte der Seitenkräfte, welche zu den beiden Coordinatenaxen x, y parallel sind, nämlich

$$a_I = \frac{l}{A}, \quad b_{II} = \frac{H_1}{A}, \quad a_{II} = \frac{H}{B}, \quad b_{II} = \frac{m}{B}.$$

Die Linie, welche durch diese beiden Mittelpuncte geht, hat zur Gleichung

33) $$(Bl - AH)y + (Am - BH_1)x - lm + HH_1 = 0$$

und in ihr liegen zugleich die Mittelpunkte aller parallelen Seitenkräfte X_1, X_2, ... und Y_1, Y_2, ... welche Richtungen diese in der Ebene auch haben mögen. Ihr ist die Benennung ***Zentrallinie*** beigelegt.

Wird in der Gleichung für die Hauptfliehebene N. 22 in der Untersuchung der Fliehmomente $n = 0$ gesetzt, so erhält man

34) für den Durchschnitt der Hauptfliehebene mit der Mittelpunktsebene die Gleichung

$$Ax + By = l + m,$$

welche zugleich die Hauptfliehlinie der zu der Mittelpunktsebene parallelen Seitenkräfte ist.

35) Der Durchschnitt dieser Hauptfliehlinie der zur Mittelpunktsebene parallelen Seitenkräfte mit der Zentrallinie 33 ist der ***Zentralpunkt*** der Zentrallinie und seine Coordinaten sind

$$x_1 = \frac{A(l+m)H - B(l^2 + HH_1)}{A^2H - AB(l-m) - B^2H_1}, \qquad y_1 = \frac{A(m^2 + HH_1) - B(l+m)H_1}{A^2H - AB(l-m) - B^2H_1}.$$

36) Die Gleichung der Mittelkraft derjenigen Seitenkräfte, welche zur Mittelpunktsebene parallel sind, ist

$$Ay - Bx + N = 0$$

und

37) die Coordinaten ihres Durchschnitts mit der Zentrallinie sind

$$x_{II} = \frac{A(lm - HH) + Bl(H - H_1)}{A^2m - AB(H + H_1) + B^2l}, \qquad y_{II} = \frac{Am + (H_1 - H) + B(lm - H_1H_1)}{A^2m - AB(H_1 + H) + B^2l}.$$

Man würde auch diese beiden Punkte (x_I, y_I) und (x_{II}, y_{II}) erhalten haben, wenn man die Kräfte, welche zu der Mittelpunktsebene parallel sind, nach einer mit der Zentrallinie 33 parallelen und nach einer zu der Zentrallinie

senkrechten Richtung zerlegt hätte; der Mittelpunkt jener ist der Zentralpunct $(x_{,}, y_{,})$, und der Mittelpunkt dieser ist der Punkt $(x_{,,}, y_{,,})$. Das Verfahren hiebei ist vollkommen jenem in dem §. 5 gleich.

Die drei in der Mittelpunktsebene bemerkten Linien *a*) die Hauptfliehlinie der zur Mittelpunktsebene parallelen Seitenkräfte, *b*) die Mittelkraft dieser Kräfte und *c*) die Zentrallinie, welche der Durchschnitt der Hauptfliehebene des ganzen Kräftensystems mit der Mittelpunktsebene ist, diese drei Linien bilden ein rechtwinklichtes Dreieck, an welchem die Zentrallinie die Hypothenuse ist. Der Drehpunkt (x_0, y_0) der Mittelpunktsebene steht mit diesem Dreiecke in keiner Verbindung. Seine Verbindung mit der Zentrallinie werde ich später angeben. Jedoch will ich über ihn und über die beiden andern erwähnten Punkte folgende Bemerkung mittheilen: Bei dem Drehpunkt (x_0, y_0) verschwindet nur ein Fliehmoment n, bei dem Punkte $(x_{,,}, y_{,,})$ verschwinden zwei Fliehmomente n, m, und bei dem Zentralpunkte (x_1, y_1) verschwinden alle drei Fliehmomente n, m, l.

§. 17.

Die Untersuchung hat mit der Gleichung 8 begonnen, in welcher aufser den Elementen a, b, c sich noch die Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \gamma''$ befinden, und ist, nachdem die letzteren aufserhalb der Rechnung gestellt waren, mit den ersteren fortgeeilt. Es ist noch übrig, auch die letzteren Elemente zu würdigen. Dieses soll zum Schlusse dieses Abschnittes mit Wenigem noch geschehen, zumal da das hier zu gewinnende Ergebnifs auf die folgende Untersuchung von wesentlichem Einflusse seien wird. Man erhält nämlich aus den Gleichungen 8 folgende Bestimmungen:

$$38)\quad \frac{\alpha}{m_b G_{1a} - F_b H_a} = \frac{\beta}{l_a F_b - G_{1a} H_{1b}} = \frac{\gamma}{H_a H_{1b} - l_a m_b}$$

$$\frac{\alpha}{n_c H_a - F_{1c} G_{1a}} = \frac{\beta}{G_{1a} G_c - l_a n_c} = \frac{\gamma}{l_a F_{1c} - G_c H_a}$$

$$\frac{\alpha}{F_b F_{1c} - m_b n_c} = \frac{\beta}{n_c H_{1b} - F_a G_c} = \frac{\gamma}{m_b G_c - F_{1c} H_{1b}}$$

Diese Gleichungen bleiben unverändert, wenn statt α, β, γ die Cosinusse α', β', γ' oder $\alpha'', \beta'', \gamma''$ gesetzt werden; nur ist hierbei zu berücksichtigen, dafs

$$\begin{array}{llll} a_{,}, & b_{,}, & c_{,} & \text{zu} \quad \alpha, \ \beta, \ \gamma \\ a_{,,}, & b_{,,}, & c_{,,} & \text{zu} \quad \alpha', \ \beta', \ \gamma' \\ a_{,,,}, & b_{,,,}, & c_{,,,} & \text{zu} \quad \alpha'', \ \beta'', \ \gamma'' \end{array}$$

gehören.

Wenn nun ein Mittelpunkt der parallelen Seitenkräfte gegeben ist, so kann vermittelst dieser Gleichungen und einer der Gleichungen

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \quad \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1, \quad \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1$$

die Richtung dieser Seitenkräfte gesucht werden, wobei aber vorausgesetzt wird, dafs die gegebenen Gröfsen a, b, c der Gleichung $\varphi_{abc}=0$ Genüge leisten.

III. Merkwürdiger Zusammenhang dreier Mittelpunkte nach dreien zu einander senkrechten Richtungen zerlegten paralleler Seitenkräfte.

§. 18.

Wenn Kräfte nach dreien zu einander senkrechten Richtungen zerlegt sind, so nenne ich die drei Mittelpunkte der parallelen Seitenkräfte ***zusammengehörige Mittelpunkte;*** sie bilden ein Dreieck, und stehen mit einander in Verbindung, welche ich hier vermittelst Gleichungen angeben werde.

Da die drei zusammengehörigen Mittelpunkte in dreien zu einander senkrechten Linien liegen, welche mit den Coordinatenaxen x, y, z Winkel bilden, deren Cosinusse α, β, γ, . . . γ'' sind, so ist

$$\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0, \quad \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''=0, \quad \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0.$$

Diese Gleichungen sind die Grundlage der ganzen Rechnung, jede von ihnen giebt, wenn aus 37 die Werthe von β, γ, β', γ', β'', γ'' eingeführt werden, die drei zur Lösung der Aufgabe nöthigen Gleichungen, nämlich, wenn die erste von ihnen gewählt wird,

$$\left.\begin{aligned}&(m_b G_{1a}-F_b H_a)_{,}(m_b G_{1a}-F_b H_v)_{,,}\\ +&(l_a F_b - G_{1a}H_{1b})_{,}(l_a F_b - G_{1a}H_{1b})_{,,}\\ +&(H_a H_{1b}- l_a m_b)_{,}(H_a H_{1b}- l_a m_b)_{,,}\end{aligned}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}&(n_c H_a - F_{1c}G_{1a})_{,}(n_c H_a - F_{1c}G_{1a})_{,,}\\ +&(G_{1a}G_c - l_a n_c)_{,}(G_{1a}G_c - l_a n_c)_{,,}\\ +&(l_a F_{1c}- G_c H_a)_{,}(l_a F_{1c}-G_c H_a)_{,,}\end{aligned}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}&(F_b F_{1c}-m_b n_c)_{,}(F_b F_{1c}-m_b n_c)_{,,}\\ +&(n_c H_{1b}-F_b G_c)_{,}(n_c H_{1b}-F_b G_c)_{,,}\\ +&(m_b G_c -F_{1c}H_{1b})_{,}(m_b G_c -F_{1c}H_{1b})_{,,}\end{aligned}\right\} = 0,$$

wo die an den Klammern angehängten Striche sich auf $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$ und $a_{,,}$, $b_{,,}$, $c_{,,}$ beziehen.

Zur Abkürzung wird gesetzt

$$\begin{array}{lll} Cm-BF=A_{,}, & AF-CH_1=B_{,}, & Am-BH_1=C_{,} \\ Bn-CF_1=A_{,,}, & An-CG=B_{,,}, & AF_1-BG=C_{,,} \\ CH-BG_1=A_{,,,}, & Cl-AG_1=B_{,,,}, & Bl-AH=C_{,,,}, \end{array}$$

also

$$\begin{array}{rcl} m_b G_{1a}-F_b H_a & = & U_2-aA_{,}+bA_{,,,} \\ l_a F_b-G_{1a}H_{1b} & = & V_1-aB_{,}-bB_{,,,} \\ H_a H_{1b}-l_a m_b & = & Q+aC_{,}+bC_{,,,} \\ n_c H_a-F_{1c}G_{1a} & = & Q_1-aA_{,,}-cA_{,,,} \\ G_{1a}G_c-l_a n_c & = & U+aB_{,,}+cB_{,,,} \\ l_a F_{1c}-G_c H_a & = & V_2-aC_{,,}-cC_{,,,} \\ F_b F_{1c}-m_b n_c & = & V+bA_{,,}+cA_{,} \\ n_c H_{1b}-F_b G_c & = & Q_2-bB_{,,}+cB_{,} \\ m_b G_2-F_{1c}H_{1b} & = & U_1+bC_{,,}-cC_{,}. \end{array}$$

Die drei obigen Gleichungen erhalten hierdurch folgende übersichtlichere Gestalt:

$$39)\quad \left.\begin{array}{l} (U_2-a_{,}A_{,}+b_{,}A_{,,,})(U_2-a_{,,}A_{,}+b_{,,}A_{,,,}) \\ +(V_1-a_{,}B_{,}-b_{,}B_{,,,})(V_1-a_{,,}B_{,}-b_{,,}B_{,,,}) \\ +(Q+a_{,}C_{,}+b_{,}C_{,,,})(Q+a_{,,}C_{,}+b_{,,}C_{,,,}) \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} (Q_1-a_{,}A_{,,}-c_{,}A_{,,,})(Q_1-a_{,,}A_{,,}-c_{,,}A_{,,,}) \\ +(U+a_{,}B_{,,}+c_{,}B_{,,,})(U+a_{,,}B_{,,}+c_{,,}B_{,,,}) \\ +(V_2-a_{,}C_{,,}-c_{,}C_{,,,})(V_2-a_{,,}C_{,,}-c_{,,}C_{,,,}) \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} (V+b_{,}A_{,,}+c_{,}A_{,})(V+b_{,,}A_{,,}+c_{,,}A_{,}) \\ +(Q_2-b_{,}B_{,,}+c_{,}B_{,})(Q_2-b_{,,}B_{,,}+c_{,,}B_{,}) \\ +(U_1+b_{,}C_{,,}-c_{,}C_{,})(U_1+b_{,,}C_{,,}-c_{,,}C_{,}) \end{array}\right\} = 0.$$

In diesen Gleichungen kommen die Coordinaten des ersten und zweiten Mittelpunkts der Seitenkräfte vor; dieselben Gleichungen ergeben sich für den ersten und dritten, und auch für den zweiten und dritten Mittelpunkt. Es ist daher gestattet, für die Coordinaten die allgemeinen Zeichen x, y, z und t, v, u zu wählen. Wird nun zugleich das Vervielfachen vorgenommen, so nehmen die drei Gleichungen folgende Gestalt an:

$$\begin{array}{ll} 40) & \mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}y+(\mathfrak{B}+\mathfrak{D}x+\mathfrak{E}y)t+(\mathfrak{C}+\mathfrak{E}x+\mathfrak{F}y)v=0 \\ & \mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'x+\mathfrak{C}'z+(\mathfrak{B}'+\mathfrak{D}'x+\mathfrak{E}'z)t+(\mathfrak{C}'+\mathfrak{E}'x+\mathfrak{F}z)u=0 \\ & \mathfrak{A}''+\mathfrak{B}''y+\mathfrak{C}''z+(\mathfrak{B}''+\mathfrak{D}'y+\mathfrak{E}''z)v+(\mathfrak{C}''+\mathfrak{E}''y+\mathfrak{D}z)u=0, \end{array}$$

wo

$$\begin{aligned}
U_2U_2+V_1V_1+QQ &= \mathfrak{A}, & Q_1Q_1+UU+V_2V_2 &= \mathfrak{A}'\\
-U_2A_{,}-V_1B_{,}+QC_{,} &= \mathfrak{B}, & -Q_1A_{,,}+UB_{,,}-V_2C_{,,} &= \mathfrak{B}'\\
U_2A_{,,,}-V_1B_{,,,}+QC_{,,,} &= \mathfrak{C}, & -Q_1A_{,,,}+UB_{,,,}-V_2C_{,,,} &= \mathfrak{C}'\\
A_{,}A_{,}+B_{,}B_{,}+C_{,}C_{,} &= \mathfrak{D}, & A_{,,}A_{,,}+B_{,,}B_{,,}+C_{,,}C_{,,} &= \mathfrak{D}'\\
-A_{,,,}A_{,}+B_{,,,}B_{,}+C_{,,,}C_{,} &= \mathfrak{E}, & A_{,,}A_{,,,}+B_{,,}B_{,,,}+C_{,,}C_{,,,} &= \mathfrak{E}'\\
A_{,,,}A_{,,,}+B_{,,,}B_{,,,}+C_{,,,}C_{,,,} &= \mathfrak{F},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VV+Q_2Q_2+U_1U_1 &= \mathfrak{A}''\\
VA_{,,}-Q_2B_{,,}+U_1C_{,,} &= \mathfrak{B}''\\
VA_{,}+Q_2B_{,}-U_1C_{,} &= \mathfrak{C}''\\
A_{,,}A_{,}-B_{,,}B_{,}-C_{,,}C_{,} &= \mathfrak{E}''.
\end{aligned}$$

Wenn nun einer der drei zusammengehörigen Mittelpunkte durch die Coordinaten x, y, z gegeben ist, so geben die drei Gleichungen 40 die Linie an, in welcher sowohl der zweite als der dritte Mittelpunkt liegt. Daher die merkwürdige Wahrheit

41) ***Die zusammengehörigen Mittelpunkte der parallelen Seitenkräfte bilden ein reciprokes Punkten- und Liniensystem mit einem einzigen Mittelpunkte (des reciproken Systems), so dafs jeder Mittelpunkt der parallelen Seitenkräfte der Pol der Linie ist, in welcher die beiden anderen Mittelpunkte liegen.***

§. 19.

Der Mittelpunkt des reciproken Punkten- und Liniensystems wird gefunden vermittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}+\mathfrak{D}x+\mathfrak{E}y &= 0, & \mathfrak{C}+\mathfrak{E}x+\mathfrak{F}y &= 0\\
\mathfrak{B}'+\mathfrak{D}'x+\mathfrak{E}'z &= 0, & \mathfrak{C}'+\mathfrak{E}'x+\mathfrak{F}z &= 0\\
\mathfrak{B}''+\mathfrak{D}'y+\mathfrak{E}''z &= 0, & \mathfrak{C}''+\mathfrak{E}''y+\mathfrak{D}z &= 0
\end{aligned}$$

und es ist, wenn $x_{,,,}$, $y_{,,,}$, $z_{,,,}$ die Coordinaten des Mittelpunkts des reciproken Systems sind,

$$x_{,,,}=\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{F}-\mathfrak{C}\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}^2-\mathfrak{D}\mathfrak{F}}=\frac{\mathfrak{B}'\mathfrak{F}-\mathfrak{C}'\mathfrak{E}'}{\mathfrak{E}'^2-\mathfrak{D}'\mathfrak{F}}$$

$$y_{,,,}=\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{D}-\mathfrak{B}\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}^2-\mathfrak{D}\mathfrak{F}}=\frac{\mathfrak{B}''\mathfrak{D}-\mathfrak{C}''\mathfrak{E}''}{\mathfrak{E}''^2-\mathfrak{D}\mathfrak{D}'}$$

$$z_{,,,}=\frac{\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'-\mathfrak{B}'\mathfrak{E}'}{\mathfrak{E}'^2-\mathfrak{D}'\mathfrak{F}}=\frac{\mathfrak{C}''\mathfrak{D}'-\mathfrak{B}''\mathfrak{E}''}{\mathfrak{E}''^2-\mathfrak{D}\mathfrak{D}'}.$$

Diese Ausdrücke sind einer grofsen Vereinfachung fähig, die freilich nur aus

einer weitläufigen Rechnung hervorgehen wird. Es ist nämlich

$$42)\quad \begin{aligned} F\,Q + H_1U_2 + m\,V_1 &= 0\\ G_1Q + l\,U_2 + H\,V_1 &= 0\\ l\,Q_1 + H\,U + G_1V_2 &= 0\\ G\,Q_1 + F_1U + n\,V_2 &= 0\\ m\,Q_2 + F\,U_1 + H_1V &= 0\\ F_1Q_2 + n\,U_1 + G\,V &= 0, \end{aligned}$$

$$43)\quad \begin{aligned} &AU_2 - l\,A_1 + H_1A_3 = \varphi_3, \quad AV_1 - l\,B_1 - H_1B_3 = 0, \quad AQ + lC_1 + H_1C_3 = 0,\\ &BU_2 - H\,A_1 + m\,A_3 = 0, \quad BV_1 - H\,B_1 - m\,B_3 = \varphi_3, \quad BQ + HC_1 + m\,C_3 = 0,\\ &CU_2 - G_1A_1 + F\,A_3 = 0, \quad CV_1 - G_1B_1 - F\,B_3 = 0, \quad CQ + G_1C_1 + F\,C_3 = \varphi_3, \end{aligned}$$

$$44)\quad \begin{aligned} &A_1B_2 + A_2B_1 = -C\varphi_1, \quad A_1C_2 + A_2C_1 = -B\varphi_1, \quad B_1C_2 - B_2C_1 = +A\varphi_1\\ &A_2B_3 - A_3B_2 = -C\varphi_2, \quad A_2C_3 - A_3C_2 = -B\varphi_2, \quad B_2C_3 - B_3C_2 = -A\varphi_2\\ &A_1B_3 + A_3B_1 = -C\varphi_3, \quad A_1C_3 + A_3C_1 = -B\varphi_3, \quad B_1C_3 - B_3C_1 = +A\varphi_3. \end{aligned}$$

Ferner, wenn zur Abkürzung

$$Al + BH + CG_1 = p, \quad AG + BF_1 + Cn = q, \quad AH_1 + Bm + CF = s$$
$$A^2 + B^2 + C^2 = E^2$$

gesetzt wird, so ist

$$45)\quad \begin{aligned} A_{'}\cdot B - A\cdot B_{'} &= -E^2\cdot F + C\cdot s\\ A_{'}\cdot C + A\cdot C_{'} &= +E^2\cdot m - B\cdot s\\ B_{'}\cdot C + B\cdot C_{'} &= -E^2\cdot H_1 + A\cdot s\\ A_{''}\cdot B + A\cdot B_{''} &= +E^2\cdot n - C\cdot q\\ A_{''}\cdot C - A\cdot C_{''} &= -E^2\cdot F + B\cdot q\\ B_{''}\cdot C + B\cdot C_{''} &= -E^2\cdot G + A\cdot q\\ A_{'''}\cdot B + A\cdot B_{'''} &= -E^2\cdot G_1 + C\cdot p\\ A_{'''}\cdot C - A\cdot C_{'''} &= +E^2\cdot H - B\cdot p\\ B_{'''}\cdot C + B\cdot C_{'''} &= +E^2\cdot l - A\cdot p. \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen findet man, dafs

$$\begin{aligned} \mathfrak{BF} - \mathfrak{CE} &= U_2(-B_3(A_1B_3 + A_3B_1) - C_3(A_1C_3 + A_3C_1))\\ &\quad + V_1(-A_3(A_1B_3 + A_3B_1) - C_3(B_1C_3 - B_3C_1))\\ &\quad + Q\,(+A_3(A_1C_3 + A_3C_1) - B_3(B_1C_3 - B_3C_1))\\ &= (U_2(B_3C + BC_3) + V_1(A_3C - AC_3) - Q(A_3B + AB_3))\cdot\varphi_3\\ &= ((lU_2 + HV_1 + GQ)E^2 - (AU_2 + BV_1 + CQ)p)\cdot\varphi_3\\ &= -p\cdot\varphi_3\cdot\varphi_3. \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise ergibt sich, dafs

$$\mathfrak{C}\mathfrak{D}-\mathfrak{B}\mathfrak{E}=-s\cdot\varphi_3\cdot\varphi_3,\quad \mathfrak{C}'\mathfrak{D}'-\mathfrak{B}'\mathfrak{E}'=-q\cdot\varphi_2\cdot\varphi_2,$$
$$\mathfrak{B}'\mathfrak{F}-\mathfrak{C}'\mathfrak{E}'=-p\cdot\varphi_2\cdot\varphi_2,\quad \mathfrak{B}''\mathfrak{D}-\mathfrak{C}''\mathfrak{E}''=-s\cdot\varphi_1\cdot\varphi_1,$$
$$\mathfrak{C}''\mathfrak{D}'-\mathfrak{B}''\mathfrak{E}''=-q\cdot\varphi_1\cdot\varphi_1.$$

Ferner ist

$$\mathfrak{E}^2-\mathfrak{D}\mathfrak{F}=-(A_1B_3+A_3B_1)^2-(A_1C_3+A_3C_1)^2-(B_1C_3-B_3C_1)^2$$
$$=-E^2\cdot\varphi_3\cdot\varphi_3.$$

Eben so findet man, dafs

$$\mathfrak{E}'^2-\mathfrak{D}'\mathfrak{F}=-E^2\cdot\varphi_2\cdot\varphi_2,\quad \mathfrak{E}''^2-\mathfrak{D}\mathfrak{D}'=-E^2\cdot\varphi_1\cdot\varphi_1.$$

Das Ergebnifs dieser weitläufigen Rechnungen entschädigt für die auf solche verwendete Mühe durch seine grofse Einfachheit, und ist

$$x_m=\frac{p}{E^2},\quad y_m=\frac{s}{E^2},\quad z_m=\frac{q}{E^2}.$$

Daher

46) ***Die Coordinaten des Mittelpunkts des reciproken Punkten- und Liniensystems sind***

$$x_m=\frac{A\cdot l+B\cdot H+C\cdot G_1}{A^2+B^2+C^2}=\frac{A\cdot\Sigma xX+B\cdot\Sigma xY+C\cdot\Sigma xZ}{A^2+B^2+C^2}$$
$$y_m=\frac{A\cdot H_1+B\cdot m+C\cdot F}{A^2+B^2+C^2}=\frac{A\cdot\Sigma yX+B\cdot\Sigma yY+C\cdot\Sigma yZ}{A^2+B^2+C^2}$$
$$z_m=\frac{A\cdot G+B\cdot F_1+C\cdot n}{A^2+B^2+C^2}=\frac{A\cdot\Sigma zX+B\cdot\Sigma zY+C\cdot\Sigma zZ}{A^2+B^2+C^2}.$$

§. 20.

Vermittelst der Gleichungen 38 kann man zu einem bestimmten Punkte in der Mittelpunktsebene die Richtung suchen, nach welcher die Kräfte des Systems zu zerlegen sind, wenn der gegebene Punkt der Mittelpunkt dieser Seitenkräfte seien soll. Der gegebene Punkt sei hier der vorhin gefundene Mittelpunkt des reciproken Punkten- und Liniensystems. Werden seine Coordinaten x_m, y_m, z_m statt a, b, c in die Gleichungen des §. 18 eingeführt, so wird

$$m_bG_{1a}-F_bH_a=\frac{1}{E^2}(U_2E^2-A_1(Al+BH+CG_1)+A_3(AH_1+Bm+CF)).$$

Das, was hier eingeklammert ist, kann auf folgende Weise gruppirt werden:

$$A(AU_2-A_1l+A_3H_1)+B(BU_2-A_1H+A_3m)+C(CU_2-A_1G_1+A_3F).$$

Wendet man hierauf die Gleichungen 43 an, so wird

$$m_bG_{1a}-F_bH_a=\frac{A\cdot\varphi_3}{E^2}.$$

Durch dasselbe Verfahren findet man, dafs

$$l_a F_b - G_{1a} H_{1b} = \frac{B \cdot \varphi_3}{E^2} \quad \text{und} \quad H_a H_{1b} - l_a m_b = \frac{C \cdot \varphi_3}{E^2}.$$

Es ist also nach 38

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C},$$

wodurch die Richtung der Mittelkraft des ganzen Kräftensystems angezeigt ist. Daher

47) ***Wenn die Kräfte nach der Richtung der Mittelkraft des ganzen Kräftensystems zerlegt werden, so ist der Mittelpunkt der dadurch entstandenen Seitenkräfte zugleich der Mittelpunkt des reciproken Punkten- und Liniensystems.***

Dieses Ergebnifs stimmt vollkommen mit demjenigen überein, welches sich aus den Gleichungen N. 9 ergibt, wenn in ihnen

$$\beta = \frac{B}{A} \cdot \alpha \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{C}{A} \cdot \alpha$$

gesetzt wird; es entsteht nämlich $a = x_m$, $b = y_m$, $c = z_m$.

Dieser ausgezeichnete Punkt ist nicht zu verwechseln mit dem Mittelpunkte des ganzen Kräftensystems, wie ich solchen in der Untersuchung der Fliehmomente N. 24 in §. 12 angegeben habe.

Den beiden anderen Mittelpunkten $(a_{\prime\prime} b_{\prime\prime} c_{\prime\prime})$ und $(a_{\prime\prime\prime} b_{\prime\prime\prime} c_{\prime\prime\prime})$ in N. 9 wird in einem der folgenden §§ ihr Ort angewiesen werden.

§. 21.

Wenn die Mittelpunktsebene selbst zur Coordinatenebene (xy) angenommen wird, so mufs

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

und zwar ohne dafs $\varphi_3 = 0$ ist, gesetzt werden. Dieses geschiehet hier nach N. 28, wenn

$$F_1 = G = n = 0$$

angenommen wird. Hiedurch wird

$$Q_1 = Q_2 = U = U_1 = V = V_2 = 0$$

und zugleich

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}' = \mathfrak{C}' = \mathfrak{D}' = \mathfrak{E}' = \mathfrak{A}'' = \mathfrak{B}'' = \mathfrak{C}'' = \mathfrak{E}'' = 0.$$

Die Annahme $F_1 = G = n = 0$ hat auf die erste der drei reciproken Gleichungen 40 keinen Einflufs. Es kann also

48) $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}y + (\mathfrak{B} + \mathfrak{D}x + \mathfrak{E}y)t + (\mathfrak{C} + \mathfrak{E}x + \mathfrak{F}y)u = 0$

als die Gleichung des reciproken Punkten- und Liniensystems, womit die Mittelpunkte der parallelen Seitenkräfte zusammenhangen, betrachtet werden, wo die Coordinaten x, y, t, u in der Mittelpunktsebene selbst genommen sind.

Die Ausdrücke für x_{III}, y_{III} erleiden durch die obige Annahme keine Änderung, allein z_{III} wird $= 0$.

§. 22.

Es ist bei verschiedenen Rechnungen nützlich, den Zusammenhang der Vorzahlen dieser reciproken Gleichung 48 mit φ_3 zu kennen; nämlich

$$
\begin{aligned}
49)\quad A\mathfrak{A} + l\mathfrak{B} + H_1\mathfrak{C} &= +U_2\cdot\varphi_3\\
B\mathfrak{A} + H\mathfrak{B} + m\mathfrak{C} &= +V_1\cdot\varphi_3\\
C\mathfrak{A} + G_1\mathfrak{B} + F\mathfrak{C} &= +Q\cdot\varphi_3\\
A\mathfrak{B} + l\mathfrak{D} + H_1\mathfrak{E} &= -A_1\cdot\varphi_3\\
B\mathfrak{B} + H\mathfrak{D} + m\mathfrak{E} &= -B_1\cdot\varphi_3\\
C\mathfrak{B} + G_1\mathfrak{D} + F\mathfrak{E} &= +C_1\cdot\varphi_3\\
A\mathfrak{C} + l\mathfrak{E} + H_1\mathfrak{F} &= +A_3\cdot\varphi_3\\
B\mathfrak{C} + H\mathfrak{E} + m\mathfrak{F} &= -B_3\cdot\varphi_3\\
C\mathfrak{C} + G_1\mathfrak{E} + F\mathfrak{F} &= +C_3\cdot\varphi_3.
\end{aligned}
$$

Anwendung von ihnen kann hier gleich gemacht werden, wenn die Polare des Mittelpunkts des reciproken Systems gesucht wird, dessen Coordinaten x_{III}, y_{III} in 46 angegeben sind; es entsteht die Gleichung

$$P' + Q't + R'u = 0,$$

wo

$$
\begin{aligned}
P' &= \mathfrak{A}E^2 + \mathfrak{B}(Al + BH + CG_1) + \mathfrak{C}(AH_1 + Bm + CF)\\
&= A(B\mathfrak{A} + l\mathfrak{B} + H_1\mathfrak{C}) + B(B\mathfrak{A} + H\mathfrak{B} + m\mathfrak{C}) + C(C\mathfrak{A} + G_1\mathfrak{B} + F\mathfrak{C})\\
&= (AU_2 + BV_1 + CQ)\cdot\varphi_3 = \varphi_3\cdot\varphi_3.
\end{aligned}
$$

Eben so findet man, dafs

$$
\begin{aligned}
Q' &= (-AA_2 - BB_1 + CC_1)\cdot\varphi_3 = 0\\
R' &= (+AA_3 - BB_3 + CC_3)\cdot\varphi_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Es ist also

$$\varphi_3^2 + 0\cdot t + 0\cdot u = 0,$$

was nur möglich ist, wenn $t = \frac{1}{0}$ und $u = \frac{1}{0}$, was anzeigt, dafs die Polare des Mittelpunkts des reciproken Systems im Unendlichen liegt, wie es auch seien mufs.

Die beiden Mittelpunkte $(a_{II}\,b_{II}\,c_{II})$ und $(a_{III}\,b_{III}\,c_{III})$, die am Ende des §. 20 erwähnt wurden, liegen also im Unendlichen.

§. 23.

Eine zweite Anwendung der obigen Gleichungen findet statt, wenn zu dem Drehpunkte der Mittelpunktsebene, dessen Coordinaten $x_0 = \frac{G_1}{C}$, $y_0 = \frac{F}{C}$ oben in N. 31 gefunden sind, die Polare, oder die Linie gesucht wird, in welchem die beiden anderen Mittelpunkte von parallelen Seitenkräften liegen. Die Gleichung dieser Linie ist

$$C\mathfrak{A} + G_1\mathfrak{B} + F\mathfrak{C} + (C\mathfrak{B} + G_1\mathfrak{D} + F\mathfrak{E})t + (C\mathfrak{C} + G_1\mathfrak{E} + F\mathfrak{F})u = 0$$

oder

$$(Q + C_1 t + C_3 u)\cdot\varphi_3 = 0$$

oder

$$HH_1 - lm + (Am - BH_1)t + (Bl - AH)u = 0.$$

In dieser Linie liegen also die beiden anderen zusammengehörigen Mittelpunkte, was mit dem Früheren 33 übereinstimmt.

Heidelberg im December 1852.

16.
Méthode du calcul des fonctions elliptiques de troisième espèce.

(Par Mr. *J. Somoff,* Professeur à l'Université de St. Petersbourg.)

1.

Lagrange a donné le premier une méthode générale pour calculer par approximation les intégrales elliptiques au moyen d'une transformation successive des constantes, qui se trouvent dans la différentielle. (Nouveaux Mémoires de Turin, ann. 1784, 1785.) Cette transformation est dite de ***Landen,*** parcequ'elle a un rapport intime avec une rélation entre les arcs elliptiques et hyperboliques découverte par ce Géomètre. (Philosophical Transactions 1775. Mathematical Memoirs, by ***John Landen*** 1780.) ***Legendre*** a perfectionné les formules de cette transformation et s'en est servi pour la construction de tables des fonctions elliptiques de deux premières espèces. (Exercices de calcul intégral. Traité des fonctions elliptiques.) Il l'a étendue aussi aux fonctions de troisième espèce, mais sans en avoir fait des applications numériques. Je présente dans cet article des formules pour la transformation des fonctions elliptiques de troisième espèce sous une nouvelle forme, plus commodes pour le calcul numérique et plus conformes à la définition de ces fonctions, donnée par l'illustre auteur des ***Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum.*** On verra en même temps le profit qu'on en peut tirer pour le calcul des fonctions elliptiques, des tables qui servent à trouver le logarithme de la somme ou de la différence de deux nombres; ce qui a été déjà montré par ***Jacobi*** dans son mémoire: ***Zur Theorie der elliptischen Functionen.*** (***Jacobi,*** Mathematische Werke. Band 1, 1846.) Mais au lieu des tables de M. ***Mattiesen,*** dont s'est servi le Géomètre cité, j'emploie les nouvelles tables, préférables aux premières, composées par M. ***Zech: Tafeln der Additions- und Subtractions-Logarithmen.*** (***Vega,*** Sammlung mathematischer Tafeln. Herausg. Dr. ***J. A. Hülsse.*** Leipzig, 1849.)

2.

Soit

$$\Delta\varphi = \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}, \qquad u = F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\Delta\varphi}, \qquad K = F(\tfrac{1}{2}\pi, k),$$

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \Delta\varphi \, \partial\varphi, \qquad Z(u, k) = \frac{K \cdot E(\varphi, k) - E(\tfrac{1}{2}\pi, k) \cdot F(\varphi, k)}{K},$$

$$k' = \sqrt{(1 - k^2)}, \qquad h_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \qquad H_1 = F(\tfrac{1}{2}\pi, h_1), \qquad h_1' = \sqrt{(1 - h_1^2)}.$$

La formule de la transformation des fonctions de seconde espèce donne

$$(1.) \qquad Z(u, k) = \frac{H_1}{K} Z\left(\frac{2H_1 u}{K}, h_1\right) + \frac{h_1 H_1}{K} \operatorname{sin\,am}\left(\frac{2H_1 u}{K}, h_1\right).$$

(C'est la formule (4) de la page des ***Fund. nova***, dans laquelle on a remplacé $\frac{2Kx}{\pi}$ par u, $k^{(2)}$ par h_1, $K^{(2)}$ par H_1, pour ne pas confondre les indices avec les exposans.) En multipliant les deux membres de cette équation par ∂u, prenant ensuite l'intégrale entre les limites o et u, et posant $\frac{2H_1 u}{K} = u_1$, on aura

$$(2.) \qquad \int_0^{u} Z(u, k) \, \partial u = \tfrac{1}{2} \int_0^{u_1} Z(u_1, h_1) \, \partial u_1 + \tfrac{1}{2} h_1 \int_0^{u_1} \operatorname{sin\,am}(u_1, h_1) \, \partial u_1$$

ou

$$\log\left[\frac{\Theta(u, k)}{\Theta(o, k)}\right] = \tfrac{1}{2} \log\left[\frac{\Theta(u_1, h_1)}{\Theta(o_1, h_1)}\right] + \tfrac{1}{2} h_1 \int_0^{u_1} \operatorname{sin\,am}(u_1, h_1) \, \partial u_1,$$

en vertu de la formule

$$\Theta(u, k) = \Theta(o, k) e^{\int_0^u Z(u, k) \partial u}.$$

(Fund. nova page 145.)

Faisant $\operatorname{sin\,am}(u_1, h_1) = y$, on a

$$\int_0^{u_1} \operatorname{sin\,am}(u_1, h_1) \, \partial u_1 = \int_0^{y} \frac{y \partial y}{\sqrt{[(1 - g)^2 (1 - k^2 y^2)]}} = \frac{1}{h_1} \log\left[\frac{\sqrt{(1 - h_1^2 y^2)} - h_1 \sqrt{(1 - y^2)}}{1 - h_1}\right].$$

Or $\sqrt{(1 - h_1^2 y^2)} = \Delta\operatorname{am}(u_1, h_1)$, $\sqrt{(1 - y^2)} = \cos\operatorname{am}(u_1, h_1)$, donc

$$\int_0^{u_1} \operatorname{sin\,am}(u_1, h_1) = \frac{1}{h_1} \log\left[\frac{\Delta\operatorname{am}(u_1, h_1) - h_1 \cos\operatorname{am}(u_1, h_1)}{1 - h_1}\right].$$

Donc la formule (2.) se reduit à:

$$\log\left[\frac{\Theta(u, k)}{\Theta(o, k)}\right] = \tfrac{1}{2} \log\left[\frac{\Theta(u_1, h_1)}{\Theta(o, h_1)}\right] = \tfrac{1}{2} \log\left[\frac{\Delta\operatorname{am} u_1, h_1) - h_1 \cos\operatorname{am}(u_1, h_1)}{1 - h_1}\right].$$

Substituant $u \mp a$ à u et posant $\frac{2H_1 a}{K} = a_1$, on a

$$\log\left[\frac{\Theta(u \mp a, k)}{\Theta(o, k)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \log\left[\frac{\Theta(u_1 \mp a_1, h_1)}{\Theta(o, h_1)}\right] + \tfrac{1}{2} \log\left[\frac{\Delta\operatorname{am}(u_1 \mp a_1, h_1) - h_1 \cos\operatorname{am}(u_1 \mp a_1, h_1)}{1 - h_1}\right],$$

d'ou l'on tire:

$$(3.)\qquad \log\left[\frac{\Theta(u-a,k)}{\Theta(u+a,k)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\left[\frac{\Theta(u_1-a_1)h_1}{\Theta(u_1+a_1)h_1}\right]+\tfrac{1}{2}\log\left[\frac{\Delta\,\mathrm{am}(u_1-a_1,h_1)-h_1\cos\mathrm{am}(u_1-a_1,h_1)}{\Delta\,\mathrm{am}(u_1+a_1,h_1)-h_1\cos\mathrm{am}(u_1+a_1,h_1)}\right].$$

Le dernier terme de cette expression peut être simplifié. Les formules de l'addition et de la soustraction des arguments elliptiques donnent:

$$\Delta\,\mathrm{am}(u_1\mp a_1,h_1)-h_1\cos\mathrm{am}(u_1\mp a_1,h_1)$$

$$\Delta\,\mathrm{am}(u_1)\Delta\,\mathrm{am}(a_1)\pm h_1^2\sin\mathrm{am}(u_1)\sin\mathrm{am}(a_1)\cos\mathrm{am}(u_1)\cos\mathrm{am}(a_1)$$

$$= \frac{-h_1\cos\mathrm{am}(u_1)\cos\mathrm{am}(a_1)\mp h_1\sin\mathrm{am}(u_1)\sin\mathrm{am}(a_1)\Delta\,\mathrm{am}(u_1)\Delta\,\mathrm{am}(a_1)}{1-h_1^2\sin^2\mathrm{am}(u_1)\sin^2\mathrm{am}(a_1)}$$

$$= \frac{[\Delta\,\mathrm{am}(u_1)\Delta\,\mathrm{am}(a_1)-h_1\cos\mathrm{am}(u_1)\cos\mathrm{am}(a_1)][1\mp h_1\sin\mathrm{am}(u_1)\sin\mathrm{am}(a_1)]}{1-h_1^2\sin^2\mathrm{am}(u_1)\sin^2\mathrm{am}(a_1)},$$

par conséquent

$$\frac{\Delta\,\mathrm{am}(u_1-a_1,h_1)-h_1\cos\mathrm{am}(u_1-a_1,h_1)}{\Delta\,\mathrm{am}(u_1+a_1,h_1)-h_1\cos\mathrm{am}(u_1+a_1,h_1)} = \frac{1-h_1\sin\mathrm{am}(u_1)\sin\mathrm{am}(a_1)}{1+h_1\sin\mathrm{am}(u_1)\sin\mathrm{am}(a_1)}$$

et l'équation (3) prend la forme

$$(4.)\qquad \log\left[\frac{\Theta(u_1-a_1,h_1)}{\Theta(u_1+a_1,h_1)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\left[\frac{\Theta(u_1-a_1,h_1)}{\Theta(u_1+a_1,h_1)}\right]+\tfrac{1}{2}\log\left[\frac{1-h_1\sin\mathrm{am}(u_1,h_1)\sin\mathrm{am}(a_1,h_1)}{1+h_1\sin\mathrm{am}(u_1,h_1)\sin\mathrm{am}(a_1,h_1)}\right].$$

Soit maintenant posée la fonction de troisième espèce

$$(5.)\qquad \Pi(u,a,k) = \int_0^u \frac{k^2\sin\mathrm{am}(a)\cos\mathrm{am}(a)\Delta\,\mathrm{am}(a)\sin^2\mathrm{am}(u)\,\partial u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(a)\sin^2\mathrm{am}(u)},$$

on aura, par la formule (3) de la page (146) des ***Fund. nova:***

$$(6.)\qquad \Pi(u,a,k) = u\mathbf{Z}(a,k)+\tfrac{1}{2}\log\left[\frac{\Theta(u-a,k)}{\Theta(u+a,k)}\right].$$

En vertu des formules (1 et 4) cette expression se reduit à

$$\Pi(u,a,k) = \tfrac{1}{2}u_1\mathbf{Z}(a_1,h_1)+\tfrac{1}{2}h_1u_1\sin\mathrm{am}(a_1,h_1)$$
$$+\tfrac{1}{4}\log\left[\frac{\Theta(u_1-a_1,h_1)}{\Theta(u_1+a_1,h_1)}\right]+\tfrac{1}{4}\log\left(\frac{1-h_1\sin\mathrm{am}(u_1,h_1)\sin\mathrm{am}(a_1,h_1)}{1+h_1\sin\mathrm{am}(u_1,h_1)\sin\mathrm{am}(a_1,h_1)}\right).$$

Or, l'équation (6) donne

$$\tfrac{1}{2}u_1\mathbf{Z}(a_1,h_1)+\tfrac{1}{4}\log\left[\frac{\Theta(u_1-a_1,h_1)}{\Theta(u_1+a_1,h_1)}\right] = \tfrac{1}{2}\Pi(u_1,a_1,h_1),$$

donc

$$(7.)\qquad \Pi(u,a,k) = \tfrac{1}{2}\Pi(u_1,a_1,h_1)+\tfrac{1}{2}h_1u_1\sin\mathrm{am}(a_1,h_1)$$
$$+\tfrac{1}{4}\log\left(\frac{1-h_1\sin\mathrm{am}(u_1,h_1)\sin\mathrm{am}(a_1,h_1)}{1+h_1\sin\mathrm{am}(u_1,h_1)\sin\mathrm{am}(a_1,h_1)}\right).$$

C'est ainsi qu'une fonction elliptique de troisième espèce à paramètre logarithmique, peut être reduite à une autre fonction de la même forme, qui aura $h_1 = \frac{1-k'}{1+k'} < k$ pour module, $u_1 = \frac{2H_1 u}{K}$ pour argument de l'amplitude, et $a_1 = \frac{2H_1 a}{K}$ pour argument du paramètre. On obtient ce module et ces arguments elliptiques par la transformation descendante de ***Landen.*** Soit maintenant

$$h_1 = \frac{1-k'}{1+k'}, \quad h_2 = \frac{1-h_1'}{1+h_1'}, \quad h_3 = \frac{1-h_2'}{1+h_2'}, \quad \ldots\ldots \quad h_\mu = \frac{1-h_{\mu-1}'}{1+h_{\mu-1}'}, \quad \ldots\ldots$$

l'echelle des modules de cette transformation, et soient H_1, H_2, ... H_μ les arguments complets, qui correspondent à ces modules, et

$$u_1 = \frac{2H_1 u}{K}, \quad u_2 = \frac{2H_2 u_1}{H_1}, \quad \ldots\ldots \quad u_\mu = \frac{2H_\mu u_{\mu-1}}{H_{\mu-1}},$$

$$a_1 = \frac{2H_1 a}{K}, \quad a_2 = \frac{2H_2 a_1}{H_1}, \quad \ldots\ldots \quad a_\mu = \frac{2H_\mu a_{\mu-1}}{H_{\mu-1}},$$

les arguments respectifs tirés de u et a par cette même transformation. Cela posé, si l'on remplace k dans la formule (7) successivement par h_1, h_2, ... h_μ, on aura une suite d'équations, desqu'elles, par l'élimination des fonctions intermédiaires $\Pi(u_1, a_1, h_1)$, $\Pi(u_2, a_2, h_2)$, ... $\Pi(u_{\mu-1}, a_{\mu-1}, h_{\mu-1})$, on tire la formule

$$(8.) \quad \Pi(u, a, k)$$

$$= \frac{1}{2^\mu}\Pi(u_\mu, a_\mu, h_\mu) + \tfrac{1}{2} h_1 u_1 \sin\mathrm{am}(a_1, h_1) + \tfrac{1}{4} h_2 u_2 \sin\mathrm{am}(a_2, h_2) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{h_\mu u_\mu}{2^\mu}\sin\mathrm{am}(a_\mu, h_\mu) + \tfrac{1}{4}\log\left(\frac{1-h_1\sin\mathrm{am}(a_1, h_1)\sin\mathrm{am}(u_1, h_1)}{1+h_1\sin\mathrm{am}(a_1, h_1)\sin\mathrm{am}(u_1, h_1)}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{8}\log\left(\frac{1-h_2\sin\mathrm{am}(a_2, h_2)\sin\mathrm{am}(u_2, h_2)}{1+h_2\sin\mathrm{am}(a_2, h_2)\sin\mathrm{am}(u_2, h_2)}\right) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2^{\mu+1}}\log\left(\frac{1-h_\mu\sin\mathrm{am}(a_\mu, h_\mu)\sin\mathrm{am}(u_\mu, h_\mu)}{1+h_\mu\sin\mathrm{am}(a_\mu, h_\mu)\sin\mathrm{am}(u_\mu, h_\mu)}\right).$$

Si h_μ^2 a une valeur assez petite pour pouvoir être négligé, on pourra supprimer dans cette formule le terme

$$\frac{1}{2^\mu}\Pi(u_\mu, a_\mu, h_\mu) = \frac{h_\mu^2}{2^\mu}\int_0^{u_\mu} \frac{\sin\mathrm{am}(a_\mu)\cos\mathrm{am}(a_\mu)\Delta\mathrm{am}(a_\mu)\sin^2\mathrm{am}(u)\,\partial u}{1-h_\mu^2\sin^2\mathrm{am}(a_\mu)\sin^2\mathrm{am}(u)}.$$

Cela fait, si l'on pose pour abréger:

$$\mathrm{am}(u, k) = \varphi, \quad \mathrm{am}(u_1, h_1) = \gamma_1, \quad \mathrm{am}(u_2, h_2) = \gamma_2, \ \ldots\ \mathrm{am}(u_\mu, h_\mu) = \gamma_\mu,$$

$$\mathrm{am}(a, k) = \alpha, \quad \mathrm{am}(a_1, h_1) = \alpha_1, \quad \mathrm{am}(a_2, h_2) = \alpha_2, \ \ldots\ \mathrm{am}(a_\mu, h_\mu) = \alpha_\mu,$$

la formule (8) prendra la forme

$$(9.)\quad \Pi(u,a,k) = u\left(\frac{h_1 H_1}{K}\sin\alpha_1 + \frac{h_2 H_2}{K}\sin\alpha_2 + \frac{h_3 H_3}{K}\sin\alpha_3 + \ldots\right)$$
$$+ \tfrac{1}{4}\log\left(\frac{1-h_1\sin\alpha_1\sin\gamma_1}{1+h_1\sin\alpha_1\sin\gamma_1}\right) + \tfrac{1}{8}\log\left(\frac{1-h_2\sin\alpha_2\sin\gamma_2}{1+h_2\sin\alpha_2\sin\gamma_2}\right) + \ldots.$$

Les amplitudes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ doivent être calculées au moyen des équations

$$\operatorname{tang}(\gamma_1-\varphi) = k'\operatorname{tang}\varphi,\ \operatorname{tang}(\gamma_2-\gamma_1) = h_1'\operatorname{tang}\gamma_1,\ \operatorname{tang}(\gamma_3-\gamma_2) = h_2'\operatorname{tang}\gamma_2,\ \ldots.$$
$$\operatorname{tang}(\alpha_1-\alpha) = k'\operatorname{tang}\varphi,\ \operatorname{tang}(\alpha_2-\alpha_1) - h_1'\operatorname{tang}\alpha_1,\ \operatorname{tang}(\alpha_3-\alpha_2) = h_1'\operatorname{tang}\alpha_2,\ \ldots.$$

relatives à la transformation de ***Landen.*** (Traité des fonctions elliptiques.)

De la formule (7) on déduira facilement une autre semblable, pour la transformation d'une fonction de troisième espèce à paramètre circulaire. Pour y parvenir, on changera a en $ai = a\sqrt{-1}$, $a_1 = \frac{2H_1 a}{K}$ en $a_1 i$, $\sin\operatorname{am}(a_1 i, h_1)$ en $i\operatorname{tang}\operatorname{am}(a_1, h_1')$ (Fund. nova p. 34), et après avoir divisé la formule (7) par i, on la reduira à

$$(10.)\quad \frac{1}{i}\Pi(u,ai,k) = \frac{1}{2i}\Pi(u_1,a_1 i,h_1) + \tfrac{1}{2}h_1 u_1 \operatorname{tang}\operatorname{am}(a_1,h_1')$$
$$+ \frac{1}{4i}\log\left(\frac{1-ih_1\sin\operatorname{am}(u_1,h_1)\operatorname{tang}\operatorname{am}(a_1,h_1')}{1+ih_1\sin\operatorname{am}(u_1,h_1)\operatorname{tang}\operatorname{am}(a_1,h_1')}\right).$$

Le dernier terme peut être transformé en une fonction circulaire, savoir:

$$-\tfrac{1}{2}\operatorname{arctang}[h_1\operatorname{tang}\operatorname{am}(a_1,h_1')\sin\operatorname{am}(u_1,h_1)];$$

par conséquent on a:

$$(11.)\quad \frac{1}{i}\Pi(u,ai,k) = \frac{1}{2i}\Pi(u_1,a_1 i,h_1) + \tfrac{1}{2}h_1 u_1 \operatorname{tang}\operatorname{am}(a_1,h_1')$$
$$-\tfrac{1}{2}\operatorname{arctang}[h_1\operatorname{tang}\operatorname{am}(a_1,h_1')\sin\operatorname{am}(u_1,h_1)].$$

Remplaçant encore dans (7) a par $a+K$, on devra changer en même temps a_1 en a_1+2H_1, $\sin\operatorname{am}(a_1,h_1)$ en $\sin\operatorname{am}(a_1+2H_1,h_1) = -\sin\operatorname{am}(a_1,h_1)$, et $\cos\operatorname{am}(a_1,h_1)$ en $\cos\operatorname{am}(a_1+2H_1,h_1) = -\cos\operatorname{am}(a_1,h_1)$, ce qui n'altérera pas la fonction $\Pi(u_1,a_1,h_1)$. On trouvera ainsi:

$$(12.)\quad \Pi(u,a+K,k) = \tfrac{1}{2}\Pi(u_1,a_1,h_1) - \tfrac{1}{2}h_1 u_1 \sin\operatorname{am}(a_1,h_1)$$
$$+\tfrac{1}{4}\log\left[\frac{1+h_1\sin\operatorname{am}(a_1,h_1)\sin\operatorname{am}(u_1,h_1)}{1-h_1\sin\operatorname{am}(a_1,h_1)\sin\operatorname{am}(u_1,h_1)}\right].$$

Substituant ai à a, et divisant par i, cette formule deviendra

$$(13.)\quad \frac{1}{i}\Pi(u, ai+K) = \frac{1}{2i}\Pi(u_1, a_1 i, h_1) - \tfrac{1}{2}(h_1 u_1)\operatorname{tang am}(a_1, h_1') + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctang}[h_1 \operatorname{tang am}(a_1, h_1')\sin am(u_1, h_1)].$$

Par la transformation successive du module, on tire des formules (11, 13):

$$(14.)\quad \frac{1}{i}\Pi(u, ai, k) = u\left[\frac{h_1 H_1}{K}\operatorname{tang am}(a_1, h_1') + \frac{h_2 H_2}{K}\operatorname{tang am}(a_2, h_2') + \cdots\right] - \tfrac{1}{2}\operatorname{arctang}[h_1 \operatorname{tang am}(a_1, h_1')\sin am(u_1, h_1)] - \tfrac{1}{4}\operatorname{arctang}[h_2 \operatorname{tang am}(a_2, h_2')\sin am(u_2, h_2)] - \cdots,$$

$$(15.)\quad \frac{1}{i}\Pi(u, ai+K, k) = u\left[-\frac{h_1 H_1}{K}\operatorname{tang am}(a_1, h_1') + \frac{h_2 H_2}{K}\operatorname{tang am}(a_2, h_2') + \cdots\right] + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctang}[h_1 \operatorname{tang am}(a_1, h_1')\sin am(u_1, h_1)] - \tfrac{1}{4}\operatorname{arctang}[h_2 \operatorname{tang am}(a_1, h_2')\sin am(u_2, h_2)] - \cdots$$

Prenant les sommes des expression (7, 13) et (11, 14) on trouvera les deux nouvelles formules

$$\Pi(u, a, k) + \Pi(u, a, ai+K, k) = \Pi(u_1, a_1, h_1),$$

$$(16.)\quad \frac{1}{i}\Pi(u, ai, k) + \frac{1}{i}\Pi(u, ai+K, k) = \frac{1}{i}\Pi(u_1, a_1 i, h_1),$$

pour la réduction des fonctions de la forme $\Pi(u, a+K, k)$ et $\frac{1}{i}\Pi(u, ai+K, k)$ aux fonctions de la forme $\Pi(u, a, k)$ et $\Pi(u, ai, k)$.

La transformation de *Landen* appliquée à l'echelle des modules complementaires k', $h_1' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$, $h_2' = \frac{2\sqrt{h_1'}}{1+h_1'}$, ..., donne

$$a_1 = \frac{2H_1}{K}a = \frac{2a}{1+h_1} = \frac{2\sqrt{k'}}{h_1'}a, \quad a_2 = \frac{2\sqrt{h_1'}}{h_2'}a_1, \quad \ldots.$$

$$\operatorname{tang am}(a_1, h_1') = \frac{2\sqrt{k'}}{h_1'}\cdot\frac{\operatorname{tang am}(a, k')}{\Delta am(a, k')}, \quad \operatorname{tang am}(a_2, h_2') = \frac{2\sqrt{h_1'}}{h_2'}\cdot\frac{\operatorname{tang am}(a_1, h_1')}{\Delta am(a_1, h_1')}, \ldots.$$

Posant, pour abréger, $am(a, k') = \theta$, $am(a_1, h_1') = \theta'$, $am(a_2, h_2') = \theta''$, ... on aura

$$(17.)\quad \operatorname{tang}\theta' = \frac{2\sqrt{k'}}{h_1'}\cdot\frac{\operatorname{tang}\theta}{\Delta\theta}, \quad \operatorname{tang}\theta'' = \frac{2\sqrt{h_1'}}{h_1'}\cdot\frac{\operatorname{tang}\theta'}{\Delta\theta'}, \quad \ldots.$$

et les formules (14 et 15) pourront être mises sous la forme

$$(18.)\quad \frac{1}{i}\Pi(u, ai, k) = \frac{h_1 H_1 u}{K}\operatorname{tang}\theta' + \frac{h_2 H_2 u}{K}\operatorname{tang}\theta'' + \cdots$$
$$- \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}(h_1 \operatorname{tang}\theta' \sin\gamma_1) - \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}(h_2 \operatorname{tang}\theta'' \sin\gamma_2) - \cdots,$$

$$(19.)\quad \frac{1}{i}\Pi(u, ai + K, k) = -\frac{h_1 H_1 u}{K}\operatorname{tang}\theta' + \frac{h_2 H_2 u}{K}\operatorname{tang}\theta'' + \cdots$$
$$+ \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}(h_1 \operatorname{tang}\theta' \sin\gamma_1) - \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}(h_2 \operatorname{tang}\theta'' \sin\gamma_2) - \cdots$$

Il est facile de trouver aussi des formules pour la transformation des fonctions de troisième espèce au moyen de l'échelle ascendante des modules

$$k, \quad \lambda_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \lambda_2 = \frac{2\sqrt{\lambda_1}}{1+\lambda_1}, \ \ldots\ .$$

En effet, si l'on change dans (7) h_1 en k, k en λ_1, u_1 en u, u en $u' = \frac{\Delta_1 u}{2K}$, a en $a' = \frac{\Delta_1 a}{2K}$, en designant par Δ_1 l'argument complet relatif au module λ_1, on aura

$$(20.)\quad \Pi(u, a, k)$$
$$= 2\Pi(u', a', \lambda_1) - ku \sin\operatorname{am}(a, k) + \tfrac{1}{2}\log\left[\frac{1 + k\sin\operatorname{am}(a,k)\sin\operatorname{am}(u,k)}{1 - k\sin\operatorname{am}(a,k)\sin\operatorname{am}(u,k)}\right].$$

Appliquant cette formule successivement aux modules $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ et éliminant en suite les fonctions intermédiaires, on aura

$$(21.)\quad \Pi(u, a, k)$$
$$= 2^\mu \Pi(u^{(\mu)}, a^{(\mu)}, \lambda_\mu) - u\left[k\sin\alpha + \frac{\lambda_1\Delta_1}{K}\sin\varepsilon_1 + \frac{\lambda_2\Delta_2}{K}\sin\varepsilon_2 + \cdots + \frac{\lambda_{\mu-1}\Delta_{\mu-1}}{K}\sin\varepsilon_{\mu-1}\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1 + k\sin\alpha\sin\varphi}{1 - k\sin\alpha\sin\varphi}\right) + \log\left(\frac{1 + \lambda_1\sin\varepsilon_1\sin\psi_1}{1 - \lambda_1\sin\varepsilon_1\sin\psi_1}\right) + \cdots$$
$$+ 2^{\mu-2}\log\left(\frac{1 + \lambda_{\mu-1}\sin\varepsilon_{\mu-1}\sin\psi_{\mu-1}}{1 - \lambda_{\mu-1}\sin\varepsilon_{\mu-1}\sin\psi_{\mu-1}}\right),$$

où

$$\varphi = \operatorname{am}(u, k), \quad \psi_1 = \operatorname{am}(u', \lambda_1), \quad \psi_2 = \operatorname{am}(u'', \lambda_2), \ \ldots\ \psi_\mu = \operatorname{am}(u^{(\mu)}, \lambda_\mu),$$
$$\alpha = \operatorname{am}(a, k), \quad \varepsilon_1 = \operatorname{am}(a', \lambda_1), \quad \varepsilon_2 = \operatorname{am}(a'', \lambda_2), \ \ldots\ \varepsilon_\mu = \operatorname{am}(a^{(\mu)}, \lambda_\mu).$$

Ces amplitudes doivent être calculées au moyen des équations

$$\sin(2\psi_1 - \varphi) = k\sin\varphi, \quad \sin(2\psi_2 - \psi_1) = \lambda_1\sin\psi_1, \ \ldots$$
$$\sin(2\psi_\mu - \psi_{\mu-1}) = \lambda_{\mu-1}\sin\psi_{\mu-1},$$
$$\sin(2\varepsilon_1 - \alpha) = k\sin\alpha, \quad \sin(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \lambda_1\sin\varepsilon_1, \ \ldots$$
$$\sin(2\varepsilon_\mu - \varepsilon_{\mu-1}) = \lambda_{\mu-1}\sin\varepsilon_{\mu-1}.$$

Étant parvenu à un module λ_μ, qui ne diffère que très peu de l'unité, on pourra poser $\lambda_\mu = 1$, et par suite

$$\Pi(u^{(\mu)}, a^\mu, \lambda_\mu) = \int_0^{\psi_\mu} \frac{\sin\varepsilon_\mu \cos^2\varepsilon_\mu \sin^2\psi \, \partial\psi}{(1-\sin^2\varepsilon_\mu \sin^2\psi)\cos\psi}.$$

Cette intégrale se reduit à une fonction logarithmique, savoir:

$$(22.) \qquad \sin\varepsilon_\mu \log \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\psi_\mu) - \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin\varepsilon_\mu \sin\psi_\mu}{1-\sin\varepsilon_\mu\sin\psi_\mu}\right).$$

Enfin, pour étendre l'échelle ascendante des modules k, λ_1, λ_2, ... aux fonctions à paramètres circulaires, on changera dans (20) a en ai, a' en $a'i$, ce qui donnera:

$$\frac{1}{i}\Pi(u, ai, k) = \frac{2}{i}\Pi(u', a'i, \lambda_1) - ku \operatorname{tang am}(a, k') + \operatorname{arc tang}[k \operatorname{tang am}(a, k') \sin \operatorname{am}(u, k)],$$

d'où l'on tire la formule

$$(23.) \qquad \frac{1}{i}\Pi(u, ai, k) = \frac{2^\mu}{i}\Pi(u^{(\mu)}, a^{(\mu)} i, \lambda_\mu)$$

$$- u\left[k \operatorname{tang am}(a, k') + \frac{\lambda_1 A_1}{K} \operatorname{tang am}(a', \lambda_1') + \cdots + \frac{\lambda_{\mu-1} A_{\mu-1}}{K} \operatorname{tang am}(a^\mu, \lambda_\mu')\right]$$

$$+ \operatorname{arc tang}[k \operatorname{tang am}(a, k') \sin \operatorname{am}(u, k)] + 2 \operatorname{arc tang}[\lambda_1 \operatorname{tang am}(a', \lambda_1') \sin \operatorname{am}(u', \lambda_1)]$$

$$+ \cdots + 2^{\mu-1} \operatorname{arc tang}[\lambda_{\mu-1} \operatorname{tang am}(a^{(\mu-1)}, \lambda_{\mu-1}') \sin \operatorname{am}(u^{(\mu-1)}, \lambda_{\mu-1})].$$

Pour un λ_μ très peu différent de l'unité, la fonction $\frac{1}{i}\Pi(u^{(\mu)}, a^{(\mu)} i, \lambda_\mu)$ se reduit à

$$\operatorname{tang am}(a^{(\mu)}, \lambda_\mu') \log \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi + \psi_\mu) - \operatorname{arc tang}[\operatorname{tang am}(a^{(\mu)}, \lambda_\mu') \sin\psi_\mu].$$

Donc, faisant, pour abréger, $\operatorname{am}(a, k') = \theta$, $\operatorname{am}(a', \lambda_1') = \theta_1$, $\operatorname{am}(a'', \lambda_2') = \theta_2, \ldots$, on aura:

$$(24.) \qquad \frac{1}{i}\Pi(u, ai, k)$$

$$= 2^\mu \operatorname{tang}\theta_\mu \log \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\psi_\mu) - 2^\mu \operatorname{arc tang}(\operatorname{tang}\theta_\mu \sin\psi_\mu)$$

$$- u\left[k \operatorname{tang}\theta + \frac{\lambda_1 A_1}{K} \operatorname{tang}\theta_1 + \cdots + \frac{\lambda_{\mu-1} A_{\mu-1}}{K} \operatorname{tang}\theta_{\mu-1}\right]$$

$$+ \operatorname{arc tang}(k \operatorname{tang}\theta \sin\varphi) + 2 \operatorname{arc tang}(\lambda_1 \operatorname{tang}\theta_1 \sin\psi_1) + \cdots$$

$$+ 2^{\mu-1} \operatorname{arc tang}(\lambda_{\mu-1} \operatorname{tang}\theta_{\mu-1} \sin\psi_{\mu-1}).$$

Par les formules de transformation de ***Landen*** on a, pour passer de k' à λ_1':

$$A \operatorname{am}(a, k') = \frac{1-\lambda_1' \sin^2 \operatorname{am}(a', \lambda_1')}{1+\lambda_1' \sin^2 \operatorname{am}(a', \lambda_1')},$$

d'où l'on tire

$$\sin \operatorname{am}(a', \lambda_1') = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1'}} \sqrt{\frac{1-\Delta \operatorname{am}(a, k')}{1+\Delta \operatorname{am}(a, k')}};$$

et au moyen de cela, en posant

$$k' \sin\theta = t, \quad \lambda_1' \sin\theta_1 = \sin t_1, \quad \lambda_2' \sin\theta_2 = \sin t_2, \quad \ldots.$$

on aura

$$(25.) \quad \begin{cases} \sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1'}} \operatorname{tang}(\frac{1}{2}t), & \sin t_1 = \sqrt{\lambda_1'} \operatorname{tang}(\frac{1}{2}t), \\ \sin\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2'}} \operatorname{tang}(\frac{1}{2}t_1), & \sin t_2 = \sqrt{\lambda_2'} \operatorname{tang}(\frac{1}{2}t_1), \\ \sin\theta_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_3'}} \operatorname{tang}(\frac{1}{2}t_2), & \sin t_3 = \sqrt{\lambda_3'} \operatorname{tang}(\frac{1}{2}t_2). \end{cases}$$

Ces formules serviront pour calculer les amplitudes $\theta_1, \theta_2, \ldots.$

3.

Avant d'appliquer les formules que nous venons de démontrer, à des exemples numériques, je ferai voir la marche qu'il y aura à suivre pour calculer consécutivement les modules et les autres valeurs qui en dépendent. Cela se fait très simplement au moyen des tables de M. *Zech*, si l'on veut pousser l'approximation seulement jusqu'à la 7me décimale. Ces tables donnent $\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)$ et $\operatorname{Log}\left(\frac{x}{1-x}\right)$ par la valeur connue de $\operatorname{Log}(x)$ pour $x > 1$. Posant $\operatorname{Log}(x) = a$, nous désignerons par $A(a)$ la valeur correspondante de $\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)$, et par $S(a)$ la valeur correspondante de $\operatorname{Log}\left(\frac{x}{x-1}\right)$. On cherchera les $A(a)$ dans les pages sous le titre *Addition*, et les $S(a)$ dans les pages sous le titre *Soustraction*.

Pour l'échelle ascendante des modules on a

$$k, \quad \lambda_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \lambda_2 = \frac{2\sqrt{\lambda_1}}{1+\lambda_1}, \quad \ldots. \quad \lambda_\mu = \frac{2\sqrt{\lambda_{\mu-1}}}{1+\lambda_{\mu-1}};$$

d'où l'on tire:

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) = \operatorname{Log}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{1}{k}\right)}\right] + \tfrac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{1}{k}\right) - \operatorname{Log}(2),$$

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1}{\lambda_\mu}\right) = \operatorname{Log}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_{\mu-1}}\right)}\right] + \tfrac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{1}{\lambda_{\mu-1}}\right) - \operatorname{Log}(2);$$

donc, si l'on fait $\operatorname{Log}\left(\frac{1}{k}\right) = b_0$, $\operatorname{Log}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) = b_1$, $\ldots.$ $\operatorname{Log}\left(\frac{1}{\lambda_\mu}\right) = b_\mu$ dans ces formules, on aura généralement:

$$(26.) \quad b_\mu = A(b_{\mu-1}) + \tfrac{1}{2} b_{\mu-1} - 0{,}3010300.$$

Cette formule s'applique aussi aux modules complémentaires:

$$k,\ h'_1,\ h'_2,\ \ldots.$$

de l'échelle descendante $k, h_1, h_2, \ldots.$; parceque $h'_1 = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$, $h'_\mu = \frac{2\sqrt{h'_{\mu-1}}}{1+h'_{\mu-1}}$.

Ainsi, faisant $\mathrm{Log}\left(\frac{1}{k'}\right) = c_0$, $\mathrm{Log}\left(\frac{1}{h'_\mu}\right) = c_\mu$, nous aurons:

$$(27.) \qquad c_\mu = A(c_{\mu-1}) + \tfrac{1}{2} c_{\mu-1} - 0{,}3010300.$$

Après avoir calculé les valeurs de

$$(28.) \qquad \begin{cases} b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots. \\ c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots. \end{cases}$$

il sera facile de trouver les logarithmes de

$$\frac{1}{\lambda'},\ \frac{1}{\lambda'_2},\ \ldots.$$
$$\frac{1}{h_1},\ \frac{1}{h_2},\ \ldots.$$

Effectivement on a:

$$\lambda'_1 = \frac{1-k}{1+k},\quad \lambda'_\mu = \frac{1-\lambda_{\mu-1}}{1+\lambda_{\mu-1}},\quad h_1 = \frac{1-k'}{1+k'},\quad h_\mu = \frac{1-h'_{\mu-1}}{1+h'_{\mu-1}},$$

ce qui donne

$$d_1 = \mathrm{Log}\left(\frac{1}{\lambda'_1}\right) = \mathrm{Log}(1+k) + \mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-k}\right) = A(b_0) + S(b_0),$$

$$d_\mu = \mathrm{Log}\left(\frac{1}{\lambda'_\mu}\right) = A(b_{\mu-1}) + S(b_{\mu-1}),$$

$$f_1 = \mathrm{Log}\left(\frac{1}{h_1}\right) = A(c_0) + S(c_0),$$

$$f_\mu = \mathrm{Log}\left(\frac{1}{h_\mu}\right) = A(c_{\mu-1}) + S(c_{\mu-1}).$$

On pourra encore trouver ces valeurs au moyen des formules

$$(29.) \qquad \begin{cases} d_\mu = 2A(b_{\mu-1}) + 2d_{\mu-1}, \\ f_\mu = 2A(c_{\mu-1}) + 2f_{\mu-1}, \end{cases}$$

tirées des formules

$$\lambda'_\mu = \frac{\lambda'^2_{\mu-1}}{(1+\lambda_{\mu-1})^2}, \qquad h_\mu = \frac{h^2_{\mu-1}}{(1+h'_{\mu-1})^2}.$$

Pour calculer les arguments complets:

$$K = \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{h'_1 h'_2 h'_3 \ldots.}{k'}}, \qquad K' = \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots.}{k}},$$

on aura

$$\text{Log}\left(\frac{2K}{\pi}\right) = \tfrac{1}{2}\left[\text{Log}\left(\frac{1}{k'}\right) - \text{Log}\left(\frac{1}{k'_1}\right) - \text{Log}\left(\frac{1}{k'_2}\right) - \cdots\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}(c_0 - c_1 - c_2 - c_3 - \cdots)$$

$$\text{Log}\left(\frac{2K'}{\pi}\right) = \tfrac{1}{2}(b_0 - b_1 - b_2 - b_3 - \cdots).$$

Les valeurs (27) serviront aussi pour trouver les logarithmes des rapports $\frac{H_1}{K}$, $\frac{H_2}{K}$, $\frac{H_3}{K}$, ... $\frac{\Delta_1}{K}$, $\frac{\Delta_2}{K}$, $\frac{\Delta_3}{K}$, ... qui seront nécessaires à l'application des formules (9, 14, 15, 18, 19, 21, 24). Les relations $\frac{H_1}{K} = \frac{1}{1+h'_1} = \frac{\sqrt{k'}}{h'_1}$, $\frac{H_2}{H_1} = \frac{\sqrt{h'_1}}{h'_2}$, ... $\frac{\Delta_1}{K} = 1 + k$, $\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 1 + \lambda_1$, ..., donnent:

$$(29_1.) \quad \begin{cases} \text{Log}\left(\frac{H_1}{K}\right) = c_1 - \frac{1}{2}c_0, \\ \text{Log}\left(\frac{H_2}{K}\right) = c_2 + \frac{1}{2}(c_1 - c_0), \\ \text{Log}\left(\frac{H_3}{K}\right) = c_3 + \frac{1}{2}(c_2 + c_1 - c_0), \end{cases}$$

$$(30.) \quad \begin{cases} \text{Log}\left(\frac{\Delta_1}{K}\right) = A(b_0), \quad \text{Log}\left(\frac{\Delta_2}{K}\right) = A(b_0) + A(b_1), \\ \text{Log}\left(\frac{\Delta_3}{K}\right) = A(b_0) + A(b_1) + A(b_2), \quad .... \end{cases}$$

Pour appliquer les formules (14 et 15), on calculera les valeurs de $\text{tang}\,\theta'$, $\text{tang}\,\theta''$, ... $\text{tang}\,\theta^{(\mu)}$. Or par la première des formules (17) eu égard à

$$c_1 = \text{Log}\left(\frac{1}{k'}\right), \quad c_1 = \left(\frac{1}{k'_1}\right), \quad \Delta(\theta, k') = \sqrt{(1 - k'^2 \sin^2\theta)} = \frac{\sqrt{(1 + k'^2 \text{tang}^2\theta)}}{\sqrt{(1 + \text{tang}^2\theta)}},$$

on aura

$$(31.) \quad \text{Log}\,\text{tang}\,\theta'$$

$$= \text{Log}\,(2\,\text{tang}\,\theta) + c_1 + \tfrac{1}{2}\left\{A\left(\text{Log}\frac{1}{\text{tang}^2\theta}\right) - A\left(\text{Log}\frac{1}{k^2\,\text{tang}^2\theta}\right) - c_0\right\};$$

et lorsque $\text{tang}^2\theta > 1$ ou $k^2\,\text{tang}^2\theta > 1$, il y aura à remplacer $A\left(\text{Log}\frac{1}{\text{tang}^2\theta}\right)$ et $A\left(\text{Log}\frac{1}{k^2\,\text{tang}^2\theta}\right)$ par

$$\text{Log}\,\text{tang}^2\theta + A(\text{Log}\,\text{tang}^2\theta), \qquad \text{Log}\,(k^2\,\text{tang}^2\theta) + A(\text{Log}\,k^2\,\text{tang}^2\theta).$$

Changeant dans (31) k' consécutivement en h'_1, h'_2, ... θ en θ', θ'', ... on trouvera les formules pour calculer $\text{Log}\,\text{tang}\,\theta''$, $\text{Log}\,\text{tang}\,\theta'''$, ...

Exemple 1.

Soit proposé de calculer la valeur de la fonction $\Pi(u, ai, k)$ pour $k = \sin 36^0$, $\operatorname{am}(u) = 25^0 = \varphi$, $\operatorname{am}(a) = 48^0 = \alpha^2$.

On a

$$\operatorname{Log} k = 9{,}7692187, \qquad \operatorname{Log} k' = \operatorname{Log}\cos 36^0 = 9{,}9079576,$$

$$c_0 = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{k'}\right) = 0{,}0920424,$$

et au moyen de la formule (27) on trouvera:

$$\begin{array}{rr} A(c_0) = & 0{,}2574426 \\ \frac{1}{2}c_0 = & 0{,}0460212 \\ \operatorname{Log} 2 = & \underline{0{,}3010301\,(-)} \\ c_1 = & 0{,}0024338 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} A(c_1) = & 0{,}2998148 \\ \frac{1}{2}c_1 = & 0{,}0012169 \\ & \underline{0{,}3010300\,(-)} \\ c_2 = & 0{,}0000017 \end{array} \qquad c_3 = 0.$$

En fait, on calculera les amplitudes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ au moyen des formules

$$\operatorname{tang}(\gamma_1 - \varphi) = k' \operatorname{tang}\varphi, \qquad \operatorname{tang}(\gamma_2 - \gamma_1) = k_1' \operatorname{tang}\gamma_1, \ \ldots.$$
$$\operatorname{tang}(\alpha_1 - \alpha) = k' \operatorname{tang}\alpha, \qquad \operatorname{tang}(\alpha_2 - \alpha_1) = k_1' \operatorname{tang}\alpha_1, \ \ldots.$$

$$\begin{array}{rr} \operatorname{Log}\operatorname{tang}\varphi = & 9{,}6686725 \\ \operatorname{Log} k' = & \underline{9{,}9079576} \\ \operatorname{Log}\operatorname{tang}(\gamma_1 - \varphi) = & 9{,}5766301 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} \operatorname{Log}\operatorname{tang}\gamma_1 = & 0{,}0101431 \\ c_1 = & \underline{0{,}0024338\,(-)} \\ \operatorname{Log}\operatorname{tang}(\gamma_2 - \gamma_1) = & 0{,}0077093 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \gamma_1 - \varphi = & 20^0\ 40'\ 8{,}48'' \\ \gamma_1 = & 45^0\ 40'\ 8{,}48'' \end{array} \qquad \begin{array}{rr} \gamma_2 - \gamma_1 = & 45^0\ 30'\ 30{,}64'' \\ \gamma_2 = & 91^0\ 10'\ 39{,}12'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \operatorname{Log}(-\operatorname{tang}\gamma_2) = & 1{,}6870883 \\ \varepsilon_2 = & \underline{0{,}0000017\,(-)} \\ \operatorname{Log}[-\operatorname{tang}(\gamma_3 - \gamma_2)] = & 1{,}6870866 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \gamma_3 - \gamma_2 = & 91^0\ 10'\ 39{,}14'' \\ \gamma_3 = & 182^0\ 21'\ 18{,}26'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \operatorname{Log}\operatorname{tang}\alpha = & 0{,}2042108 \\ \operatorname{Log} k' = & \underline{9{,}9079576} \\ \operatorname{Log}\operatorname{tang}(\alpha_1 - \alpha) = & 0{,}1121684 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} \operatorname{Log}(-\operatorname{tang}\alpha_1) = & 0{,}4314791 \\ c_1 = & \underline{0{,}0024338\,(-)} \\ \operatorname{Log}[-\operatorname{tang}(\alpha_2 - \alpha_1)] = & 0{,}4290453 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \alpha_1 - \alpha = & 52^0\ 19'\ 5{,}46'' \\ \alpha_1 = & 110^0\ 19'\ 5{,}46'' \end{array} \qquad \begin{array}{rr} \alpha_2 - \alpha_1 = & 110^0\ 25'\ 22{,}76'' \\ \alpha_2 = & 220^0\ 44'\ 28{,}22'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \operatorname{Log}\operatorname{tang}\alpha_2 = & 9{,}9351981 \\ c_2 = & \underline{0{,}0000017\,(-)} \\ \operatorname{Log}\operatorname{tang}(\alpha_3 - \alpha_2) = & 9{,}9351964 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \alpha_3 - \alpha_2 = & 220^0\ 44'\ 27{,}81'' \\ \alpha = & 441^0\ 28'\ 56{,}03''. \end{array}$$

En vertu de $c_3 = 0$, on a $h_3 = 0$, $u = \frac{2K}{\pi} \cdot (\frac{1}{8}\gamma_3)$, donc

$$\tfrac{1}{8}\gamma_3 = 22^0\,47'\,39{,}78'' = \left(\frac{\pi u}{2K}\right)''.$$

Les valeurs trouvées de c_0, c_1, c_2 donnent:

$$\mathrm{Log}\left(\frac{2K}{\pi}\right) = \tfrac{1}{2}(c_0 - c_1 - c_2) = 0{,}0448035, \quad \mathrm{Log}\left(\frac{\pi u}{2K}\right) = 9{,}5997052$$

$$\mathrm{Log}\left(\frac{H_1}{K}\right) = c_1 - \tfrac{1}{2}c_0 = 9{,}9564126, \qquad \mathrm{Log}\left(\frac{2K}{\pi}\right) = 0{,}0448035$$

$$\mathrm{Log}(u) = 9{,}6445087$$

$$\mathrm{Log}\left(\frac{H_2}{K}\right) = c_2 + \tfrac{1}{2}(c_1 - c_0) = 9{,}9551974, \quad \mathrm{Log}\left(\frac{H_3}{K}\right) = \tfrac{1}{2}(c_2 + c_1 - c_0) = 9{,}9551966.$$

Au moyen de la formule (29) $f_\mu = 2A(c_{\mu-1}) + 2f_{\mu-1}$ on trouvera:

$A(c_0) = 0{,}2574426$	$A(c_1) = 0{,}2998148$	$A(c_2) = 0{,}3010295$
$f_0 = \mathrm{Log}\left(\frac{1}{k}\right) = 0{,}2307813$	$f_1 = 0{,}9764478$	$f_2 = 2{,}5525252$
$\frac{1}{2}f_1 = 0{,}4882239$	$\frac{1}{2}f_2 = 1{,}2762626$	$\frac{1}{2}f_2 = 2{,}8535547$
$f_1 = 0{,}9764478$	$f_2 = 2{,}5525252$	$f_3 = 5{,}7071094$
$\mathrm{Log}\, h_1 = 9{,}0235522$	$\mathrm{Log}\, h_2 = 7{,}4474748$	$\mathrm{Log}\, h_3 = 4{,}2928906$

Quant aux termes de la partie algébrique de la formule (9), on trouvera:

$\mathrm{Log}\sin\alpha_1 = 9{,}9721003$	$\mathrm{Log}(-\sin\alpha_2) = 9{,}814676$	$\mathrm{Log}\sin\alpha_3 = 9{,}9952$
$\mathrm{Log}\frac{H_1}{K} = 9{,}9564126$	$\mathrm{Log}\frac{H_2}{K} = 9{,}955197$	$\mathrm{Log}\frac{H_3}{K} = 9{,}9552$
$\mathrm{Log}\, h_1 = 9{,}0235522$	$\mathrm{Log}\, h_2 = 7{,}447475$	$\mathrm{Log}\, h_3 = 4{,}2929$
$\mathrm{Log}\, u = 9{,}6445087$	$\mathrm{Log}\, u = 9{,}644509$	$\mathrm{Log}\, u = 9{,}6445$
$8{,}5965738$	$6{,}861857$	$3{,}8888$

$$\frac{uH_1h_1}{K}\sin\alpha_1 = 0{,}03949797 \qquad \frac{uH_2h_2}{K}\sin\alpha_2 = -0{,}00072754$$

$$\frac{uH_3h_3}{K}\sin\alpha_3 = 0{,}00000077$$

$$\frac{uH_1h_1}{K}\sin\alpha_1 + \frac{uH_2h_2}{K}\sin\alpha_2 + \frac{uH_3h_3}{K}\sin\alpha_3 = 0{,}03877120.$$

Pour calculer la partie logarithmique de la formule (9), il faut chercher les valeurs $p_1 = h_1 \sin\alpha_1 \sin\gamma_1$, $p_2 = -h_2 \sin\alpha_2 \sin\gamma_2$, $p_3 = -h_3 \sin\alpha_3 \sin\gamma_3$.

$\mathrm{Log}\, h_1 \sin\alpha_1 = 8{,}9956525$	$\mathrm{Log}(h_2 \sin\alpha_2) = 7{,}262151$	$\mathrm{Log}\, h_3 \sin\alpha_3 = 4{,}2881$
$\mathrm{Log}\sin\gamma_1 = 9{,}8544974$	$\mathrm{Log}\sin\gamma_2 = 9{,}999908$	$\mathrm{Log}(-\sin\gamma_3) = 8{,}6138$
$\mathrm{Log}\, p_1 = 8{,}8501499$	$\mathrm{Log}\, p_2 = 7{,}262059$	$\mathrm{Log}\, p_3\, 2{,}9019$

Vu la petitesse de p_1, p_1, p_3, on aura

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1+h_1 \sin\alpha_1 \sin\gamma_1}{1-h_1 \sin\alpha_1 \sin\gamma_1}\right) = +2(p_1+\tfrac{1}{3}p_1^3+\tfrac{1}{5}p_1^5),$$

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1+h_2 \sin\alpha_2 \sin\gamma_2}{1-h_2 \sin\alpha_2 \sin\gamma_2}\right) = -2p_2, \qquad \operatorname{Log}\left(\frac{1+h_3 \sin\alpha_3 \sin\gamma_3}{1-h_3 \sin\alpha_3 \sin\gamma_3}\right) = -2p_3.$$

Or

$$\begin{aligned} p_1 &= 0{,}07081902 \qquad p_2 = 0{,}00182850 \qquad p_3 = 0{,}00000008 \\ \tfrac{1}{3}p_1^3 &= 0{,}00011839 \\ \tfrac{1}{5}p_1^5 &= \underline{0{,}00000071} \\ & \quad 0{,}07093812 \\ 2(p_1+\tfrac{1}{3}p_1^3+\tfrac{1}{5}p_1^5) &= 0{,}14187624 \end{aligned}$$

Ainsi la partie logarithmique aura pour valeur:

$$\tfrac{1}{4}\{2(p_1+\tfrac{1}{3}p_1^3+\tfrac{1}{5}p_1^5)-p_2-\tfrac{1}{2}p_3\} = 0{,}03501192.$$

Donc

$$\Pi(u, a, k) = 0{,}00375928.$$

Exemple 2.

Pour vérifier le resultat de l'exemple précédent, calculons la même fonction au moyen de la formule (21).

Calcul des valeurs: b_1, b_2, ... au moyen de la formule (26):

$$b_0 = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{k}\right) = 0{,}2307813.$$

$A(b_0) = 0{,}2007917$	$A(b_1) = 0{,}2935199$	$A(b_2) = 0{,}3009970$
$\frac{1}{2}b_0 = 0{,}1153906$	$\frac{1}{2}b_1 = 0{,}0075762$	$\frac{1}{2}b_2 = 0{,}0000330$
$\operatorname{Log} 2 = \underline{0{,}3010300}$	$\underline{0{,}3010300}$	$\underline{0{,}3010300}$
$b_1 = \overline{0{,}0151523}$	$\overline{0{,}0000661}$	$b_3 = \overline{0{,}0000000}$
$\operatorname{Log}\lambda_1 = 9{,}9848477$	$\operatorname{Log}\lambda_2 = 9{,}9999339$	$\operatorname{Log}\lambda_3 = 10$

Calcul des amplitudes: ψ_1, ψ_2, ψ_3, ..., ε_1, ε_2, ... au moyen des équations

$$\sin(2\psi_1-\varphi) = k\sin\varphi, \qquad \sin(2\psi_2-\psi_1) = \lambda_1\sin\psi_1, \qquad \sin(2\psi_3-\psi_2) = \lambda_2\sin\psi_2,$$

$$\sin(2\varepsilon_1-\alpha) = k\sin\alpha, \qquad \sin(2\varepsilon_2-\varepsilon_1) = \lambda_1\sin\varepsilon_1, \qquad \sin(2\varepsilon_3-\varepsilon_2) = \lambda_2\sin\varepsilon_2.$$

$\operatorname{Log}\sin\varphi = 9{,}6259483$	$\operatorname{Log}\sin\psi_1 = 9{,}5275766$	$\operatorname{Log}\sin\psi_2 = 9{,}5200747$
$\operatorname{Log} k = \underline{9{,}7692187}$	$\operatorname{Log}\lambda_1 = \underline{9{,}9848477}$	$\operatorname{Log}\lambda_2 = \underline{9{,}9999339}$
$\overline{9{,}3951670}$	$\overline{9{,}5124243}$	$\overline{9{,}5200086}$
$2\psi_1-\varphi = 14^0 23' \ 0{,}15''$	$2\psi_2-\psi_1 = 18^0 59' 24{,}43''$	$2\psi_3-\psi_2 = 19^0 20' 21{,}74''$
$\psi_1 = 19^0 41' 30{,}07''$	$\psi_2 = 19^0 20' 27{,}25''$	$\psi_3 = 19^0 20' 21{,}74''$

$$\begin{aligned}\text{Log}\sin\alpha &= 9{,}9284205\\ \text{Log}\,k &= \underline{9{,}7692187}\\ &\quad 9{,}6976392\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\text{Log}\sin\varepsilon_1 &= 9{,}8413739\\ \text{Log}\,\lambda_1 &= \underline{9{,}9848477}\\ &\quad 9{,}8262216\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\text{Log}\sin\varepsilon_2 &= 9{,}8339213\\ \text{Log}\,\lambda_2 &= \underline{9{,}9999339}\\ &\quad 9{,}8338552\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\varepsilon_1-\alpha &= 39^0\,53'\,55{,}83''\\ \varepsilon_1 &= 43^0\,56'\,57{,}92''\end{aligned}\qquad\begin{aligned}2\varepsilon_2-\varepsilon_1 &= 42^0\,5'\,4{,}37''\\ \varepsilon_2 &= 43^0\,1'\,1{,}15''\end{aligned}\qquad\begin{aligned}2\varepsilon_3-\varepsilon_2 &= 43^0\,0'\,31{,}83''\\ \varepsilon_3 &= 43^0\,0'\,46{,}49''\end{aligned}$$

Pour calculer l'argument u, on se servira de la formule

$$u = \sqrt{\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots.}{k}}\cdot\log\text{tang}\,(45^0+\tfrac{1}{2}\psi_3).$$

Or

$$45^0+\tfrac{1}{2}\psi_3 = 54^0\,40'\,10{,}87'',\qquad \text{Log tang}\,(45^0+\tfrac{1}{2}\psi_3) = 0{,}1494554,$$

$$\begin{aligned}\text{Log Log tang}\,(45^0+\tfrac{1}{2}\psi_3) &= 9{,}1745117\\ \text{Log}\,(\log 10) &= \underline{0{,}3622157}\\ \text{Log}\,[\log(45^0+\tfrac{1}{2}\psi_3)] &= 9{,}5367274\\ &\quad \underline{0{,}1077814}\\ \text{Log}\,(u) &= 9{,}6445088.\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\text{Log}\sqrt{\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots.}{k}} &= \tfrac{1}{2}(b_0-b_1-b_2)\\ &= 0{,}1077814\end{aligned}$$

Les formules (30) donnent:

$$\text{Log}\left(\frac{A_1}{K}\right) = A(b_0) = 0{,}2007917\qquad \text{Log}\left(\frac{A_2}{K}\right) = A(b_0)+A(b_1) = 0{,}4943116.$$

Après cela on trouve:

$$\begin{aligned}\text{Log}\,(uk\sin\alpha) &= 9{,}3421480\\ \text{Log}\left(u\frac{A_1\lambda_1}{K}\sin\varepsilon_1\right) &= 9{,}6715221\\ \text{Log}\left(u\frac{A_2\lambda_2}{K}\sin\varepsilon_2\right) &= 9{,}9726756\\ \text{Valeur de la partie algébrique} &= \underline{1{,}6282600}\end{aligned}\qquad\begin{aligned}uk\sin\alpha &= 0{,}2198609\\ u\frac{A_1\lambda_1}{K}\sin\varepsilon_1 &= 0{,}4693774\\ u\frac{A_2\lambda_2}{K}\sin\varepsilon_2 &= \underline{0{,}9390217}\end{aligned}$$

La partie logarithmique de la formule (21), y compris $\Pi(u^{(\mu)}, a^{(\mu)}, \lambda_\mu)$, peut être mise sous la forme

$$\log(10).\{\tfrac{1}{2}[A(p_0)+S(p_0)]+A(p_1)+S(p_1)+2[A(p_2)+S(p_2)]-4[A(p_3)+S(p_3)]\}$$
$$+8\sin\varepsilon_3\log\text{tang}\,(45^0+\tfrac{1}{2}\psi_3),$$

où

$$p_0 = -\text{Log}\,(k\sin\varphi\sin\alpha),\quad p_1 = -\text{Log}\,(\lambda_1\sin\varepsilon_1\sin\psi_1),\quad p_2 = -\text{Log}\,(\lambda_2\sin\varepsilon_2\sin\psi_2)$$
$$p_3 = -\text{Log}\,(\sin\varepsilon_3\sin\psi_3).$$

On aura:

$$p_0 = 0{,}6764125, \quad p_1 = 0{,}6462018, \quad p_2 = 0{,}6460701, \quad p_3 = 0{,}6460702,$$

$$A(p_0) = 0{,}0830231 \qquad A(p_1) = 0{,}0884333 \qquad A(p_2) = 0{,}0884576 = A(p_3)$$

$$S(p_0) = \underline{0{,}1027373} \qquad S(p_1) = \underline{0{,}1111685} \qquad S(p_2) = \underline{0{,}1112069} = S(p_3)$$

$$0{,}1857604 \qquad 0{,}1996018 \qquad 0{,}1996645$$

$$\tfrac{1}{2}[A(p_0)+S(p_0)]+A(p_1)+S(p_1)+2[A(p_2)+S(p_2)]-4[A(p_3)+S(p_3)] = -0{,}1068470$$

ce qui, étant multiplié par le module $\log(10)$, revient à $-0{,}2460243$;

$$\operatorname{Log}[\log\operatorname{tang}(45^0+\tfrac{1}{2}\psi_3)] = 9{,}5367274$$

$$\operatorname{Log}\sin\varepsilon_3 = 9{,}8338882 \qquad 8\sin\varepsilon_3\log\operatorname{tang}(45^0+\tfrac{1}{2}\psi_3) = 1{,}8780433$$

$$\operatorname{Log} 8 = \underline{0{,}9030900}$$

$$0{,}2737056$$

Donc

$$\Pi(u, a, k) = 1{,}8780433 - 0{,}2460243 - 1{,}6282600 = 0{,}0037590.$$

Exemple 3.

Soit proposé encore de calculer les valeurs des fonctions à paramètres circulaires

$$\frac{1}{i}\Pi(u, ai, k), \qquad \frac{1}{i}\Pi(u, ai+K, k)$$

pour $k = \sin 36^0$, $\operatorname{am}(a, k') = \theta = 42^0$, $\operatorname{am}(u, k) = 25^0$.

Les paramètres de ces fonctions se presentent sous la forme

$$-k^2\operatorname{tang}^2\operatorname{am}(a, k') = -k^2\operatorname{tang}^2\theta, \qquad -1+k'^2\sin^2\operatorname{coam}(a, k') = -\frac{k^2}{[\Delta(\theta, k')]^2}.$$

Comme le module k et l'amplitude de l'argument $\operatorname{am}(u, k)$ sont les mêmes que dans les exemples précédents, et comme les valeurs de

$$c_0, c_1, c_2, \ldots. \; h_1, h_2, \ldots. \; \frac{H_1}{K}, \frac{H_2}{K}, \ldots. \; \sin\gamma_1, \sin\gamma_2, \ldots.$$

sont déjà connues, il ne reste qu'à chercher les tangentes $\operatorname{tang}\theta'$, $\operatorname{tang}\theta''$, $\operatorname{tang}\theta'''$, ... si l'on veut se servir des formules (18 et 19).

Calcul de $\operatorname{tang}\theta'$ au moyen de la formule (31):

$$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\theta = 9{,}9544374$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{cot}\theta = 0{,}0455626 \qquad A\left(\operatorname{Log}\frac{1}{\operatorname{tang}^2\theta}\right) = 0{,}2578530$$

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1}{\operatorname{tang}^2\theta}\right) = \operatorname{Log}\operatorname{cot}^2\theta = 0{,}0911252 \qquad A\left(\operatorname{Log}\frac{1}{k^2\operatorname{tang}^2\theta}\right) = 0{,}1072437\,(-)$$

$$\operatorname{Log}\frac{1}{k^2} = 0{,}4615626 \qquad c_0 = 0{,}0920424\,(-)$$

$$0{,}0585669$$

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1}{k^2\operatorname{tang}^2\theta}\right) = 0{,}5526878$$

$$0{,}0292834 = \tfrac{1}{2}\left[A\operatorname{Log}\left(\frac{1}{\operatorname{tang}^2\theta}\right) - A\operatorname{Log}\left(\frac{1}{k^2\operatorname{tang}^2\theta}\right) - c_0\right]$$

$$\operatorname{Log}2\operatorname{tang}\theta = 0{,}2554674$$

$$c_1 = 0{,}0024338$$

$$0{,}0292834$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\theta' = 0{,}2871846$$

Changeant θ en θ' et θ' en θ'' dans la formule (31), on aura

$$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\theta'' = \operatorname{Log}(2\operatorname{tang}^2\theta') + c_2 + \tfrac{1}{2}\left[A(\operatorname{Log}\operatorname{tang}^2\theta') - A\operatorname{Log}\left(\frac{1}{h_1^2\operatorname{tang}^2\theta'}\right) - c_1\right],$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{tang}^2\theta' = 0{,}5743692 \qquad A\operatorname{Log}\operatorname{tang}^2\theta' = 0{,}1025912$$

$$\operatorname{Log}h_1^2 = 8{,}0471044 \qquad A\operatorname{Log}\frac{1}{h_1^2\operatorname{tang}^2\theta'} = 0{,}0177962\,(-)$$

$$8{,}6214736 \qquad c_1 = 0{,}0024338\,(-)$$

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1}{h_1^2\operatorname{tang}^2\theta'}\right) = 1{,}3785264 \qquad 0{,}0823612$$

$$\tfrac{1}{2}\left[A(\operatorname{Log}\operatorname{tang}^2\theta') - A\left(\operatorname{Log}\frac{1}{h_1^2\operatorname{tang}^2\theta'}\right) - c_1\right] = 0{,}0411806$$

$$\operatorname{Log}(2\operatorname{tang}^2\theta') = 0{,}8753992$$

$$c_2 = 0{,}0000017$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\theta'' = 0{,}9165815.$$

De même

$$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\theta''' = \operatorname{Log}(2\operatorname{tang}^2\theta'') + \tfrac{1}{2}\left[A(\operatorname{Log}\operatorname{tang}^2\theta'') - A\left(\operatorname{Log}\frac{1}{h_1^2\operatorname{tang}^2\theta''}\right) - c_2\right],$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{tang}^2\theta'' = 1{,}8331630 \qquad A(\operatorname{Log}\operatorname{tang}^2\theta'') = 0{,}0063307$$

$$\operatorname{Log}h_2^2 = 5{,}8949496 \qquad A\left(\operatorname{Log}\frac{1}{h_2^2\operatorname{tang}^2\theta''}\right) = 0{,}0002320\,(-)$$

$$6{,}7281126 \qquad c_2 = 0{,}0000017\,(-)$$

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1}{h_2^2\operatorname{tang}^2\theta''}\right) = 3{,}2718874 \qquad 0{,}0060970$$

$$\tfrac{1}{2}\left[A(\operatorname{Log}\operatorname{tang}^2\theta'') - A\left(\operatorname{Log}\frac{1}{h_2^2\operatorname{tang}^2\theta''}\right) - c_2\right] = 0{,}0030485$$

$$\operatorname{Log}2\operatorname{tang}^2\theta'' = 2{,}1341930$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\theta''' = 2{,}1372415$$

Cela fait, on trouve:

$$\text{Log}\left(\frac{h_1 H_1 u}{K}\right) = 8{,}6244735 \qquad \text{Log}\left(\frac{h_2 H_2 u}{K}\right) = 7{,}0471809$$
$$\text{Log tang}\,\theta' = \underline{0{,}2871846} \qquad \text{Log tang}\,\theta'' = \underline{0{,}9165815}$$
$$8{,}9116581 \qquad 7{,}9637624$$
$$\frac{h_1 H_1 u}{K}\text{tang}\,\theta' = 0{,}08159398 \qquad \frac{h_2 H_2 u}{K}\text{tang}\,\theta'' = 0{,}00919942$$

$$\text{Log}\,\frac{h_3 H_3 u}{K} = 3{,}8925959$$
$$\text{Log tang}\,\theta''' = \underline{2{,}1372415}$$
$$6{,}0298374$$
$$\frac{h_3 H_3 u}{K}\text{tang}\,\theta''' = 0{,}00010705$$

$$\frac{h_1 H_1 u}{K}\text{tang}\,\theta' + \frac{h_2 H_2 u}{K}\text{tang}\,\theta'' + \frac{h_3 H_3 u}{K}\text{tang}\,\theta''' = \quad 0{,}09090045,$$

partie algébrique de (18);

$$-\frac{h_1 H_1 u}{K}\text{tang}\,\theta' + \frac{h_2 H_2 u}{K}\text{tang}\,\theta'' + \frac{h_3 H_3 u}{K}\text{tang}\,\theta''' = -0{,}07228751,$$

partie algébrique de (19);

$\text{Log}h_1 = 9{,}0235522$	$\text{Log}h_2 = 7{,}4474748$	$\text{Log}h_3 = 4{,}2928906$
$\text{Log tang}\theta' = 0{,}2871846$	$\text{Log tang}\theta'' = 0{,}9165815$	$\text{Log tang}\,\theta''' = 2{,}1372415$
$\text{Log sin}\gamma_1 = \underline{9{,}8544974}$	$\text{Log sin}\gamma_2 = \underline{9{,}9999083}$	$\text{Log}(-\text{sin}\gamma_3) = \underline{8{,}6137593}$
$9{,}1652342$	$8{,}3639646$	$5{,}0438914$

$\frac{1}{2}\text{arc tang}(h_1 \text{tang}\,\theta' \ \text{sin}\gamma_1) = \quad 0{,}07263306$ $\qquad \Pi(u, ai, k) = \quad 0{,}01248986$

$\frac{1}{4}\text{arc tang}(h_2 \text{tang}\,\theta'' \text{sin}\gamma_2) = \quad 0{,}00577891$ $\qquad \Pi(u, ai + K, k) = -0{,}00543198$

$\frac{1}{8}\text{arc tang}(h_3 \text{tang}\,\theta''' \text{sin}\gamma_3) = -0{,}00000138$

Exemple 4.

Calcul de la fonction $\Pi(u, ai, k)$ de l'exemple précédent, au moyen de la formule (24).

Type du calcul des valeurs ∂_μ, au moyen de la formule (29):

$$\partial_\mu = 2[A(b_{\mu-1}) + \partial_{\mu-1}],$$

$A(b_0) = 0{,}2007917$	$A(b_1) = 0{,}2935199$	$A(b_2) = 0{,}3009970$
$\text{Log}\left(\frac{1}{k'}\right) = \partial_0 = \underline{0{,}0920424}$	$\partial_1 = \underline{0{,}5856682}$	$\partial_2 = \underline{1{,}7583762}$
$\frac{1}{2}\partial_1 = 0{,}2928341$	$\frac{1}{2}\partial_2 = 0{,}8791881$	$\frac{1}{2}\partial_3 = 2{,}0593732$
$\partial_1 = 0{,}5856682$	$\partial_2 = 1{,}7583762$	$\partial_3 = 4{,}1187464$

Type du calcul de $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ au moyen des formules (25):

$$\begin{aligned} \text{Log sin}\,\theta &= 9{,}8255109 \\ \text{Log}\,k' &= \underline{9{,}9079576} \\ \text{Log sin}\,(t) &= 9{,}7334685 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{Log tang}\,(\tfrac{1}{2}t) &= 9{,}4684604 \\ \tfrac{1}{2}\partial_1 &= \underline{0{,}2928341} \\ \text{Log sin}\,\theta_1 &= 9{,}7612945 \\ \text{Log sin}\,t_1 &= 9{,}1756263 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= 32^0\,46'\,29{,}154'' \\ \tfrac{1}{2}t &= 16^0\,23'\,14{,}577'' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} t_1 &= 8^0\,37'\,3{,}453'' \\ \tfrac{1}{2}t_1 &= 4^0\,18'\,31{,}726'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Log tang}\,(\tfrac{1}{2}t_1) &= 8{,}8770546 \\ \tfrac{1}{2}\partial_2 &= \underline{0{,}8791881} \\ \text{Log sin}\,\theta_2 &= 9{,}7562427 \\ \text{Log sin}\,t_2 &= 7{,}9978665 \\ t_2 &= 0^0\,34'\,12{,}574'' \\ \tfrac{1}{2}t_2 &= 0^0\,17'\,6{,}287'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Log tang}\,(\tfrac{1}{2}t_2) &= 7{,}6968419 \\ \tfrac{1}{2}\partial_3 &= \underline{2{,}0593732} \\ \text{Log sin}\,\theta_3 &= 9{,}6562151 \end{aligned}$$

Calcul de la partie algébrique de la formule (24):

$$\begin{aligned} \text{Log tang}\,\theta &= 9{,}9544374 \\ \text{Log}\,k &= 9{,}7692187 \\ \text{Log}\,u &= \underline{9{,}6445088} \\ & 9{,}3681649 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{Log tang}\,\theta_1 &= 9{,}8492678 \\ \text{Log}\,\lambda_1 &= 9{,}9848477 \\ \text{Log}\left(\frac{\Delta_1}{K}\right) &= 0{,}2007917 \\ \text{Log}\,u &= \underline{9{,}6445088} \\ & 9{,}6794160 \end{aligned}$$

$$uk\,\text{tang}\,\theta = 0{,}2334344 \qquad \frac{u\lambda_1\Delta_1}{K}\,\text{tang}\,\theta_1 = 0{,}4779869$$

$$\begin{aligned} \text{Log tang}\,\theta_2 &= 9{,}8417359 \\ \text{Log}\,\lambda_2 &= 9{,}9999339 \\ \text{Log}\,\frac{\Delta_2}{K} &= 0{,}4943113 \\ \text{Log}\,u &= \underline{9{,}6445088} \\ & 9{,}9804899 \end{aligned}$$

$$\frac{u\lambda_2\Delta_2}{K}\,\text{tang}\,\theta_2 = 0{,}9560705$$

$$uk\,\text{tang}\,\theta + u\frac{\lambda_1\Delta_1}{K}\,\text{tang}\,\theta_1 + u\frac{\lambda_2\Delta_2}{K}\,\text{tang}\,\theta_2 = 1{,}6674918.$$

Calcul de la partie logarithmique et de la partie circulaire:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}(k\operatorname{tang}\theta) &= 9{,}7236561 \\
\operatorname{Log}\sin\varphi &= 9{,}6259483 \\
\operatorname{Log}(k\operatorname{tang}\theta\sin\varphi) &= 9{,}3496044 \\
\operatorname{arc\,tang}(k\operatorname{tang}\theta\sin\varphi) &= 12^0\,36'\,27{,}859
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}(\lambda_1\operatorname{tang}\theta_1) &= 9{,}8341155 \\
\operatorname{Log}\sin\psi_1 &= 9{,}5275766 \\
\operatorname{Log}(\lambda_1\operatorname{tang}\theta_1\sin\psi_1) &= 9{,}3616921 \\
\operatorname{arc\,tang}(\lambda_1\operatorname{tang}\theta_1\sin\psi_1) &= 12^0\,57'\,6{,}247''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}(\lambda_2\operatorname{tang}\theta_2) &= 9{,}8416698 \\
\operatorname{Log}\sin\psi_2 &= 9{,}5200747 \\
\operatorname{Log}(\lambda_2\operatorname{tang}\theta_2\sin\psi_2) &= 9{,}3617445 \\
\operatorname{arc\,tang}(\lambda_2\operatorname{tang}\theta_2\sin\psi_2) &= 12^0\,57'\,11{,}670''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}\operatorname{tang}\theta_3 &= 9{,}8416950 \\
\operatorname{Log}\sin\psi_3 &= 9{,}5200416 \\
\operatorname{Log}(\operatorname{tang}\theta_3\sin\psi_3) &= 9{,}3617366 \\
\operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang}\theta_2\sin\psi_3) &= 12^0\,57'\,10{,}864''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}\operatorname{tang}\theta_3 &= 9{,}8416950 \\
\operatorname{Log}\operatorname{log}\operatorname{tang}(45^0+\tfrac{1}{2}\psi_3) &= 9{,}5367274 \\
\operatorname{Log}8 &= 0{,}9030900 \\
& \overline{0{,}2815124}
\end{aligned}$$

$$8\operatorname{tang}\theta_3\operatorname{log}\operatorname{tang}(45^0+\tfrac{1}{2}\psi_3) = 1{,}9121079$$

$$\begin{aligned}
&8\operatorname{tang}\theta_3\operatorname{log}\operatorname{tang}(45^0+\tfrac{1}{2}\psi_3)+\operatorname{arc\,tang}(k\operatorname{tang}\theta\sin\varphi)+2\operatorname{arc\,tang}(\lambda_1\operatorname{tang}\theta_1\sin\psi_1) \\
&+4\operatorname{arc\,tang}(\lambda_2\operatorname{tang}\theta_2\sin\psi_2)-8\operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang}\theta_3\sin\psi_3) = 1{,}6799797
\end{aligned}$$

$$\Pi(u, ai, k) = 0{,}0124879.$$

St. Petersbourg, Février 1852.

17.

Zur Theorie der *Abel*schen Functionen.

(Von Herrn Dr. *C. Weierstrafs*, Lehrer der Mathematik am Gymnasio zu Braunsberg in Ostpreufsen.)

Seit mehreren Jahren mit der Theorie der *Abelschen Transcendenten* mich beschäftigend, bin ich zu Ergebnissen gelangt, welche der Beachtung der Mathematiker nicht unwerth zu sein scheinen, und die ich in einer Reihe von Abhandlungen ausführlich zu entwickeln beabsichtige. Die erste dieser Abhandlungen, welche bereits vollständig ausgearbeitet ist, soll hauptsächlich die Aufgabe behandeln, die periodischen Functionen mehrerer Argumente, deren Grund-Eigenschaften, wie es zuerst *Jacobi* nachgewiesen hat, in dem *Abel*schen Theorem über die *hyper-elliptischen Integrale* ausgesprochen sind, wirklich darzustellen; was dasselbe Problem ist, welches für die Functionen *zweier* Argumente bereits von *Göpel* und *Rosenhain* mit glänzendem Erfolge gelöset ist, hier aber ganz allgemein erledigt wird; auf einem Wege, der nicht nur gänzlich verschieden ist von dem, welchen die genannten Mathematiker eingeschlagen haben, sondern auch, wie ich schon jetzt behaupten darf, die Aussicht giebt, dafs er für noch höhere Transcendenten zu ähnlichen Resultaten führen werde. Das Folgende ist eine kurze Übersicht meiner Arbeit.

1.

Dem Systeme der Integralgleichungen, von welchem man, nach *Jacobi*, bei der Theorie der *Abel*schen Transcendenten ausgehen mufs, gebe ich folgende Form, welche ich als die einfachste und für die Behandlung geeignetste erkannt habe. Es sei

$$R(x) = (x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2n})$$

eine ganze Function $(2n+1)$ten Grades; wobei ich zunächst annehme, es seien die Gröfsen $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ sämmtlich *reell*, und so geordnet, dafs

$$a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_{2n} \text{ ist.}$$

Man zerlege nun $R(x)$ in die zwei Factoren

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_{2n-1}) \text{ und } Q(x) = (x-a_0)(x-a_2)\dots(x-a_{2n}),$$

und stelle, indem man $u_1, u_2, \ldots, u_n$ als unbeschränkt veränderliche Gröfsen, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aber als Functionen derselben betrachtet, den Zusammenhang zwischen diesen $2n$ Veränderlichen durch nachstehende n Gleichungen dar:

$$(1.)\quad \begin{cases} u_1 = \int_{a_1}^{x_1} \frac{P(x)}{x-a_1}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{a_3}^{x_2} \frac{P(x)}{x-a_1}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{P(x)}{x-a_1}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \\ u_2 = \int_{a_1}^{x_1} \frac{P(x)}{x-a_3}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{a_3}^{x_2} \frac{P(x)}{x-a_3}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{P(x)}{x-a_{3r}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n = \int_{a_1}^{x_1} \frac{P(x)}{x-a_{2n-1}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{a_3}^{x_2} \frac{P(x)}{x-a_{2n-1}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{P(x)}{x-a_{2n-1}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}. \end{cases}$$

Nun begründe ich, mit Hülfe des *Abel*schen Theorems, ausführlich den der Hauptsache nach bereits von *Jacobi* ausgesprochenen Satz, welchen ich als Fundament der ganzen Theorie betrachte; nemlich, dafs zwar für gegebene Werthe von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Gröfsen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ unendlich viele verschiedene Werthe haben, umgekehrt aber, wenn $u_1, u_2, \ldots, u_n$ gegeben sind, die Werthe von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so wie auch die zugehörigen Werthe von $\sqrt{R}(x_1), \sqrt{R}(x_2), \ldots, \sqrt{R}(x_n)$, völlig bestimmt sind. ***Und zwar sind*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ***die Wurzeln einer Gleichung nten Grades, deren Coëfficienten, völlig bestimmte, eindeutige Functionen der unbeschränkt veränderlichen Gröfsen*** $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ***sind, während eine zweite ganze Function von*** x, ***deren Coëfficienten eben solche Functionen von*** $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ***sind, für*** $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ ***die zugehörigen Werthe von*** $\sqrt{R}(x_1), \sqrt{R}(x_2), \ldots, \sqrt{R}(x_n)$ ***giebt.***

Hiernach kann jeder symmetrische rationale Ausdruck von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als eine eindeutige Function von $u_1, u_2, \ldots, u_n$ betrachtet werden. Namentlich aber zeigt es sich, dafs

$$(a_\alpha - x_1)(a_\alpha - x_2)\ldots(a_\alpha - x_n),$$

(wo α eine der Zahlen 0, 1, …, $2n$ bedeutet) das ***Quadrat*** einer solchen

Function ist. Ich bezeichne demgemäfs, indem ich die gröfseste in $\frac{1}{2}\alpha$ enthaltene Zahl durch $\bar{\alpha}$ ausdrücke und

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = L(x)$$

setze,

$$(2.) \qquad \frac{\sqrt{((-1)^{\bar{\alpha}} L(a_\alpha))}}{\sqrt[4]{((-1)^{\alpha} R'(a_\alpha))}} \quad \text{durch} \quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots, u_n)_\alpha$$

und nenne diese so definirten $2n+1$ Gröfsen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_1$ u. s. w. ***Abelsche Functionen***, indem sie es sind, die den *elliptischen* Functionen $\sin\mathrm{am} u$, $\cos\mathrm{am} u$, $\Delta\mathrm{am} u$ vollkommen entsprechen. Die Reihen nach Potenzen von $u_1, u_2, \ldots, u_n$ entwickelt, haben folgende Gestalt:

$$3. \quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1} = \sqrt[4]{\left(\frac{-Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}\right)} \cdot \{u_\mathfrak{a} + (u_1, u_2, \ldots)_3 + (u_1, u_2, \ldots)_5 + \cdots\},$$

$$4. \quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{b}} = \sqrt[4]{\left(\frac{P(a_{2\mathfrak{b}})}{Q'(a_{2\mathfrak{b}})}\right)} \cdot \{1 + (u_1, u_2, \ldots)_2 + (u_1, u_2, \ldots)_4 + \cdots\}.$$

In diesen Formeln bedeutet $\mathfrak{a}$ irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$; $\mathfrak{b}$ irgend eine der Zahlen $0, 1, \ldots, n$; und durch $(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ wird eine ganze homogene Function αten Grades bezeichnet. Ich bemerke überhaupt, dafs im Folgenden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, so wie auch $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}'$ eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$; $\mathfrak{b}$ dagegen eine der Zahlen $0, 1, \ldots, n$ bedeuten soll. Ferner ist zu bemerken, dafs überall, wo, hier und im Folgenden, die Wurzel (2ten oder 4ten Grades) eines *positiven*, aus den Differenzen $a_0 - a_1$, $a_0 - a_2$, $\ldots$, $a_1 - a_2$, $a_1 - a_3$ u. s. w. durch Multiplication und Division gebildeten Ausdrucks vorkommt, stets deren *positiver* Werth genommen werden soll.

Die vorstehenden Reihen können nicht für *alle* Werthe von $u_1, u_2, \ldots$ *convergent* sein. Gleichwohl gehe ich von ihnen aus, indem ich die Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ zunächst nur für solche Werthe von $u_1, u_2, \ldots$ definire, für welche die aufgestellten Reihen sämmtlich *convergent* sind. Darauf entwickle ich die Haupt-Eigenschaft der so erklärten Functionen: nämlich, dafs sich die Werthe derselben, wenn an die Stelle von $u_1, u_2, \ldots$ zweitheilige Gröfsen $u_1 + v_1$, $u_2 + v_2, \ldots$ treten, *rational* durch $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_1, \ldots,$ $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2n}$; $\mathrm{al}(v_1, v_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(v_1, v_2, \ldots)_1$, $\ldots$, $\mathrm{al}(v_1, v_2, \ldots)_{2n}$ und durch deren partielle Differential-Coëfficienten erster Ordnung ausdrücken lassen; worauf ich dann mit Hülfe der so gefundenen Formeln zeige, dafs es eindeutige, für *alle* Werthe von $u_1, u_2, \ldots$ existirende Functionen von $u_1, u_2, \ldots$ giebt, die mit den durch die obigen Reihen dargestellten Functionen für solche Werthe

von $u_1, u_2, \ldots$ übereinstimmen, für welche dieselben ***convergiren***, und die ich dann fortan unter $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)$, ... verstehe. Dies vorausgesetzt, sind die Gröfsen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche für beliebige Werthe von $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die Gleichungen (1) befriedigen, die n Wurzeln der folgenden Gleichung:

$$(5.)\quad \frac{e_1^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_1}{a_1 - x} + \frac{e_3^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_3}{a_3 - x} + \cdots + \frac{e_{2n-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2n-1}}{a_{2n-1} - x} = 1,$$

in welcher

$$\sqrt[4]{\left(\frac{-Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}\right)} = e_{2\mathfrak{a}-1}$$

gesetzt ist. Ferner hat man:

$$(6.)\quad \sqrt{R(x_\mathfrak{a})}$$

$$= \frac{a_{2c-1} - x_\mathfrak{a}}{e_{2c-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2c-1}} \cdot \Sigma\left\{\frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2\,P(x_\mathfrak{a})\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}}{a_{2\mathfrak{a}-1} - x_\mathfrak{a}} \cdot \frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}}{\partial u_c}\right\},$$

$$\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n$$

wo c irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ bedeutet.

Übrigens lassen sich statt der Formeln (5, 6) andere von ganz ähnlicher Gestalt aufstellen, in welchen n beliebige von den Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_1$, ... vorkommen. Indem man ferner die Differentiale dieser Functionen durch $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ausdrückt, findet man Veranlassung, noch eine Reihe anderer Functionen einzuführen; nämlich die durch die Formel

$$(7.)\quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta}$$

$$= \sqrt{(\pm(a_\alpha - a_\beta))} \cdot \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\beta \cdot \Sigma\left\{\frac{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}{(x_\mathfrak{a} - a_\alpha)(x_\mathfrak{a} - a_\beta)\,L'(x_\mathfrak{a})}\right\}$$

dargestellten, wo das obere oder das untere Zeichen von $(a_\alpha - a_\beta)$ gilt, jenachdem $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ ist. (α, β bedeuten je zwei verschiedene Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, 2n$.) Man hat alsdann

$$(8.)\quad \frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha}{\partial u_\mathfrak{a}} = -\frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2}{\sqrt{(\pm(a_\alpha - a_{2\mathfrak{a}-1}))}} \cdot \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,2\mathfrak{a}-1},$$

vorausgesetzt, dafs $\alpha \gtrless 2\mathfrak{a} - 1$ ist. Aus dieser Gleichung ergiebt sich die bemerkenswerthe Relation

$$(9.)\quad e_{2\mathfrak{a}-1}^2 \frac{\partial\,\mathrm{al}^2(u_1 u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}}{\partial u_c} = e_{2c-1}^2 \frac{\partial\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2c-1}}{\partial u_\mathfrak{a}}.$$

Zwischen den Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta}$ finden übrigens zahlreiche Relationen Statt. Insbesondere sind folgende zu bemerken:

$$(10.)\quad \frac{\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{b}}}{e_{2\mathfrak{b}}^2} = 1 - \sum_{\mathfrak{a}=1,\ldots,n}\left\{\frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}}{a_{2\mathfrak{b}} - a_{2\mathfrak{a}-1}}\right\},$$

$$(11.)\quad \pm\frac{\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{b},\,2c-1}}{e_{2\mathfrak{b}-1}^2} = \mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2c-1} + \frac{e_{2c-1}^2}{a_{2\mathfrak{b}} - a_{2c-1}}$$
$$+ \sum_{\mathfrak{a}=1,\ldots,c-1}\left\{\frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1,\,2c-1}}{a_{2\mathfrak{b}} - a_{2\mathfrak{a}-1}}\right\} - \sum_{\mathfrak{a}=c+1,\ldots,n}\left\{\frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1,\,2c-1}}{a_{2\mathfrak{b}} - a_{2\mathfrak{a}-1}}\right\}.$$

In der letztern Gleichung gilt das obere, oder das untere Zeichen, je nachdem $2c-1$ kleiner oder gröfser als $2\mathfrak{b}$ ist. Mittels der Gleichungen $(8-11)$ läfst sich auch eine algebraische Gleichung zwischen jedem der $(2n+1)n$ Differential-Coëfficienten erster Ordnung der Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_1, \ldots)_\alpha$ und je n der letztern ableiten.

2.

Nunmehr führe ich diejenigen Gröfsen ein, welche den sogenannten vollständigen elliptischen Integralen ***erster Gattung*** analog sind. Wenn x reell ist und zwischen den Grenzen $a_{\alpha-1}$ und a_α liegt, so ist

$$\boldsymbol{R}(x) = (-1)^\alpha(a_0 - x)\ldots(a_{\alpha-1} - x)(x - a_\alpha)\ldots(x - a_{2n}),$$

und man kann daher

$$\sqrt{\boldsymbol{R}(x)} = \pm i^\alpha\sqrt{(a_0 - x)}\ldots\sqrt{(a_{\alpha-1} - x)}.\sqrt{(x - a_\alpha)}\ldots\sqrt{(x - a_{2n})}$$

setzen, wo die Wurzeln rechts sämmtlich ***positiv*** zu nehmen sind.

Ferner ist, wenn x zwischen $+\infty$ und a_0 liegt:

$$\sqrt{\boldsymbol{R}(x)} = \pm\sqrt{(x - a_0)}\ \ldots\ \sqrt{(x - a_{2n})},$$

und wenn x zwischen a_{2n} und $-\infty$ enthalten ist:

$$\sqrt{\boldsymbol{R}(x)} = \pm i^{2n+1}\sqrt{(a_0 - x)}\ldots\sqrt{(a_{2n} - x)}.$$

Wenn nun a und b zwei reelle Gröfsen sind, so bezeichne ich durch

$$\int_a^b \frac{\boldsymbol{F}(x)\,dx}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}},$$

wo $\boldsymbol{F}(x)$ eine rationale Function von x bedeuten soll, denjenigen besondern Werth der Formel $\int_a^b \frac{\boldsymbol{F}(x)\,dx}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}$, welchen sie dadurch erhält, dafs bei der Integration $\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}$ stets mittels der obigen Formeln unter Anwendung des *obern* Zeichens bestimmt wird. Dies vorausgesetzt, werde

$$\int_{a_\alpha}^{\infty} \frac{\boldsymbol{P}(x)\,dx}{2(x - a_{2\alpha-1})\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}} \quad \text{durch} \quad \overset{a}{\boldsymbol{K}}_\alpha$$

bezeichnet. Dann gilt die Relation:

$$(12.)\qquad \overset{0}{K}_{\mathfrak{a}} - \overset{1}{K}_{\mathfrak{a}} + \overset{2}{K}_{\mathfrak{a}} - \cdots + \overset{2\mathfrak{a}}{K}_{\mathfrak{a}} = 0, \text{ für } \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n.$$

Ferner sei

$$(13.)\quad K_{\mathfrak{a},c} = \overset{2c-1}{K}_{\mathfrak{a}} - \overset{2c}{K}_{\mathfrak{a}} = \int_{a_{2c-1}}^{a_{2c}} \frac{P(x)\,dx}{2(x-a_{2\mathfrak{a}-1})\sqrt{R(x)}} = -\int_{a_{2c-1}}^{a_{2c}} \sqrt{\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)} \cdot \frac{dx}{a_{2\mathfrak{a}-1}-x}$$

$$i\overline{K}_{\mathfrak{a},c} = \overset{2c-2}{K}_{\mathfrak{a}} - \overset{2c-1}{K}_{\mathfrak{a}} = \int_{a_{2c-2}}^{a_{2c-1}} \frac{P(x)\,dx}{2(x-a_{2\mathfrak{a}-1}\sqrt{R(x)}},$$

also

$$(14.)\qquad \overline{K}_{\mathfrak{a},c} = -\int_{a_{2c-2}}^{a_{2c-1}} \sqrt{\left(\frac{-P(x)}{Q(x)}\right)} \frac{dx}{x-a_{2\mathfrak{a}-1}},$$

wo bei der ersten Integration $\sqrt{\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)}$, und bei der andern $\sqrt{\left(\frac{-P(x)}{Q(x)}\right)}$ positiv zu nehmen ist. Dann findet sich

$$(15.)\quad \begin{cases} \overset{0}{K}_{\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a},1} + K_{\mathfrak{a},2} + \cdots + K_{\mathfrak{a},n} \\ \overset{1}{K}_{\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a},1} + K_{\mathfrak{a},2} + \cdots + K_{\mathfrak{a},n} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},1} \\ \overset{2}{K}_{\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a},2} + K_{\mathfrak{a},3} + \cdots + K_{\mathfrak{a},n} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},1} \\ \overset{3}{K}_{\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a},2} + \cdots\cdots\cdots + K_{\mathfrak{a},n} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},1} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},2} \\ \overset{4}{K}_{\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a},3} + \cdots\cdots\cdots + K_{\mathfrak{a},n} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},1} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overset{2n}{K}_{\mathfrak{a}} = -i\overline{K}_{\mathfrak{a},1} - i\overline{K}_{\mathfrak{a},2} - \cdots - i\overline{K}_{\mathfrak{a},n}. \end{cases}$$

Ein besonderer Fall des *Abel*schen Theorems führt sodann zu den folgenden Formeln, in welchen α, β, γ Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, 2n$ bedeuten, und mit dem Symbol $\alpha|\beta$ die Zahl 0 bezeichnet wird, wenn $\alpha < \beta$, hingegen die Zahl 1, wenn $\alpha > \beta$ ist:

$$(16.)\quad \mathrm{al}(u_1 + \overset{\alpha}{K}_1, \ldots)_\alpha = \frac{i^{\alpha-2\bar{\alpha}}}{\mathrm{al}(u_1,\ldots)_\alpha}, \qquad \mathrm{al}(u_1 - \overset{\alpha}{K}_1, \ldots)_\alpha = \frac{i^{\alpha-2\bar{\alpha}}}{\mathrm{al}(u_1,\ldots)_\alpha},$$

$$(17.)\quad \mathrm{al}(u_1 + \overset{\beta}{K}_1, \ldots)_\alpha = \frac{i^{\beta|\alpha}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\alpha,\beta}}{\mathrm{al}(u_1,\ldots)_\beta}, \quad \mathrm{al}(u_1 - \overset{\beta}{K}_1, \ldots)_\alpha = \frac{-i^{\beta|\alpha}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\alpha,\beta}}{\mathrm{al}(u_1,\ldots)_\beta}.$$

Hieraus läfst sich

$$(18.)\quad \begin{cases} \mathrm{al}(u_1 + 2\overset{\alpha}{K}_1, \ldots)_\alpha = +\mathrm{al}(u_1,\ldots)_\alpha \\ \mathrm{al}(u_1 + 2\overset{\beta}{K}_1, \ldots)_\alpha = -\mathrm{al}(u_1,\ldots)_\alpha, \text{ wenn } \beta \gtrless \alpha, \end{cases}$$

und wenn man

$$K_\alpha = \mu_0 \overset{0}{K} + \mu_1 \overset{1}{K}_\alpha + \cdots + \mu_{2n} \overset{2n}{K}_\alpha,$$
$$\mu = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_{2n}$$

setzt, wo unter μ_0, μ_1 u. s. w. beliebige ganze Zahlen zu verstehen sind,

$$(19.) \quad \mathrm{al}(u_1 2K_1, \ldots)_\alpha = (-1)^{\mu-\mu_\alpha} \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$$

folgern.

Es werde jetzt

$$(20.) \quad K'_{\alpha,c} = \overline{K}_{\alpha,1} + \overline{K}_{\alpha,2} + \cdots + \overline{K}_{\alpha,c}$$

und

$$(21.) \quad \begin{cases} \omega_\alpha = \mathfrak{m}_1 K_{\alpha,1} + \mathfrak{m}_2 K_{\alpha,2} + \cdots + \mathfrak{m}_n K_{\alpha,n}, \\ \omega'_\alpha = \mathfrak{n}_1 K'_{\alpha,1} + \mathfrak{n}_2 K'_{\alpha,2} + \cdots + \mathfrak{n}_n K'_{\alpha,n} \end{cases}$$

gesetzt (unter $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, ..., $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, ... ebenfalls beliebige ganze Zahlen verstanden), so erhält man die Formeln

$$(22.) \quad \mathrm{al}(u_1 + 2\omega_1, \ldots)_\alpha = (-1)^{\mathfrak{m}_\alpha - \bar{\alpha}} \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha,$$

wo, wenn $\alpha = 0$ ist, $\mathfrak{m}_0 = 0$ genommen werden mufs; und

$$(23.) \quad \mathrm{al}(u_1 + 2\omega'_1 i, \ldots)_\alpha = (-1)^{\mathfrak{n}_n + \mathfrak{n}_{n-1} + \cdots + \mathfrak{n}_{\bar{\alpha}+1}} \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha,$$

in welcher Formel für $\alpha = 2n$ der Factor von $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{2n}$ gleich 1 zu setzen ist. Ähnliche Relationen erhält man mit Hülfe der Formel (17.) für die Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta}$.

3.

Die Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ haben die Eigenthümlichkeit, dafs sie sämmtlich für dieselben Werthe von u_1, u_2, ... unendlich werden. Überdies kann jede derselben, wie es bei dem Beweise des in (Nr. 1.) angegebenen Hauptsatzes gezeigt wird, (wenn man für die absoluten Werthe von u_1, u_2, ... bestimmte, übrigens beliebig weite Grenzen festsetzt, die sie nicht überschreiten sollen), als der Quotient zweier, nach ganzen positiven Potenzen von u_1, u_2, ... fortschreitenden Reihen dargestellt werden, welche für alle Werthe dieser Veränderlichen innerhalb der bezeichneten Grenzen *convergiren*. Dies führt zu der Vermuthung, dafs sich $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_1$, u. s. w. als Brüche mit gemeinschaftlichem Nenner darstellen lassen dürften, bei welchen dieser Nenner sowohl als die Zähler, solche Functionen von u_1, u_2, ... sind, die nie unendlich werden und sich nach ganzen positiven Potenzen ihrer Argumente in *beständig* convergirende Reihen entwickeln lassen. Wenn sich

wirklich $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha = \frac{p_\alpha}{p}$ setzen läfst (unter p, p_α Functionen von der eben beschriebenen Art verstanden), so mufs $d\log \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$ aus zwei Theilen bestehen, deren einer für alle die Werthe von u_1, u_2, ... unendlich wird, für welche $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha = 0$ ist, der andere hingegen für alle diejenigen, welche $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$ unendlich machen. Dasselbe ist der Fall für die höhern logarithmischen Differentiale von $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$. Angenommen nun, es ergebe sich $d^\mu \log \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha = P_\alpha - P$, wo $P_\alpha = \infty$ wird, wenn $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha = 0$, und $P = \infty$, wenn $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha = \infty$, so kann man $d^\mu \log p_\alpha = P_\alpha$, $d^\mu \log p = P$ setzen; und da sich P_α, P durch $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_1$ u. s. w. ausdrücken lassen, also auch durch p_0, p_1, ..., p_{2n}, p, so mufs man auf diese Weise zu $2n+2$ Differential-Gleichungen für die genannten $2n+2$ Gröfsen gelangen.

Für die *elliptischen* Functionen ist die Rechnung sehr leicht. Man hat nämlich, wenn $x = \mathrm{sin\,am}\, u$ ist:

$$\frac{d^2 \log x}{du^2} = k^2 x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Setzt man nun $x = \frac{p_1}{p}$, so ergiebt sich

$$\frac{d^2 \log p_1}{du^2} - \frac{d^2 \log p}{du^2} = k^2 \cdot \frac{p_1^2}{p^2} - \frac{p^2}{p_1^2}.$$

Diese Gleichung zerfälle man in zwei, indem man

$$\frac{d^2 \log p_1}{du^2} = -\frac{p^2}{p_1^2}, \qquad \frac{d^2 \log p}{du^2} = -\frac{k^2 p_1^2}{p^2}$$

setzt. Nachdem nun vorher gezeigt worden, dafs sich $\mathrm{sin\,am}\, u$, wenn der absolute Werth von u eine beliebig angenommene Grenze nicht übersteigt, als Quotient zweier, nach ganzen Potenzen von u fortschreitenden und für alle unterhalb jener Grenzen liegenden Werthe dieser Veränderlichen convergente Reihen darstellen läfst, kann, wie ich Dies in meiner Abhandlung ausgeführt habe, strenge bewiesen werden, dafs sich die durch die beiden vorstehenden Differential-Gleichungen definirten Functionen p, p_1 nach ganzen positiven Potenzen von u in *beständig* (d. h. für alle reellen und imaginären Werthe von u) *convergirende* Reihen entwickeln lassen. Und wenn man die vier willkührlichen Constanten, die sie enthalten, so bestimmt, dafs für $u = 0$,

$$p = 1, \quad \frac{dp}{du} = 0, \quad p_1 = 0, \quad \frac{dp_1}{du} = 1$$

ist, so findet sich in der That $\mathrm{sin\,am}\, u = \frac{p_1}{p}$. Ähnliche Entwicklungen giebt

es für $\cos\mathrm{am}\,u$, $\Delta\mathrm{am}\,u$, und man gelangt auf diese Weise zu denjenigen Darstellungen der elliptischen Functionen, deren *Abel* in einem Briefe an *Legendre* (S. dieses Journal, B. 6, S. 76) erwähnt, ohne jedoch irgendwo die Ausführung, oder eine Andeutung seines Verfahrens gegeben zu haben. Von den Functionen p, p_1 aus gelangt man ferner leicht zu den *Jacobischen* Functionen $\Theta(u)$, $H(u)$, und kann so die Entwicklung der elliptischen Functionen in allen Formen ausführen, ohne dieselbe auf die Transformations- oder Multiplications-Formeln zu gründen. Überhaupt lassen sich die obigen Differential-Gleichungen für p, p_1 zur Basis einer vollständigen Theorie der elliptischen Transcendenten machen; wie ich Dies in einer bereits im Jahre 1840 von mir verfafsten und damals der wissenschaftlichen Prüfungs-Commission zu *Münster* übergebenen Abhandlung auch wirklich durchgeführt habe.

Für die Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ habe ich nun eine ähnliche Rechnung wie für p, p_1 versucht. Mit Hülfe der in (Nr. 1.) erwähnten Formeln, mittels welcher man $\mathrm{al}(u_1+v_1, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1+v_1, \ldots)_1$ u. s. w. durch die Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_n$ und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ausdrücken kann, lassen sich die zweiten Differentiale der *Abel*schen Functionen ermitteln, und man erhält $d^2 \log \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$ durch $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_1$ u. s. w. und deren erste Differentiale ausgedrückt. Mit Benutzung der unter (8—11) aufgestellten Relationen lassen sich dann diese Ausdrücke auf die vorhin angegebene Form bringen, und indem man $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha = \frac{p_\alpha}{p}$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha,\beta} = \frac{p_{\alpha,\beta}}{p}$ setzt, für die Gröfsen p, p_α, $p_{\alpha,\beta}$ eine hinreichende Anzahl Differential-Gleichungen zweiter Ordnung finden; so wie es sich auch nachweisen läfst, dafs diese definirten Functionen sich nach ganzen Potenzen von $u_1, u_2, \ldots$ in *beständig* convergirende Reihen entwickeln lassen. Auf diese Weise begründete ich (gegen Ende 1847) den Satz, welchen ich als den wichtigsten zur Erreichung meines Zieles, eine für alle Werthe der Argumente $u_1, u_2, \ldots$ geltende Darstellung der *Abel*schen Functionen aufzufinden, betrachten durfte: dafs nämlich die Functionen $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha,\beta}$ in der Form von Brüchen mit gemeinschaftlichem Nenner sich darstellen lassen, in welchen die Zähler und der Nenner wesentlich den Character *ganzer* Functionen haben, indem sie für alle (reellen und imaginären) Werthe der Argumente $u_1, u_2, \ldots$ existiren und sich nach ganzen positiven Potenzen derselben in beständig convergirende Reihen entwickeln lassen. Indem ich nun ferner auf die so gewonnenen Hülfsfunctionen genau dasselbe Verfahren anwandte, welches mich von den oben erwähnten Functionen,

durch welche ich die elliptischen Functionen ausgedrückt hatte, zu den sogenannten Θ Functionen geführt, gelangte ich auf einem, alle Willkührlichkeit ausschliefsenden Wege, zu den eben so einfachen als durch ihre Form ausgezeichneten Reihen, auf welche, für $n = 2$, schon vor mir ***Göpel*** und ***Rosenhain*** die *Abel*schen Functionen ***zweier*** Argumente zurückgeführt hatten.

Die Rechnungen indefs, welche die Erzielung der angegebenen Resultate erfordern, sind nicht ohne Weitläufigkeit. Ich versuchte daher, denselben Grundgedanken verfolgend, auf einem einfacheren Wege den Zweck zu erreichen. Es gelang mir Dies, indem ich gleich vom Anfang an auch die *Abel*schen Integrale zweiter und dritter Gattung mit in Betracht zog und dieselben durch $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ausdrückte; in ähnlicher Weise, wie es bei den entsprechenden elliptischen Integralen geschieht.

Göpel's Abhandlung erschien zu der Zeit, als ich mit diesen Untersuchungen beschäftigt war. Seine Resultate sowohl, als sein Verfahren, sind nicht so einfach, als sie, auch bei dem von ihm gewählten Wege, sein konnten. Von ***Rosenhain's*** Arbeit, die erst nach Vollendung der meinigen veröffentlicht worden, kenne ich bis jetzt nur die in diesem Journal aus Briefen an ***Jacobi*** mitgetheilten Notizen. So viel daraus zu entnehmen, stimmen die von ihm gefundenen Resultate mit den meinigen, auf durchaus verschiedenem Wege ermittelten, vollkommen überein. Ich glaube aber nicht, dafs sich nach den Methoden beider Mathematiker die *Abel*schen Functionen von höherer als der ersten Ordnung werden behandeln lassen. ***Jacobi*** hat bereits bemerkt, dafs schon für $n = 3$ die verallgemeinerten Θ Functionen mehr Constanten enthalten, als die *Abel*schen Functionen dreier Argumente wesentlich zusammen. Es müssen daher unter diesen Constanten bestimmte Bedingungsgleichungen Statt finden, wenn die betreffenden Reihen zu *Abel*schen Functionen führen sollen. Ich habe nun zwar diese Relationen für jeden Werth von n gefunden, zweifle aber, ob Dies, wenn man von den genannten Reihen ausgeht, a priori möglich sei, ohne dafs die Theorie der *Abel*schen Functionen, nach einer andern Methode entwickelt, vorausgesetzt wird.

4.

Es werde, während a eine willkührliche Gröfse bedeutet,

$$(24.) \qquad \sum_{\alpha} \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha} \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \frac{P(x)}{x-a} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$$

gesetzt, indem man sich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ausgedrückt

vorstellt, und festsetzt, dafs bei jeder einzelnen Integration x genau dieselben Werthe durchlaufen soll, wie bei den Integrationen, in den Gleichungen (1). So definirt, läfst sich $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$ als eine ***logarithmische*** Function von u_1, u_2, ... betrachten; d. h. als eine solche, welche die Form

$$A \log \varphi(u_1, u_2, \ldots) + \varphi_1(u_1, u_2, \ldots)$$

hat, wo φ, φ_1 ***eindeutige*** Functionen von u_1, u_2, ... sind. Von den vielen Formeln, die sich auf diese Function beziehen, führe ich nur die folgende an:

$$(25.) \quad \frac{\partial \mathrm{Sl}(u_1, \ldots)}{\partial u_c}$$

$$= \tfrac{1}{2} e_{2c-1} \mathrm{al}(\overset{c}{w}_1, \ldots)_{2c-1} \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2c-1} [\mathrm{al}(u_1 + \overset{c}{w}_1, \ldots)_{2c-1} + \mathrm{al}(u_1 - \overset{c}{w}_1, \ldots)_{2c-1}]$$

$$= \frac{e_{2c-1}^2 \sqrt{R(a)}}{(a - a_{2c-1}) P(a)} \cdot \frac{\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2c-1}}{1 - \sum\limits_{\mathfrak{a}} \left\{ \frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2 \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}}{a_{2\mathfrak{a}-1} - a} \right\}},$$

wo

$$(26.) \quad \overset{c}{w}_{\mathfrak{a}} = \int_{a_{2c-1}}^{a} \frac{P(x)\,dx}{2(x - a_{2\mathfrak{a}-1}) \sqrt{R(x)}}$$

ist.

Das dem Σ untergesetzte $\mathfrak{a}$ bedeutet, dafs in einer Formel wie $\sum\limits_{\mathfrak{a}} A_{\mathfrak{a}}$ die Summation auf die veränderliche ganze Zahl $\mathfrak{a}$ sich beziehe, welche dann alle Werthe von 1 bis n durchlaufen mufs.

Setzt man nun

$$(27.) \quad \frac{P(a)}{\sqrt{R(a)}} = b,$$

so läfst sich jedesmal, wenn a in der Nähe eines der Werthe a_1, a_3, ..., a_{2n-1} liegt, $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$ nach Potenzen von b entwickeln, und zwar in der Form

$$\frac{f(a)}{b} + b f_1(u) + b^3 f_2(u) + \cdots$$

Den Coëfficienten von b in dieser Entwicklung, für den Fall, wo a wenig von $a_{2\mathfrak{a}-1}$ verschieden ist, bezeichne ich durch

$$\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_{\mathfrak{a}},$$

wo man dann

$$(28.) \quad d\,\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_c = \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ \tfrac{1}{2} \frac{Q(a_{2c-1})}{P'(a_{2c-1})} \frac{P(x_{\mathfrak{a}})\,dx_{\mathfrak{a}}}{(x_{\mathfrak{a}} - a_{2c-1})^2 \sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}} \right\},$$

oder auch

$$(29.) \quad d\,\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_c = \frac{e_{2c-1}^2\,du_c}{\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2c-1}} + \sum_{\mathfrak{a}}{}' \left\{ \frac{e_{2c-1}^2 e_{2\mathfrak{a}-1}^2 \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1} (du_c - du_{\mathfrak{a}})}{(a_{2c-1} - a_{2\mathfrak{a}-1}) \mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2c-1}} \right\}$$

findet, in welcher letztern Formel für $\mathfrak{a}$ der Werth c auszuschliefsen ist.

Diese n neuen Gröfsen $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_a$ sind ***eindeutige*** Functionen von u_1, u_2, ..., von derselben Art wie $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_0$ u. s. w. Es lassen sich auf dieselben alle *Abel*schen Integrale zweiter Gattung zurückführen; so wie auf $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$ die der dritten.

Ich bezeichne jetzt das bestimmte Integral

$$(30.)\quad \int_{a_\alpha}^{-\infty} \tfrac{1}{2} \frac{Q(a_{2a-1})}{P'(a_{2a-1})} \frac{P(x)}{(x-a_{2a-1})^2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \text{durch} \quad \overset{a}{J}_a,$$

und setze (ähnlich wie oben, wo von den Gröfsen $\overset{\alpha}{K}_a$ die Rede ist)

$$J_{a,c} = \overset{2c-1}{J}_a - \overset{2c}{J}_a, \qquad i\bar{J}_{a,c} = \overset{2c-2}{J}_a - \overset{2c-1}{J}_a,$$

$$(31.)\quad J'_{a,c} = \bar{J}_{a,1} + \bar{J}_{a,2} + \cdots + \bar{J}_{a,c}.$$

Dann läfst sich das logarithmische Differential von $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ durch die Functionen $\mathrm{Sl}(u_1, \ldots)_a$ in folgender Weise ausdrücken:

$$(32.)\quad \frac{\partial \log \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha}{\partial u_a} = \overset{a}{J}_a - \mathrm{Sl}(u_1 + \overset{\alpha}{K}_1 - \overset{2a-1}{K}_1, \ldots)_a + \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2a-1}{K}_1, \ldots)_a.$$

Nun läfst sich mit Hülfe der Formel (29.) leicht beweisen, dafs

$$(33.)\quad \frac{\partial \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2a-1}{K}_1, \ldots)_a}{\partial u_c} = \frac{\partial \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2c-1}{K}_1, \ldots)_c}{\partial u_a}$$

ist, woraus folgt, dafs der Ausdruck

$$\sum_a \{ -\overset{2a-1}{J}_a - \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2a-1}{K}_1, \ldots)_a \} du_a$$

ein volständiges Differential ist.

Es läfst sich daher eine Function $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)$ dergestalt bestimmen, dafs

$$(34.)\quad d \log \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots) = -\sum_a (\overset{2a-1}{J}_a + \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2a-1}{K}_1, \ldots)) du_a$$

ist, und wenn man dann

$$(34\,a.)\quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha = \frac{\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha}{\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)}$$

setzt, so erhält man

$$(35.)\quad d \log \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha = -\sum_a (\overset{2a-1}{J}_a - \overset{\alpha}{J}_a + \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2a-1}{J}_a + \overset{\alpha}{J}_a, \ldots)_a) du_a.$$

Fügt man diesen Gleichungen die Bestimmung hinzu, dafs für $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, ..., $u_n = 0$, $\mathrm{Al}(u_1, \ldots) = 1$ werde, so sind die sämmtlichen durch sie definirten Hülfsfunctionen völlig bestimmt. Entwickelt man sie in Reihen

nach Potenzen von $u_1, u_2, \ldots$, so erhält man

$$(36.)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots) & = 1 + (u_1, u_2, \ldots)_2 + (u_1, u_2, \ldots)_4 + \cdots \\ \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1} & = u_\mathfrak{a} + (u_1, u_2, \ldots)_3 + (u_1, u_2, \ldots)_5 + \cdots \\ \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{b}} & = 1 + (u_1, u_2, \ldots)_2 + (u_1, u_2, \ldots)_4 + \cdots, \end{cases}$$

und es läfst sich erweisen, dafs diese Reihen für *alle* Werthe von $u_1, u_2, \ldots$ convergent sind.

Auf die Function $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)$ lassen sich jetzt auch $\mathrm{Sl}(u_1, \ldots)$ und $\mathrm{Sl}(u_1, \ldots)_\mathfrak{a}$ zurückführen. Setzt man nämlich

$$(37.)\quad w_\mathfrak{a} = \int_a^\infty \tfrac{1}{2} \frac{P(x)\,dx}{(x - a_{2\mathfrak{a}-1})\sqrt{R(x)}}$$

und

$$(38.)\quad \frac{\partial \log \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)}{\partial u_\mathfrak{a}} = \overset{\mathfrak{a}}{\mathrm{Al}}(u_1, u_2, \ldots),$$

so hat man

$$(39.)\quad \mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots) = -\sum_\mathfrak{a} u_\mathfrak{a} \overset{\mathfrak{a}}{\mathrm{Al}}(w_1, \ldots) + \tfrac{1}{2} \log \frac{\mathrm{Al}(u_1 + w_1, \ldots)}{\mathrm{Al}(u_1 - w_1, \ldots)}.$$

Hieraus läfst sich noch eine Formel herleiten, die für $n = 1$ in der Theorie der elliptischen Functionen (namentlich bei Anwendungen derselben) von grofsem Nutzen ist, nämlich:

$$(40.)\quad e^{\sum\limits_\mathfrak{a} \int\limits_{a_{2\mathfrak{a}-1}}^{x_\mathfrak{a}} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{P(x)}{P(a)} \frac{\sqrt{R(a)}}{\sqrt{R(x)}}\right) \frac{dx}{x-a}} = e^{-\sum\limits_\mathfrak{a} u_\mathfrak{a} \overset{\mathfrak{a}}{\mathrm{Al}}(w_1, \ldots)} \cdot \frac{\mathrm{Al}\,u_1 + w_1, \ldots)}{\mathrm{Al}(w_1, \ldots)\,\mathrm{Al}(u_1, \ldots)}.$$

Für $n = 1$ dient z. B. dieser Ausdruck dazu, um leicht zu den Formeln zu gelangen, durch welche *Jacobi* die Rotationsbewegung eines festen Körpers darzustellen gelehrt hat.

5.

Zur wirklichen Darstellung der Functionen $\mathrm{Al}(u_1, \ldots)$, $\mathrm{Al}(u_1, \ldots)_\alpha$ gelange ich nunmehr auf folgende Weise.

Zunächst entwickle ich die Relation

$$(41.)\quad \mathrm{Al}(u_2 + 2\overset{a}{K}_1, \ldots) = (-1)^\alpha e^{-2\sum\limits_\mathfrak{a} \overset{\alpha}{J}_\mathfrak{a}(u_\mathfrak{a} + \overset{\alpha}{K}_\mathfrak{a})} \cdot \mathrm{Al}(u_1, \ldots).$$

In dieser Gleichung setze ich sodann $u_1 + 2\overset{\beta}{K}_1$ statt u_1 u. s. w. Dies giebt

$$\mathrm{Al}(u_1 + 2\overset{\alpha}{K}_1 + 2\overset{\beta}{K}_1, \ldots)_\alpha$$
$$= (-1)^{\alpha+\beta} e^{-2\sum\limits_\mathfrak{a} [(\overset{\alpha}{J}_\mathfrak{a} + \overset{\beta}{J}_\mathfrak{a})(u_\mathfrak{a} + \overset{\alpha}{K}_\mathfrak{a} + \overset{\beta}{K}_\mathfrak{a}) + \overset{\beta}{K}_\mathfrak{a}\overset{\alpha}{J}_\mathfrak{a} - \overset{\alpha}{K}_\mathfrak{a}\overset{\beta}{J}_\mathfrak{a}]} \cdot \mathrm{Al}(u_1, \ldots).$$

Vertauscht man jetzt α und β mit einander, so zeigt sich, dafs

$$e^{2\sum_a (\overset{\alpha}{K}_a \overset{\beta}{J}_a - \overset{\alpha}{J}_a \overset{\beta}{K}_a)} = e^{-\sum_a (\overset{\alpha}{K}_a \overset{\beta}{J}_a - \overset{\alpha}{J}_a \overset{\beta}{K}_a)}$$

sein mufs. Hieraus folgt, dafs

$$\sum_a (\overset{\alpha}{K}_a \overset{\beta}{J}_a - \overset{\alpha}{J}_a \overset{\beta}{K}_a) = \mu . \tfrac{1}{2}\pi . i$$

ist, wo μ eine ganze Zahl ist. In der That finde ich durch eine directe Untersuchung der bestimmten Integrale, durch welche $\overset{\alpha}{K}_a$, $\overset{\beta}{K}_a$, $\overset{\alpha}{J}_a$, $\overset{\beta}{J}_a$ ausgedrückt werden:

$$(42.) \quad \sum_a (\overset{\alpha}{K}_a \overset{\beta}{J}_a - \overset{\alpha}{J}_a \overset{\beta}{K}_a) = \begin{cases} +\tfrac{1}{2}\pi i, & \text{wenn } \alpha > \beta, \\ -\tfrac{1}{2}\pi i, & \text{wenn } \alpha < \beta. \end{cases}$$

Aus dieser Relation leite ich dann die folgenden ab:

$$(43.) \quad \begin{cases} \sum_a (K_{a,c} J_{a,c'} - J_{a,c} K_{a,c'}) = 0 \\ \sum_a (K'_{a,c} J'_{a,c'} - J'_{a,c} K'_{a,c'}) = 0 \\ \sum_a (K_{a,c} J'_{a,c'} - J_{a,c} K'_{a,c'}) = 0, \quad \text{wenn } c' \geqslant c, \\ \sum_a (K_{a,c} J'_{a,c} - J_{a,c} K'_{a,c}) = \tfrac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

Diese Relationen, deren Anzahl $= (2n-1)n$ ist, entsprechen der bekannten *Legendre*schen Gleichung zwischen den ganzen elliptischen Integralen erster und zweiter Gattung. Ich habe den Beweis derselben in einer Programm-Abhandlung (Braunsberg 1849) veröffentlicht, in welcher ich zugleich über die Resultate, zu welchen ich in der Theorie der Abelschen Functionen gekommen bin, einige vorläufige Notizen gab; mit der Anzeige, dafs ich diese Resultate in einer ausführlichen Schrift darzustellen gedenke: ein Vorhaben, dessen Verwirklichung durch eine Krankheit, die mehre Jahre lang mich der Arbeit völlig entzog, bisher vereitelt wurde.

Mit Hülfe der aufgestellten Relationen kann man nun aus der Gleichung (41) folgende zwei allgemeinere Gleichungen herleiten.

Es sei wieder

$$\begin{aligned} \omega_a &= m_1 K_{a,1} + m_2 K_{a,2} + \cdots + m_n K_{a,n} \\ \omega'_a &= n_1 K'_{a,1} + n_2 K'_{a,2} + \cdots + n_n K'_{a,n} \end{aligned}$$

und

$$(44.) \quad \begin{cases} \varepsilon_a = m_1 J_{a,1} + m_2 J_{a,2} + \cdots + m_n J_{a,n} \\ \varepsilon'_a = n_1 J'_{a,1} + n_2 J'_{a,2} + \cdots + n_n J'_{a,n}, \end{cases}$$

(unter $m_1, m_2, \ldots, n_1, n_2, \ldots$ beliebige ganze Zahlen verstanden). Dann hat man

$$\mathrm{Al}(u_1 + 2\omega_1, \ldots) = e^{-2\sum_a \varepsilon_a (u_a + \omega_a)} . \mathrm{Al}(u_1, \ldots)$$

$$(45.) \quad \mathrm{Al}(u_1 + 2\omega_1' i, \ldots) = e^{-2\sum_a \varepsilon_a' (u_a + \omega_a' i) i} . \mathrm{Al}(u_1, \ldots),$$

und erhält mittels (17) ähnliche Formeln auch für $\mathrm{Al}(u_1, \ldots)_a$.

Ich führe jetzt statt $u_1, u_2, \ldots, u_n$, n andere Veränderliche $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ein; mittels der Gleichungen

$$(46.) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{1}{\pi}(K_{1,1} v_1 + K_{1,2} v_2 + \cdots + K_{1,n} v_n) \\ u_2 = \frac{1}{\pi}(K_{2,1} v_1 + K_{2,2} v_2 + \cdots + K_{2,n} v_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n = \frac{1}{\pi}(K_{n,1} v_1 + K_{n,2} v_2 + \cdots + K_{n,n} v_n). \end{cases}$$

Aus denselben mögen sich

$$(47.) \quad \begin{cases} v_1 = (G_{1,1} u_1 + G_{2,1} u_2 + \cdots + G_{n,1} u_n)\pi \\ v_2 = (G_{1,2} u_1 + G_{2,2} u_2 + \cdots + G_{n,2} u_n)\pi \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n = (G_{1,n} u_1 + G_{2,n} u_2 + \cdots + G_{n,n} a_n)\pi \end{cases}$$

ergeben. Sodann leite ich aus den Gleichungen (43) die folgenden ab:

$$(48.) \quad \sum_c G_{a,c} J_{a',c} = \sum_c G_{a',c} J_{a,c},$$

$$(49.) \quad \sum_a G_{a\,c} K'_{a,c'} = \sum_a G_{a,c'} K'_{a,c}.$$

Setzt man daher

$$(50.) \quad \begin{cases} \varepsilon_{a,c} = \sum_{c'} G_{a,c'} J_{c,c'}, \\ \delta_{a,c} = \sum_{c'} G_{c',a} K'_{c',c} . \pi, \\ \sigma_{a,c} = G_{a,c} . \pi, \end{cases}$$

so hat man

$$(51.) \quad \varepsilon_{a,c} = \varepsilon_{c,a}, \quad \delta_{a,c} = \delta_{c,a},$$

und die obigen Relationen geben

$$(52.) \quad \begin{cases} J_{a,c} = \sum_{c'} \varepsilon_{a,c'} K_{c',c}, \\ J'_{a,c} = \frac{1}{2}\sigma_{a,c} + \sum_{c'} \varepsilon_{a,c'} K'_{c',c}, \\ K'_{a,c} = \frac{1}{\pi} \sum_{c'} \delta_{a,c'} K_{c',c}. \end{cases}$$

Bildet man nun ferner die homogenen Functionen zweiten Grades von $u_1, u_2, \ldots$:

$$E(u_1, u_2, \ldots) = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha,c} \varepsilon_{\alpha,c} u_\alpha u_c,$$

so läfst sich mit Hülfe der vorhergehenden Gleichungen zeigen, dafs

$$(53.) \quad E(u_1 + 2\omega_1, \ldots) = E(u_1, \ldots) + 2 \sum_\alpha \varepsilon_\alpha (u_\alpha + \omega_\alpha)$$

ist. Hieraus folgt, vermöge der ersten Gleichung (Nr. 45), wenn man

$$(54.) \quad g \cdot e^{E(u_1, u_2, \ldots)} \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots) = \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots)$$

setzt, wo g eine Constante bedeutet:

$$(55.) \quad \mathrm{Jc}(v_1 + 2\mathfrak{m}_1\pi, v_2 + 2\mathfrak{m}_2\pi, \ldots) = \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots).$$

Ich nenne diese Function von $v_1, v_2, \ldots$ die *Jacobi*sche, weil sie für $n = 1$ von *Jacobi* in die Analysis eingeführt ist. Diesem Namen entsprechend ist das Zeichen J angenommen. Was überhaupt die Rechtfertigung der angenommenen Zeichen betrifft, wird die ausführlichere Abhandlung anzeigen.

Die zweite der angeführten Gleichungen giebt aber, wenn

$$\delta_\alpha = \mathfrak{n}_1 \delta_{\alpha,1} + \mathfrak{n}_2 \delta_{\alpha,2} + \cdots + \mathfrak{n}_n \delta_{\alpha,n}$$

gesetzt wird:

$$(56.) \quad \mathrm{Jc}(v_1 + \delta_1 i, v_2 + \delta_2 i, \ldots) = e^{-2\sum_\alpha \mathfrak{n}_\alpha (v_\alpha + \delta_\alpha i) i} \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots).$$

Nun läfst sich beweisen, dafs jede Function, welche die in (55) ausgesprochene Eigenschaft *und überdies*, gleichwie $\mathrm{Jc}(v_1, \ldots)$, *den Character einer ganzen Function hat*, wie ich denselben eben erklärte, durch eine unendliche, nicht nur für reelle, sondern auch für alle imaginären Werthe von $v_1, v_2, \ldots$ convergirende Reihe von der Form

$$\mathrm{S}\left\{A_{\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_n} e^{(\mathfrak{n}_1 v_1 + \mathfrak{n}_2 v_2 + \cdots + \mathfrak{n}_n v_n) i}\right\}$$

sich darstellen läfst, in welcher Formel $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots \mathfrak{n}_n$ veränderliche ganze Zahlen bedeuten, deren jede, unabhängig von den übrigen, alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen hat. Für die Function Jc giebt die Gleichung (56) die Bestimmung der Coëfficienten, und man erhält

$$(57.) \quad \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots) = \mathrm{S}\left\{e^{[\mathfrak{n}_1(v_1 + \delta_1 i) + \mathfrak{n}_2(v_2 + \delta_2 i) + \cdots + \mathfrak{n}_n(v_n + \delta_n i)] i}\right\},$$

oder auch

$$(58.) \quad \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots) = \mathrm{S}\left\{e^{-\sum_{\alpha,c} \mathfrak{n}_\alpha \mathfrak{n}_c \delta_{\alpha,c}} \cos(\mathfrak{n}_1 v_1 + \mathfrak{n}_2 v_2 + \cdots + \mathfrak{n}_n v_n)\right\}.$$

Eigentlich wäre der Ausdruck rechts noch mit einer willkührlichen Constante

zu multipliciren; was aber wegen der willkührlichen Gröfse g unterbleiben kann. Der Coëfficient g in (54) wird dadurch bestimmt, dafs für $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots, u_n = 0$, $\mathrm{Al}(u_1, \ldots) = 1$ wird. Hiernach findet sich:

$$(59.) \qquad \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots) = e^{-E(u_1, u_2, \ldots)} \cdot \frac{\mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots)}{\mathrm{Jc}(o, o, \ldots)}$$

$$v_a = \sum_c \sigma_{c,a} u_c.$$

Für die Functionen $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_a$ erhält man ferner, mit Hülfe der Gleichungen (35), folgende Ausdrücke. Es sei

$$\overset{a}{K}_a = \mu_1 K_{a,1} + \mu_2 K_{a,2} + \cdots + \mu_n K_{a,n} - (\nu_1 K'_{a,1} + \nu_2 K'_{a,2} + \cdots + \nu_n K'_{a,n}) i,$$

wo jede der Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \nu_1, \nu_2, \ldots$ entweder $= 1$ oder $= 0$ ist und mittels der Formeln gefunden wird. Ferner sei

$$\delta_a = \nu_1 \delta_{a,1} + \nu_2 \delta_{a,2} + \cdots + \nu_n \delta_{a,n},$$

so ist

$$(60.) \qquad e^{E(u_1, u_2, \ldots)} \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_a = \frac{e^{\frac{1}{2}\sum_a \nu_a (v_a - \mu_a \pi + \frac{1}{2} \overset{a}{\delta}_a i) i}}{\mathrm{Jc}(o, o, \ldots)} \mathrm{Jc}(v_1 - \mu_1 \pi + \delta_1 i, \ldots).$$

Es ist aber, wenn $\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 + \cdots + \mu_n \nu_n = \lambda$ gesetzt wird und

I. *λ ungerade ist:*

$$(61.) \quad (-1)^{\frac{1}{2}(1-\lambda)} e^{\frac{1}{2}\sum \nu_a (v_a - \mu_a \pi + \frac{1}{2}\delta_a i) i} \mathrm{Jc}(v_1 - \mu_1 \pi + \delta_1 i, \ldots) = \mathrm{S}\left\{(-1)^{\mu_1 \mathfrak{n}_1 + \cdots + \mu_n \mathfrak{n}_n} e^{-\sum_{a,c} (\mathfrak{n}_a + \frac{1}{2}\nu_a)(\mathfrak{n}_c + \frac{1}{2}\nu_c)\delta_{a,c}} \cdot \sin\left[(\mathfrak{n}_1 + \tfrac{1}{2}\nu_1) v_1 + \cdots\right]\right\}.$$

II. *Wenn λ gerade ist:*

$$(62.) \quad (-1)^{\frac{1}{2}\lambda} e^{\frac{1}{2}\sum \nu_a (v_a - \mu_a \pi + \frac{1}{2}\delta_a i) i} \mathrm{Jc}(v_1 - \mu_1 \pi + \delta_1 i, \ldots) = \mathrm{S}\left\{(-1)^{\mu_1 \mathfrak{n}_1 + \cdots + \mu_n \mathfrak{n}_n} e^{-\sum_{a,c} (\mathfrak{n}_a + \frac{1}{2}\nu_a)(\mathfrak{n}_c + \frac{1}{2}\nu_c)\delta_{a,c}} \cdot \cos\left[(\mathfrak{n}_1 + \tfrac{1}{2}\nu_1) v_1 + \cdots\right]\right\}.$$

Setzt man ferner

$$\mathrm{al}(u_1, u_2 \ldots)_{\alpha,\beta} = \frac{\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta}}{\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)},$$

so giebt der Ausdruck rechts in der Gleichung (60) den Werth von

$$e^{E(u_1, \ldots)} \mathrm{Al}(u_1, \ldots)_{\alpha,\beta},$$

wenn man für jede der Zahlen $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2$ u. s. w. die *Summe* derjenigen beiden Werthe setzt, die ihr für α und für β zukommen.

Führt man statt $v_1, v_2, \ldots$ wieder $u_1, u_2, \ldots$ ein, so erhält man noch folgende bemerkenswerthe Ausdrücke.

Es sei

$$\overset{\alpha}{K}_{\mathfrak{a}} = \overset{\alpha}{\omega}_{\mathfrak{a}} - i\overset{\alpha}{\omega}'_{\mathfrak{a}},$$

wo dann

$$\overset{0}{\omega}_{\mathfrak{a}} = \overset{1}{\omega}_1, \quad \overset{2}{\omega}_{\mathfrak{a}} = \overset{3}{\omega}_{\mathfrak{a}}, \quad \ldots, \quad \overset{2n-2}{\omega}_{\mathfrak{a}} = \overset{2n-1}{\omega}_{\mathfrak{a}}, \quad \overset{2n}{\omega}_{\mathfrak{a}} = 0,$$

$$\overset{0}{\omega}'_{\mathfrak{a}} = 0, \quad \overset{1}{\omega}'_{\mathfrak{a}} = \overset{2}{\omega}'_{\mathfrak{a}}, \quad \overset{3}{\omega}'_{\mathfrak{a}} = \overset{4}{\omega}'_{\mathfrak{a}}, \quad \ldots, \quad \overset{2n-1}{\omega}'_{\mathfrak{a}} = \overset{2n}{\omega}'_{\mathfrak{a}},$$

$$\overset{2c-1}{\omega}_{\mathfrak{a}} = K_{\mathfrak{a},c} + K_{\mathfrak{a},c+1} + \cdots + K_{\mathfrak{a},n}$$

$$\overset{2c}{\omega}'_{\mathfrak{a}} = K'_{\mathfrak{a},c}$$

ist. Ferner sei

$$\sigma_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{n}_1\sigma_{\mathfrak{a},1} + \mathfrak{n}_2\sigma_{\mathfrak{a},2} + \cdots + \mathfrak{n}_n\sigma_{\mathfrak{a},n},$$
$$\omega'_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{n}_1 K'_{\mathfrak{a},1} + \mathfrak{n}_2 K'_{\mathfrak{a},2} + \cdots + \mathfrak{n}_n K'_{\mathfrak{a},n},$$

so ist

$$\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha} = \frac{\mathrm{S}\left\{e^{-\sum\limits_{\mathfrak{a}}(\sigma_{\mathfrak{a}} + \frac{1}{2}\overset{\alpha}{\sigma}_{\mathfrak{a}})(\omega'_{\mathfrak{a}} + \frac{1}{2}\overset{\alpha}{\omega}')} \cdot \cos\left[\sum\limits_{\mathfrak{a}}(\sigma_{\mathfrak{a}} + \tfrac{1}{2}\overset{\alpha}{\sigma}_{\mathfrak{a}})(u_{\mathfrak{a}} - \overset{\alpha}{\omega}_{\mathfrak{a}})\right]\right\}}{\mathrm{S}\left\{e^{-\sum\limits_{\mathfrak{a}}\sigma_{\mathfrak{a}}\omega'_{\mathfrak{a}}} \cdot \cos\sum\sigma_{\mathfrak{a}}u_{\mathfrak{a}}\right\}}.$$

Das Zeichen S bezieht sich wieder auf die in den Ausdrücken $\sigma_{\mathfrak{a}}$, $\omega'_{\mathfrak{a}}$ enthaltenen Zahlen $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots$; $\overset{\alpha}{\sigma}_{\mathfrak{a}}$ aber bedeutet denjenigen Werth von $\sigma_{\mathfrak{a}}$, den man erhält, wenn man für $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots$ die Werthe nimmt, welche $\omega'_{\mathfrak{a}}$ gleich $\overset{\alpha}{\omega}'_{\mathfrak{a}}$ machen. Und wenn man in dem vorstehenden Ausdrucke an die Stelle von $\overset{\alpha}{\sigma}_{\mathfrak{a}}, \overset{\alpha}{\omega}_{\mathfrak{a}}, \overset{\alpha}{\omega}'_{\mathfrak{a}}$ die Summen

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{\mathfrak{a}} + \overset{\beta}{\sigma}_{\mathfrak{a}}, \quad \overset{\alpha}{\omega}_{\mathfrak{a}} + \overset{\beta}{\omega}_{\mathfrak{a}}, \quad \overset{\alpha}{\omega}'_{\mathfrak{a}} + \overset{\beta}{\omega}'_{\mathfrak{a}}$$

setzt, so stellt er die Function $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta}$ dar.

Ähnliche Darstellungen der *Abel*schen Functionen, wie die hier angegebenen, existiren noch unzählig viele. Namentlich giebt es, wie bei den elliptischen Functionen, noch eine Darstellungs-Art, bei welcher an die Stelle der *cyklischen* Functionen sin, cos die entsprechenden *hyperbolischen* treten. Sodann habe ich in meiner Abhandlung auch ausgeführt, wie sich jeder aus *Abel*schen Functionen auf rationale Weise gebildete Ausdruck als Quotient zweier Reihen von ganz ähnlicher Form darstellen läfst; und dadurch zugleich die *Transformation der Abelschen Functionen* vorbereitet.

Saline Westerkotten in Westfalen, 11. September 1853.

Anmerkung. Die schliefslichen Resultate des Obigen finden sich auch schon in einer Gelegenheitsschrift des Herrn Verfassers, datirt vom 17. Juli 1849.

18.

Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies.

(Par M. *Hermite* à Paris.)

Mr. *Gauss* a distingué les formes quadratiques ternaires, et *définies*, et *indéfinies*, suivant qu'elles sont réductibles par une substitution réelle aux formes $\pm(x^2+y^2+z^2)$ et $\pm(x^2+y^2-z^2)$. Nous considérerons dans cette note, les formes $f = ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'xz+2b''xy$, réductibles à $X^2+Y^2-Z^2$; et tout ce que nous en dirons s'appliquera de soi même à l'espèce des formes indéfinies qui appartiennent à l'autre type $-x^2-y^2+z^2$. Il est bon cependant d'observer que ces deux types sont essentiellement distincts l'un de l'autre, c. à d. qu'il est impossible de trouver aucune substitution réelle qui change $x^2+y^2-z^2$ en $-X^2-Y^2+Z^2$. Le Déterminant, ou d'après la nouvelle dénomination de M. *Sylvester*, *l'Invariant* de f, sera:

$$\Delta = ab^2+a'b'^2+a''b''^2-2bb'b''-aa'a'';$$

la forme adjointe g sera:

$$g = \frac{d\Delta}{da}x^2+\frac{d\Delta}{da'}y^2+\frac{d\Delta}{da''}z^2+\frac{d\Delta}{db}yz+\frac{d\Delta}{db'}xz+\frac{d\Delta}{db''}xy.$$

En même temps que la forme indéfinie f, nous considérerons la forme *définie*

$$\varphi = f+2(\lambda x+\mu y+\nu z)^2,$$

où λ, μ, ν, sont des indéterminées réelles, assujeties à vérifier la condition

$$g(\lambda,\mu,\nu) = -\Delta.$$

Cela étant, on concevra qu'on calcule la suite infinie des substitutions propres à reduire φ, lorsque les indéterminées λ, μ, ν, passent par tous les états possibles de grandeur. Chacune de ces substitutions faite dans f, donnera une certaine transformée. Nous désignérons leur ensemble par le symbole (f), et nous aurons les propositions suivantes:

I.

„Si deux formes ternaires f, et F, sont équivalentes, (f) et (F), „contiendront les mêmes formes et seront identiques."

II.

„Si la forme ternaire f, a pour coefficients des nombres entiers, „(f) ne contiendra qu'un nombre *essentiellement limité* de transformées „distinctes."

Effectivement, si l'on représente par $F = \begin{pmatrix} A, A', A'' \\ B, B', B'' \end{pmatrix}$ l'une quelconque des formes contenues dans (f), on a ce théorème.

III.

„Les cinq expressions

$$AB^2,\ A'B''^2,\ A''B'''^2,\ BB'B'',\ AA'A'',$$

„sont comprises entre les limites $+2\Delta$ et -2Δ."

De là suit, que la totalité des formes pour lesquelles Δ est le même, ne donneront qu'un nombre fini de symboles (f) distincts les uns des autres, c. à d. que les formes ternaires indéfinies de même Invariant, ne donnent jamais qu'un nombre limité de classes.

IV.

„Les substitutions propres à reduire φ, contiendront toutes les sub- „stitutions qui peuvent changer en elles mêmes, les diverses formes de (f)."

Le calcul numérique de la réduction continuelle de la forme φ, lorsque λ, μ, ν, passent par touts les états de grandeur, sous la condition $g(\lambda, \mu, \nu) = -\Delta$, m'a conduit à de longues et pénibles recherches, dont le théorème suivant est le point de départ:

„Lorsque φ cesse d'être reduit par une variation infiniment petite „de λ, μ, ν, la substitution qu'il faut employer pour le reduire de nouveau, „est l'une des 62 substitutions d'*Eisenstein*, par lesquelles une forme „définie reduite, se change en elle même."

La même proposition a encore lieu à l'égard de cet autre genre de formes φ, savoir:

$$\varphi = \lambda(ax + a'y + a''z)^2 + \mu(bx + b'y + b''z)^2 + \nu(cx + c'y + c''z)^2,$$

que j'ai introduites dans l'étude des formes cubiques

$$f = (ax + a'y + a''z)(bx + b'y + b''z)(cx + c'y + c''z).$$

J'espère pouvoir donner dans une autre occasion le résultat de mes recherches sur cette question si difficile; mais pour approfondir la nature des substitutions qui changent en elle même une forme indéfinie, j'ai employé l'analyse suivante.

Étant proposé de découvrir la substitution de x, y, z, en X, Y, Z, qui donne identiquement

$$(1.) \quad f(x, y, z) = f(X, Y, Z),$$

j'imagine que les trois premières variables, ainsi que les trois dernières, soient exprimées par des indéterminées auxiliaires ξ, η, ζ, et cela de manière qu'on ait

$$(2.) \quad \begin{cases} x+X = 2\xi, \\ y+Y = 2\eta, \\ z+Z = 2\zeta. \end{cases}$$

Sous ces conditions on va voir qu'il est facile d'obtenir les expressions de x, y, z, et X, Y, Z, en ξ, η, ζ. Effectivement, il viendra en premier lieu:

$$(3.) \quad f(2\xi - X, 2\eta - Y, 2\zeta - Z) = f(X, Y, Z),$$

d'où, en developpant et reduisant:

$$(4.) \quad 2f(\xi, \eta, \zeta) = X\frac{df}{d\xi} + Y\frac{df}{d\eta} + Z\frac{df}{d\zeta}.$$

Or il est visible qu'on satisfera de la manière la plus générale à cette équation, en prennant

$$(5.) \quad \begin{cases} X = \xi + \nu\frac{df}{d\eta} - \mu\frac{df}{d\zeta}, \\ Y = \eta - \nu\frac{df}{d\xi} + \lambda\frac{df}{d\zeta}, \\ Z = \zeta + \mu\frac{df}{d\xi} - \lambda\frac{df}{d\eta}, \end{cases}$$

λ, μ, ν, désignant trois quantités arbitaires. Réciproquement, si l'on a vérifié ainsi l'équation (4), on en conclura nécessairement l'équation (3). Les formules générales pour la transformation en elle même de la forme f, s'obtiendront donc en résolvant les équations (5) par rapport à ξ, η, ζ, et substituant les valeurs obtenues dans les relations

$$(6.) \quad \begin{cases} x = 2\xi - X, \\ y = 2\eta - Y, \\ z = 2\zeta - Z. \end{cases}$$

Mais la conclusion suivante à laquelle je suis arrivé d'abord par une analyse plus difficile, n'exige pas qu'on fasse ce calcul. Ajoutons les équations (5), après les avoir respectivement multipliées par λ, μ, ν, il viendra:

$$(7.) \quad \lambda X + \mu Y + \nu Z = \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta,$$

et on en déduit par les équations (6):

$$\lambda X+\mu Y+\nu Z = \lambda x+\mu y+\nu z.$$

Voici donc une fonction linéaire qui se change en elle-même par la substitution qui change aussi la forme f en elle-même. Cela posé, il est visible qu'au point de vue de la recherche présente des substitutions à coefficients entiers, les indéterminées λ, μ, ν, doivent avoir des valeurs rationnelles; ainsi l'on peut faire ces quantités proportionnelles à trois entiers l, m, n, sans diviseur commun. D'après cela, choisissant six autres nombres l', m', n'; l'', m'', n'', de manière que le Déterminant du système

$$\begin{matrix} l, & m, & n, \\ l', & m', & n', \\ l'', & m'', & n'', \end{matrix}$$

soit l'unité, posons

$$(8.)\quad \begin{cases} l\,x+m\,y+n\,z = u, & l\,X+m\,Y+n\,Z = U, \\ l'\,x+m'\,y+n'\,z = v, & l'\,X+m'\,Y+n'\,Z = V, \\ l''x+m''y+n''z = w; & l''X+m''Y+n''Z = W. \end{cases}$$

A la substitution proposée entre les variables x, y, z, d'une part, X, Y, Z, de l'autre, succedera une nouvelle substitution entre les deux groupes u, v, w, et U, V, W, d'une manière toute spéciale; par ce fait l'équation correspondante à (6) devient alors simplement

$$u = U.$$

Or cela équivaut à dire que pour cette substitution les indéterminées analogues à μ et ν sont nulles, l'autre restant encore arbitraire. Ainsi on en fera aisément le calcul, en employant les relations

$$u = 2\xi - U, \qquad U = \xi,$$
$$v = 2\eta - V, \quad \text{et} \quad V = \eta + \lambda\frac{dF}{d\xi},$$
$$w = 2\zeta - W; \qquad W = \zeta - \lambda\frac{dF}{d\eta},$$

dans lesquelles $F(u, v, w)$ sera la transformée de $f(x, y, z)$, obtenue par la substitution (8). Mettant $\frac{1}{2}\lambda$ à la place de λ, et posant

$$F = \begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix},$$

$$G \text{ (forme adjointe de } F) = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}, & \mathfrak{A}', & \mathfrak{A}'' \\ \mathfrak{B}, & \mathfrak{B}', & \mathfrak{B}'' \end{pmatrix},$$

on trouvera:

$$u = U,$$

$$v = \frac{2\lambda(B' - \lambda\mathfrak{B}'')}{1-\lambda^2\mathfrak{A}}U + \frac{(1-2\lambda B+\lambda^2\mathfrak{A})V - 2\lambda A''.W}{1-\lambda^2\mathfrak{A}},$$

$$w = \frac{2\lambda(B'' - \lambda\mathfrak{B}')}{1-\lambda^2\mathfrak{A}}U + \frac{2\lambda A'.V + (1+2\lambda B+\lambda^2\mathfrak{A})W}{1-\lambda^2\mathfrak{A}}.$$

Faisons encore $\frac{1+\lambda^2\mathfrak{A}}{1-\lambda^2\mathfrak{A}} = q_2\frac{2\lambda}{1-\lambda^2\mathfrak{A}} = q$, d'ou $p^2 - \mathfrak{A}q^2 = 1$, et il viendra:

$$(9.)\quad \begin{cases} u = U, \\ v = -\left(qB' - \frac{q^2}{p+1}\mathfrak{B}''\right)U + (p - Bq)V - qA''.W, \\ w = \left(qB'' - \frac{q^2}{p+1}\mathfrak{B}'\right)U + qA'V + (p + Bq)W. \end{cases}$$

Ces formules sont celles auxquelles nous voulions parvenir; elles ne contiennent de fraction, que la quantité $\frac{q^2}{p+1}$, qui peut ne pas se reduire à un nombre entier par la seule condition $p^2 - \mathfrak{A}q^2 = 1$. Cependant, si nous employons au lieu des nombres p et q, les suivants:

$$P = p^2 + \mathfrak{A}q^2, \qquad Q = 2pq,$$

qui donnent aussi $P^2 - \mathfrak{A}Q^2 = 1$, on trouvera alors:

$$\frac{Q^2}{P+1} = \frac{2p^2q^2}{p^2+\mathfrak{A}q^2+1} = 2q^2,$$

et la formule de substitution ne renfermera plus que des nombres entiers. Le nombre $\mathfrak{A}$ qui joue ici un rôle essentiel, a pour valeur $g(l, m, n)$; il doit être évidemment positif, pour que la substitution ne soit pas identique. Ce sont donc *les entiers pour lesquels la forme adjointe est positive,* qui sont les éléments essentiels de notre solution.

En résumé: si nous désignons par S la substitution (8), par Σ la substitution (9), la formule abrégée $S^{-1}\Sigma S$ donnera en nombres entiers la relation entre les deux groupes de variables, x, y, z, et X, Y, Z, par laquelle $f(x, y, z)$ se change en $f(X, Y, Z)$.

Comme conséquence de la méthode précédente, on obtient aisément les théorèmes suivants que je me bornerai à énoncer.

I.

Soit

$$\begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z, \\ y &= bX + b'Y + b''Z, \\ z &= cX + c'Y + c''Z, \end{aligned}$$

une substitution S, qui change en elle même une forme quadratique quelconque, l'équation du troisième degré, qu'on formera en égalant à zéro le déterminant du système

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & a' & a'' \\ b & b'-\lambda & b'' \\ c & c' & c''-\lambda \end{vmatrix}$$

admettra pour une de ses racines *l'unité*, et pour les autres deux valeurs réciproques.

II.

Si l'on représente ces deux racines réciproques par $\lambda = e^{\omega\sqrt{-1}}$ et $\frac{1}{\lambda} = e^{-\omega\sqrt{-1}}$, la condition pour que la substitution S, prise n fois de suite, donne en dernière lieu une substitution identique, est donnée par l'équation $n\omega = 2\pi$; et les seules valeurs possibles du nombre n, si les coefficients sont entiers, sont $n = 2, 3, 4$.

III.

Il existe un nombre infini de formes quadratiques ternaires qu'une même substitution change en elles-mêmes; et on peut les représenter ainsi:

$$f = kA^2 + lBC,$$

A, B, C, désignant trois fonctions linéaires déterminées, et k, l, deux coefficients arbitraires. Toutes les substitutions qui changent en elles-mêmes ces diverses formes, s'obtiendront en faisant

$$\begin{aligned} A &= \pm\mathfrak{A}, \\ B &= \lambda\mathfrak{B}, \\ C &= \frac{1}{\lambda}\mathfrak{C}, \end{aligned}$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, désignant trois fonctions de même forme que A, B, C, mais relatives à d'autres variables, et λ une constante arbitraire.

Paris, Mai 1853.

19.

Sur la théorie des formes quadratiques.

(Par M. *Hermite* à Paris.)

Premier mémoire.

La méthode que j'ai exposée dans un précédent article, pour obtenir toutes les transformations en elle-même d'une forme ternaire indéfinie, exige comme élément analytique essentiel, la connaissance des systèmes d'entiers qui rendent positive la forme adjointe. La nature d'une pareille condition fait bien voir que les transformations *semblables* d'une forme indéfinie, impliquent nécessairement dans leurs expressions un nombre *infini* d'entiers arbitraires. Les considérations que nous développerons ici, montreront même la possibilité de donner aux formules de transformations, une expression qui offre explicitement un nombre infini d'entiers indéterminés. Nous insistons sur ce point, parcequ'il nous semble caractéristique dans la théorie des formes quadratiques. D'autres formes donnent lieu en effet à un nombre pareillement infini de substitutions semblables, mais toutes ces substitutions s'expriment avec un nombre essentiellement limité d'entiers arbitraires. Telles sont les formes du n^e degré, décomposables en n facteurs linéaires pour lesquelles on a la proposition suivante:

„Soit a le nombre des facteurs linéaires réels, b le nombre des couples „de facteurs imaginaires conjugues, et $\omega+1$ la somme de ces nombres: toutes „les substitutions semblables seront données symboliquement par la formule

$$S_1^{m_1} S_2^{m_2} S_3^{m_3} \ldots S_\omega^{m_{\omega+1}},$$

„où m_1, m_2, ... sont des entiers arbitraires, et S_1, S_2, etc. $\omega+1$ sub- „stitutions telles qu'aucune d'elles ne puisse s'exprimer par les produits „des puissances des autres."

On peut encore démontrer par rapport à ces formes, qu'en nommant S et T, deux substitutions semblables quelconques, on a toujours

$$S.T = T.S.$$

Au contraire, dans la théorie des formes ternaires indéfinies, une pareille relation n'existe qu'autant que S et T sont les puissances d'une même substitution; auquel cas la relation proposée, se vérifie d'elle même. Nous

rappellerons encore que la connaissance d'une transformation semblable d'une forme quadratique ternaire, ne définit pas complètement cette forme, de sorte qu'une substitution donnée, change en elles mêmes une infinité de formes ternaires distinctes. Par le théorème suivant, on verra au contraire comment une forme décomposable en facteurs linéaires, est connue, à un facteur numérique près, lorsqu'on donne une de ces transformations en elle-même.

Designons cette substitution par Σ, et concevons qu'on forme Σ^2, Σ^3, etc. Σ^i, en représentant par cette notation la même substitution, prise 2, 3, ... i fois de suite, et pour fixer les idées, supposons la substitution Σ donnée par les formules

$$\begin{aligned} x &= aX + a'Y + \cdots + a^{(n-1)}U, \\ y &= bX + b'Y + \cdots + b^{(n-1)}U, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u &= kX + k'Y + \cdots + k^{(n-1)}U, \end{aligned}$$

et la substitution Σ^i par les suivantes:

$$\begin{aligned} x_i &= a_i X + a_i' Y + \cdots + a_i^{(n-1)}U, \\ y_i &= b_i X + b_i' Y + \cdots + b_i^{(n-1)}U, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_i &= k_i X + k_i' Y + \cdots + k_i^{(n-1)}U. \end{aligned}$$

En formant le déterminant du système

$$\begin{vmatrix} X & Y & \cdots & U \\ x & y & & u \\ x_2 & y_2 & & u_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n-1} & y_{n-1} & \cdots & u_{n-1} \end{vmatrix},$$

on aura, à un facteur numérique près, la forme en $X, Y, \ldots U$, décomposable en facteurs linéaires, et que la substitution Σ change en elle-même. Je me reserve de démontrer prochainement ces théorèmes, sur la forme décomposable en facteurs. Le dernier exige qu'aucune puissance de la substitution Σ, ne puisse donner la substitution identique: $x = X$, $y = Y$, ... $u = U$.

Ces exemples de la grande différence que l'on doit établir entre la théorie des formes quadratiques et celle des formes décomposables en facteurs, au point de vue de la recherche des substitutions semblables, ajoutent encore, ce me semble, à l'interêt de la question difficile que nous avons abordée pour le cas des formes ternaires. En se bornant d'abord en quelque sorte au point

de vue algébrique, on est conduit, à plusieurs théorèmes qui nous ont paru dignes d'interêt, et que nous exposerons avec détail. Nous donnerons ensuite un nouveau développement aux considérations arithmétiques dejà présentées dans notre premier article.

Première partie.

I.

L'analyse que j'ai exposée precédemment dans ce journal, donne sous la forme suivante au moyen de trois indéterminées λ, μ, ν, l'expression de toutes les substitutions qui changent en elle-même une forme quadratique ternaire. Posons, en conservant les mêmes notations:

$$f = ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'xz+2b''xy = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix},$$
$$\Delta = ab^2+a'b'^2+a''b''^2-2bb'b''-aa'a'',$$

et représentons la forme adjointe par

$$g = \begin{pmatrix} b^2-a'a'', & b'^2-aa'', & b''^2-aa' \\ ab-b'b'', & a'b'-bb'', & a''b''-bb' \end{pmatrix}.$$

Nous aurons souvent besoin d'employer la valeur de g, lorsqu'on met λ, μ, ν, pour la première, la deuxième et la troisième indéterminée; nous la désignerons par γ, de sorte que

$$\gamma = g(\lambda, \mu, \nu),$$

et nous posons enfin

$$\Pi = \lambda X+\mu Y+\nu Z.$$

Cela étant, on aura identiquement:

$$f(x, y, z) = f(X, Y, Z),$$

en prennant

$$(1.)\quad \begin{cases} (1-\gamma)x = (1+\gamma)X+\left(\mu\frac{df}{dZ}-\nu\frac{df}{dY}\right)-\frac{d\gamma}{d\lambda}\cdot\Pi, \\ (1-\gamma)y = (1+\gamma)Y+\left(\nu\frac{df}{dX}-\lambda\frac{df}{dZ}\right)-\frac{d\gamma}{d\mu}\cdot\Pi, \\ (1-\gamma)z = (1+\gamma)Z+\left(\lambda\frac{df}{dY}-\mu\frac{df}{dX}\right)-\frac{d\gamma}{d\nu}\cdot\Pi. \end{cases}$$

On peut le démontrer directement de la manière suivante.

Déduisons en premier lieu des formules (1), les valeurs des trois fonctions linéaires $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$; on trouvera sans peine

$$(2.)\quad \begin{cases} (1-\gamma)\dfrac{df}{dx} = (1+\gamma)\dfrac{df}{dX} + 2\Big(Y\dfrac{d\gamma}{d\nu} - Z\dfrac{d\gamma}{d\mu}\Big) - 4\lambda\Delta\Pi, \\ (1-\gamma)\dfrac{df}{dy} = (1+\gamma)\dfrac{df}{dY} + 2\Big(Z\dfrac{d\gamma}{d\lambda} - X\dfrac{d\gamma}{d\nu}\Big) - 4\mu\Delta\Pi, \\ (1-\gamma)\dfrac{df}{dz} = (1+\gamma)\dfrac{df}{dZ} + 2\Big(X\dfrac{d\gamma}{d\mu} - Y\dfrac{d\gamma}{d\lambda}\Big) - 4\nu\Delta\Pi, \end{cases}$$

et nous allons en conclure l'identité

$$(1-\gamma)^2\Big(x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz}\Big) = (1-\gamma)^2\Big(X\frac{df}{dX} + Y\frac{df}{dY} + Z\frac{df}{dZ}\Big).$$

Multipliant à cet effet, membre à membre, les deux premières équations de (1) et (2), nous disposerons de la manière suivante, les divers termes du produit

$$\begin{aligned} (1-\gamma)^2 x\frac{df}{dx} = {} & 2(1+\gamma)X\Big(Y\frac{d\gamma}{d\nu} - Z\frac{d\gamma}{d\mu}\Big) + (1+\gamma)\frac{df}{dX}\Big(\mu\frac{df}{dZ} - \nu\frac{df}{dY}\Big) \\ & - 4\lambda\Pi\Delta\Big(\mu\frac{df}{dZ} - \nu\frac{df}{dY}\Big) - 2\frac{d\gamma}{d\lambda}\cdot\Pi\Big(Y\frac{d\gamma}{d\nu} - Z\frac{d\gamma}{d\mu}\Big) \\ & + (1+\gamma)^2 X\frac{df}{dX} + 2\Big(\mu\frac{df}{dZ} - \nu\frac{df}{dY}\Big)\Big(Y\frac{d\gamma}{d\nu} - Z\frac{d\gamma}{d\mu}\Big) \\ & + 4\lambda\frac{d\gamma}{d\lambda}\cdot\Delta\Pi^2 - 4(1+\gamma).\Delta\lambda X.\Pi - (1+\gamma)\frac{d\gamma}{d\lambda}\cdot\frac{df}{dX}\cdot\Pi, \end{aligned}$$

et nous concevrons qu'on ait opéré de même pour les produits $(1-\gamma)^2 y\dfrac{df}{dy}$, $(1-\gamma)^2 z\dfrac{df}{dz}$.

Or en ajoutant membre à membre les équations ainsi formées, on va voir se présenter diverses sommes partielles de termes dont l'évaluation est très facile. Considérons d'abord le premier terme mis en évidence dans $(1-\gamma)^2 x\dfrac{df}{dx}$, savoir $2(1+\gamma)X\Big(Y\dfrac{d\gamma}{d\nu} - Z\dfrac{d\gamma}{d\mu}\Big)$: ses analogues dans les valeurs de $(1-\gamma)^2.y\dfrac{df}{dy}$ et $(1-\gamma)^2 z\dfrac{df}{dz}$, seront $2(1+\gamma).Y\Big(Z\dfrac{d\gamma}{d\lambda} - X\dfrac{d\gamma}{d\nu}\Big)$ et $2(1+\gamma)Z\Big(X\dfrac{d\gamma}{d\mu} - Y\dfrac{d\gamma}{d\lambda}\Big)$, et leur somme que nous désignerons par le signe Σ mis devant le premier terme, s'exprime évidemment par un déterminant à trois colonnes, de sorte qu'on a

$$\Sigma 2(1+\gamma).X.\Big(Y\frac{d\gamma}{d\nu} - Z\frac{d\gamma}{d\mu}\Big) = 2(1+\gamma)\begin{vmatrix} X, & X, & \dfrac{df}{dX} \\ Y, & Y, & \dfrac{df}{dY} \\ Z, & Z, & \dfrac{df}{dZ} \end{vmatrix} = 0,$$

puisque deux colonnes du déterminant sont identiques. Or on trouvera de même:

$$\Sigma(1+\gamma)\frac{df}{dX}\left(\mu\frac{df}{dZ}-\nu\frac{df}{dY}\right)=(1+\gamma)\begin{vmatrix}\frac{df}{dX},&\frac{df}{dX},&\lambda\\ \frac{df}{dY},&\frac{df}{dY},&\mu\\ \frac{df}{dZ},&\frac{df}{dZ},&\nu\end{vmatrix}=0,$$

$$\Sigma 4\lambda\Pi\Delta\left(\mu\frac{df}{dZ}-\nu\frac{df}{dY}\right)=4\Pi\Delta\begin{vmatrix}\lambda,&\lambda,&\frac{df}{dX}\\ \mu,&\mu,&\frac{df}{dY}\\ \nu,&\nu,&\frac{df}{dZ}\end{vmatrix}=0,$$

$$\Sigma\Pi\cdot\frac{d\gamma}{d\lambda}\left(Y\frac{d\gamma}{d\nu}-Z\frac{d\gamma}{d\mu}\right)=\Pi\begin{vmatrix}\frac{d\gamma}{d\lambda},&\frac{d\gamma}{d\lambda},&X\\ \frac{d\gamma}{d\mu},&\frac{d\gamma}{d\mu},&Y\\ \frac{d\gamma}{d\nu},&\frac{d\gamma}{d\nu},&Z\end{vmatrix}=0.$$

Maintenant il est à évaluer cinq autres sommes partielles, dont aucune ne s'évanouit plus. On a d'abord

$$\Sigma(1+\gamma)^2X\frac{df}{dX}=(1+\gamma)^2\left(X\frac{df}{dX}+Y\frac{df}{dY}+Z\frac{df}{dZ}\right).$$

Pour calculer ensuite $\Sigma 2\left(\mu\frac{df}{dZ}-\nu\frac{df}{dY}\right)\left(Y\frac{d\gamma}{d\nu}-Z\frac{d\gamma}{d\mu}\right)$, on employera une formule élémentaire de la théorie des déterminants qui exprime une somme de produits de déterminants à deux colonnes par un déterminant qui est lui même à deux colonnes. En ayant aussi égard à la relation suivante qui est facile de démontrer:

$$\frac{d\gamma}{d\lambda}\cdot\frac{df}{dX}+\frac{d\gamma}{d\mu}\cdot\frac{df}{dY}+\frac{d\gamma}{d\nu}\cdot\frac{df}{dZ}=4\Delta(\lambda X+\mu Y+\nu Z),$$

on trouvera:

$$\Sigma 2\left(\mu\frac{df}{dZ}-\nu\frac{df}{dY}\right)\left(Y\frac{d\gamma}{d\nu}-Z\frac{d\gamma}{d\mu}\right)=8\Delta\Pi^2-8\gamma\left(X\frac{df}{dX}+Y\frac{df}{dY}+Z\frac{df}{dZ}\right);$$

enfin il viendra immédiatement:

$$\Sigma 4\lambda \frac{d\gamma}{d\lambda}\cdot \Delta\Pi^2 = 8\gamma.\Delta\Pi^2,$$

$$\Sigma 4(1+\gamma).\lambda X.\Pi = 4(1+\gamma)\Delta\Pi^2,$$

$$\Sigma(1+\gamma)\frac{d\gamma}{d\lambda}\cdot\frac{df}{dX}\cdot\Pi = 4(1+\gamma)\Delta\Pi^2,$$

et en ajoutant et reduisant, on obtiendra finalement, comme nous l'avons annoncé: $(1-\gamma)^2\left(X\frac{df}{dX}+Y\frac{df}{dY}+Z\frac{df}{dZ}\right)$, de sorte qu'on a identiquement:

$$f(x, y, z) = f(X, Y, Z).$$

Nous allons maintenant donner quelques conséquences de ces formules que nous venons de démontrer, pour la transformation en elle même d'une forme ternaire.

II.

La première de ces conséquences est le théorème exprimé par l'égalité

$$\lambda x+\mu y+\nu z = \lambda X+\mu Y+\nu Z,$$

et que nous avons précédemment fait connaître. Nous y joindrons la remarque suivante.

Selon que la substitution par laquelle f se change en elle même, est au déterminant $+1$ ou -1, il existe une fonction linéaire, que la même substitution réproduit identiquement, et reproduit changée de signe.

III.

En mettant en évidence les indéterminées X, Y, Z, dans les formules (1), de sorte qu'elles deviennent:

$$x = aX+a'Y+a''Z,$$
$$y = bX+b'Y+b''Z,$$
$$z = cX+c'Y+c''Z,$$

les racines de l'équation du troisième degré que l'on forme en égalant à zéro le déterminant du système

$$\begin{vmatrix} a-t, & a', & a'' \\ b, & b'-t, & b'' \\ c, & c', & c''-t \end{vmatrix},$$

seront:

$$t=1, \quad t=\frac{1-\sqrt{\gamma}}{1+\sqrt{\gamma}}, \quad t=\frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}}.$$

Ainsi on voit que cette équation est *réciproque;* comme nous l'avons déjà dit.

IV.

En formant l'expression $x+\frac{1}{2}\left(\nu\frac{df}{dy}-\mu\frac{df}{dz}\right)$, on trouvera qu'elle reproduit une expression de même nature en X, Y, Z, mais où les signes de μ et ν, sont changés, de sorte qu'on obtient:

$$x+\tfrac{1}{2}\left(\nu\frac{df}{dy}-\mu\frac{df}{dz}\right)=X-\tfrac{1}{2}\left(\nu\frac{df}{dY}-\mu\frac{df}{dZ}\right),$$

et on trouvera de même:

$$y+\tfrac{1}{2}\left(\lambda\frac{df}{dz}-\nu\frac{df}{dx}\right)=Y-\tfrac{1}{2}\left(\lambda\frac{df}{dZ}-\nu\frac{df}{dX}\right),$$

$$z+\tfrac{1}{2}\left(\mu\frac{df}{dx}-\lambda\frac{df}{dy}\right)=Z-\tfrac{1}{2}\left(\mu\frac{df}{dX}-\lambda\frac{df}{dY}\right).$$

Ces formules montrent, qu'en désignant par S la substitution (1), S^{-1}, se déduira immédiatement de S, en y changeant λ, μ, ν, de signe.

V.

Faisons suivre S d'une nouvelle substitution S', où l'on aurait mis λ', μ', ν', au lieu de λ, μ, ν. La substitution composée $S.S'$ changeant f en elle même, sera nécessairement comprise dans la même forme analytique que S et S', et devra se déduire des formules (1), en mettant au lieu de λ, μ, ν, des quantités $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, fonctions de λ, μ, ν, et de λ', μ', ν'. Or voici l'expression de ces quantités.

Posons:

$$l=\mu\nu'-\nu\mu',$$
$$m=\nu\lambda'-\lambda\nu',$$
$$n=\lambda\mu'-\mu\lambda',$$

$$L=al+b''m+b'n=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{df}{dl},$$

$$M=b''l+a'm+bn=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{df}{dm},$$

$$N=b'l+bm+a''n=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{df}{dn},$$

et

$$\Gamma=\tfrac{1}{2}\left(\lambda'\frac{d\gamma}{d\lambda}+\mu'\frac{d\gamma}{d\mu}+\nu'\frac{d\gamma}{d\nu}\right),$$

on aura:

$$\mathfrak{L} = \frac{\lambda+\lambda'+L}{1+\Gamma},$$
$$\mathfrak{M} = \frac{\mu+\mu'+M}{1+\Gamma},$$
$$\mathfrak{N} = \frac{\nu+\nu'+N}{1+\Gamma}.$$

Ainsi, les fonctions linéaires que les substitutions S et S', changent en elles mêmes, étant $\lambda x+\mu y+\nu z$ et $\lambda' x+\mu' y+\nu' z$, la fonction linéaire que reproduit la substitution composée S, S', sera $\mathfrak{L}x+\mathfrak{M}y+\mathfrak{N}z$, ou, en omettant le facteur numérique $\frac{1}{1+\Gamma}$:

$$(\lambda x+\mu y+\nu z)+(\lambda' x+\mu' y+\nu' z)+(Lx+My+Nz).$$

C'est ce qu'on peut, comme on va voir, établir directement.

D'après le théorème (V.) définissons la substitution S, par les équations

$$(3.)\quad \begin{cases} x+\frac{1}{2}\left(\nu\frac{df}{dy}-\mu\frac{df}{dz}\right) = X-\frac{1}{2}\left(\nu\frac{df}{dY}-\mu\frac{df}{dZ}\right), \\ y+\frac{1}{2}\left(\lambda\frac{df}{dz}-\nu\frac{df}{dx}\right) = Y-\frac{1}{2}\left(\lambda\frac{df}{dZ}-\nu\frac{df}{dX}\right), \\ z+\frac{1}{2}\left(\mu\frac{df}{dx}-\lambda\frac{df}{dy}\right) = Z-\frac{1}{2}\left(\mu\frac{df}{dX}-\lambda\frac{df}{dY}\right), \end{cases}$$

et la substitution S' par les relations analogues

$$(4.)\quad \begin{cases} X+\frac{1}{2}\left(\nu'\frac{df}{dY}-\mu'\frac{df}{dZ}\right) = U-\frac{1}{2}\left(\nu'\frac{df}{dV}-\mu'\frac{df}{dW}\right), \\ Y+\frac{1}{2}\left(\lambda'\frac{df}{dZ}-\nu'\frac{df}{dX}\right) = V-\frac{1}{2}\left(\lambda'\frac{df}{dW}-\nu'\frac{df}{dU}\right), \\ Z+\frac{1}{2}\left(\mu'\frac{df}{dX}-\lambda'\frac{df}{dY}\right) = W-\frac{1}{2}\left(\mu'\frac{df}{dU}-\lambda'\frac{df}{dV}\right), \end{cases}$$

de sorte que $S.S'$ s'obtienne en éliminant X, Y, Z, en exprimant x, y, z, en U, V, W.

Posons ensuite, pour abréger:

$$\pi = \lambda x+\mu y+\nu z, \quad \varpi = \lambda X+\mu Y+\nu Z, \quad \Pi = \lambda U+\mu V+\nu W,$$
$$\pi' = \lambda' x+\mu' y+\nu' z, \quad \varpi' = \lambda' X+\mu' Y+\nu' Z, \quad \Pi' = \lambda' U+\mu' V+\nu' W,$$
$$\varphi = Lx+My+Nz, \quad \psi = LX+MY+NZ, \quad \Phi = LU+MV+NW,$$

nous obtiendrons immédiatement la relation

$$\pi'+\varphi = \varpi'-\psi,$$

en ajoutant les équations (3), respectivement multipliées la première par λ',

la seconde par μ' et la troisième par ν'. Si l'on opère de même sur les équations (4) avec λ, μ, ν, il viendra

$$\varpi - \psi = \Pi + \Phi.$$

Or on a à la fois

$$\pi = \varpi,$$
$$\varpi' = \Pi';$$

on en conclut la relation proposée, savoir:

$$\pi + \pi' + \varphi = \Pi + \Pi' + \Phi.$$

VI.

La substitution composée $S.S'$ peut être définie par trois relations linéaires entre π, π', φ et Π, Π', Φ. Posons à cet effet:

$$\gamma' = g(\lambda', \mu', \nu')$$

et

$$(1-\gamma')\pi = p, \qquad (1-\gamma)\Pi' = -P,$$
$$(1-\gamma)\pi' + 2(1+\Gamma)\pi = q, \qquad (1-\gamma')\Pi + 2(1+\Gamma)\Pi' = -Q,$$
$$2(\pi+\pi'+\varphi) = r, \qquad 2(\Pi+\Pi'+\Phi) = -R,$$

on aura les équations suivantes:

$$p = Q - R,$$
$$q = P - R,$$
$$r = -R.$$

Nous remarquerons encore le résultat de la substitution des variables π, π', φ, aux variables x, y, z, dans la forme ternaire proposée. En posant en premier lieu:

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \pi,$$
$$\lambda' x + \mu' y + \nu' z = \pi',$$
$$Lx + My + Nz = \varphi,$$

on a identiquement:

$$f(x, y, z).f(l, m, n) = \varphi^2 - \gamma'\pi^2 + 2\Gamma\pi\pi' - \gamma\pi'^2.$$

On trouvera encore:

$$g(x, y, z) = \Delta f(l, m, n).\zeta^2 + \gamma\xi^2 + 2\Gamma'\xi\eta + \gamma'\eta^2,$$

en employant la substitution transposée

$$x = \lambda\xi + \lambda'\eta + L\zeta,$$
$$y = \mu\xi + \mu'\eta + M\zeta,$$
$$z = \nu\xi + \nu'\eta + N\zeta.$$

D'ailleurs la forme $\begin{pmatrix} \gamma, \gamma', \Delta f(l, m, n) \\ 0, 0, \quad I' \end{pmatrix}$ est l'adjointe de $\begin{pmatrix} -\gamma', -\gamma, 1 \\ 0, \quad 0, \quad I \end{pmatrix}$.

VII.

Les propositions précédentes peuvent être présentées sous un autre point de vue, comme se rattachant à la théorie de la composition des formes. Elles nous semblent offrir en effet, les premiers exemples de l'extension de la théorie donnée par Mr. ***Gauss*** pour les formes binaires, aux formes quadratiques d'un plus grand nombre d'indéterminées. Concevons qu'au lieu des formules (1), on prenne les suivantes où l'on a supprimé le dénominateur, et introduit une nouvelle indéterminée ϱ, de sorte qu'elles deviennent homogènes relativement à λ, μ, ν, ϱ, savoir:

$$x = (\varrho^2+\gamma)X+\varrho\left(\mu\frac{df}{dZ}-\nu\frac{df}{dY}\right)-\frac{d\gamma}{d\lambda}\cdot\Pi,$$

$$y = (\varrho^2+\gamma)Y+\varrho\left(\nu\frac{df}{dX}-\lambda\frac{df}{dZ}\right)-\frac{d\gamma}{d\mu}\cdot\Pi,$$

$$z = (\varrho^2+\gamma)Z+\varrho\left(\lambda\frac{df}{dY}-\mu\frac{df}{dX}\right)-\frac{d\gamma}{d\nu}\cdot\Pi:$$

on aura

$$f(x, y, z) = f(X, Y, Z)(\varrho^2-g(\lambda, \mu, \nu))^2.$$

Ainsi toute forme ternaire est composée d'elle même et du carré de la forme quaternaire $\varrho^2-g(\lambda, \mu, \nu)$. Nous joindrons à ce théorème les résultats suivants, qui dépendent des mêmes principes. Faisons pour abréger:

$$\xi = \mu Z-\nu Y,$$
$$\eta = \nu X-\lambda Z,$$
$$\zeta = \lambda Y-\mu X,$$
$$\mathfrak{G} = \lambda\frac{dg}{dX}+\mu\frac{dg}{dY}+\nu\frac{dg}{dZ}:$$

la substitution

$$x = (\varrho^2+\gamma)X+\varrho\frac{df}{d\xi}-\lambda\mathfrak{G},$$

$$y = (\varrho^2+\gamma)Y+\varrho\frac{df}{d\eta}-\mu\mathfrak{G},$$

$$z = (\varrho^2+\gamma)Z+\varrho\frac{df}{d\zeta}-\nu\mathfrak{G},$$

donnera identiquement:

$$g(x, y, z) = g(X, Y, Z)(\varrho^2-g(\lambda, \mu, \nu))^2.$$

Soit encore

$$\mathfrak{F} = \lambda \frac{df}{dX} + \mu \frac{df}{dY} + \nu \frac{df}{dZ},$$

$$\varphi = f(\lambda, \mu, \nu).$$

En posant

$$x = (\varphi + \Delta\varrho^2) X + \varrho \frac{dg}{d\xi} - \lambda\mathfrak{F},$$

$$y = (\varphi + \Delta\varrho^2) Y + \varrho \frac{dg}{d\eta} - \mu\mathfrak{F},$$

$$z = (\varphi + \Delta\varrho^2) Z + \varrho \frac{dg}{d\zeta} - \nu\mathfrak{F},$$

on aura

$$f(x, y, z) = f(X, Y, Z)(\Delta\varrho^2 - f(\lambda, \mu, \nu))^2.$$

Ce dernier résultat, conséquence immédiate du précédent, offre sous une forme analytique nouvelle les expressions générales des substitutions semblables pour les formes ternaires; on les déduira sans peine d'ailleurs des formules (1). Enfin on trouvera:

$$g(x, y, z) = g(X, Y, Z)(\Delta\varrho^2 - f(\lambda, \mu, \nu))^2,$$

en employant la substitution

$$x = (\varphi + \Delta\varrho^2) X + \varrho\left(\mu \frac{dg}{dZ} - \nu \frac{dg}{dY}\right) - \frac{d\varphi}{d\lambda} \cdot \Pi,$$

$$y = (\varphi + \Delta\varrho^2) Y + \varrho\left(\nu \frac{dg}{dX} - \lambda \frac{dg}{dZ}\right) - \frac{d\varphi}{d\mu} \cdot \Pi,$$

$$z = (\varphi + \Delta\varrho^2) Z + \varrho\left(\lambda \frac{dg}{dY} - \mu \frac{dg}{dX}\right) - \frac{d\varphi}{d\nu} \cdot \Pi.$$

VIII.

L'étude des formes quaternaires de déterminant carré, qui viennent se présenter dans les théorèmes précédents, savoir: $\varrho^2 - g(\lambda, \mu, \nu)$ et $\Delta\varrho^2 - f(\lambda, \mu, \nu)$, conduira à d'importantes notions arithmétiques. Dans un autre travail nous essayerons d'approfondir la nature de ces formes qui nous paraissent devoir offrir une nouvelle application de l'idée ingénieuse des *nombres idéaux* de Mr. *Kummer*. Elles donnent lieu effectivement aux théorèmes de composition que nous allons énoncer, et dont on trouvera sans peine la démonstration par ce qui précède.

Posons:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= \lambda\varrho' + \lambda'\varrho + L,\\ \mathfrak{M} &= \mu\varrho' + \mu'\varrho + M,\\ \mathfrak{N} &= \nu\varrho' + \nu'\varrho + N,\\ \mathfrak{R} &= \varrho\varrho' + \Gamma,\end{aligned}$$

où L, M, N, Γ, ont la signification donnée (§. V). On aura identiquement:

$$\mathfrak{R}^2 - g(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = (\varrho^2 - g(\lambda, \mu, \nu))(\varrho'^2 - g(\lambda', \mu', \nu')).$$

En second lieu faisons:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= \lambda\varrho' + \tfrac{1}{2}\left(\mu'\frac{df}{dv} - \nu'\frac{df}{d\mu}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{dg}{d\lambda'}\varrho,\\ \mathfrak{M} &= \mu\varrho' + \tfrac{1}{2}\left(\nu'\frac{df}{d\lambda} - \lambda'\frac{df}{dv}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{dg}{d\mu'}\varrho,\\ \mathfrak{N} &= \nu\varrho' + \tfrac{1}{2}\left(\lambda'\frac{df}{d\mu} - \mu'\frac{df}{d\lambda}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{dg}{dv'}\varrho,\\ \mathfrak{R} &= \varrho\varrho' + \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu',\end{aligned}$$

on aura

$$\Delta\mathfrak{R}^2 - f(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = (\Delta\varrho^2 - f(\lambda, \mu, \nu))(\varrho'^2 - g(\lambda', \mu', \nu')).$$

Ces deux théorèmes comprennent comme cas particuliers, ceux d'***Euler*** et de ***Lagrange,*** sur le produit de deux sommes de quatre carrés, ou de deux fonctions de la forme: $x^2 + ay^2 + bz^2 + abu^2$.

IX.

Nous avons déjà dit qu'en désignant par S et S', deux substitutions semblables quelconques, on ne pouvait avoir la relation

$$S.S' = S'.S,$$

qu'en supposant S et S' exprimables par les puissances d'une même substitution. C'est ce qu'on peut établir de la manière suivante.

D'après le théorème du (§. VI), si l'on désigne par $\lambda, \mu, \nu;\ \lambda', \mu', \nu'$, les quantités qui déterminent les substitutions S et S', et par $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, celles qui déterminent la substitution composée S, S', on aura

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= \frac{\lambda + \lambda' + L}{1 + \Gamma},\\ \mathfrak{M} &= \frac{\mu + \mu' + M}{1 + \Gamma},\\ \mathfrak{N} &= \frac{\nu + \nu' + N}{1 + \Gamma}.\end{aligned}$$

Cela étant, si l'on permute simultanément λ et λ', μ et μ', ν et ν', de manière à obtenir les quantités analogues à $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, par la substitution S', S, on trouvera immédiatement que ces quantités ne diffèrent des précédentes que par les signes de L, M, N. La condition $S.S' = S'.S$ entraine donc les relations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, et par suite celles-ci: $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$, puisque le déterminant relatif aux trois fonctions linéaires L, M, N, est essentiellement différent de zéro. Or les valeurs de l, m, n, font voir que λ, μ, ν sont aussi respectivement proportionnelles à λ', μ', ν': la proposition annoncée revient donc à celle-ci: Toutes les substitutions semblables où λ, μ, ν, sont proportionnels à trois nombres constants, se reduisent aux puissances d'une seule substitution. Pour le faire voir, observons en premier lieu que ces quantités λ, μ, ν, ont nécessairement des valeurs ***rationnelles***, si la substitution est à coefficients entiers. Nous pouvons donc supposer en général:

$$\lambda = k\alpha, \quad \mu = k\beta, \quad \nu = k\gamma,$$

λ, μ, ν, étant trois entiers constants sans diviseurs communs, et k un facteur rationnel arbitraire. Cela posé, prennons six autres nombres α', β', γ'; α'', β'', γ''; de telle sorte que le déterminant du système $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$ soit l'unité, en faisant

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z &= u, \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z &= v, \\ \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z &= w: \end{aligned}$$

la forme ternaire proposée $f(x, y, z)$ se changera en une forme équivalente que nous désignerons par $F(u, v, w)$, et dont les substitutions semblables se déduiront immédiatement de celles de la proposée. Désignons en effet spécialement par S, les transformations semblables de f, où α, β, γ, sont supposés constants, k étant seul variable, les transformations semblables correspondantes de F seront données par la formule symbolique

$$\Sigma S \Sigma^{-1},$$

où Σ est la substitution employée ci-dessus, entre les variables x, y, z et u, v, w. Or il suffira de prouver que $\Sigma S \Sigma^{-1}$ est de la forme T^n; car de l'équation

$$\Sigma S \Sigma^{-1} = T^n$$

on tirera, comme on le voit, bien facilement:

$$S = \Sigma^{-1} T^n \Sigma = (\Sigma^{-1} T \Sigma)^n.$$

Or comme nous l'avons remarqué dans notre premier article, les transformations semblables de $F(u, v, w)$, données par la formule $\Sigma S \Sigma^{-1}$, sont caractérisées en ce que la fonction linéaire que ces transformations reproduisent, est simplement la variable u. Appliquant donc cette forme F aux formules générales (1), nous y devrons faire μ et ν nuls, pour en déduire l'expression particulière des transformations $\Sigma S \Sigma^{-1}$. On trouvera ainsi, en supposant $F(u, v, w) = \begin{pmatrix} A, A', A'' \\ B, B', B'' \end{pmatrix}$ et l'adjointe $= \begin{pmatrix} \mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'' \\ \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'' \end{pmatrix}$:

$$u = U,$$

$$v = \frac{(1 - 2B\lambda + \mathfrak{A}\lambda^2) V - 2A''\lambda . W - 2(B'\lambda + \mathfrak{B}''\lambda^2) U}{1 - \mathfrak{A}\lambda^2},$$

$$w = \frac{2A'\lambda . V + (1 + 2B\lambda + \mathfrak{A}\lambda^2) W + 2(B''\lambda - \mathfrak{B}'\lambda^2) U}{1 - \mathfrak{A}\lambda^2};$$

et c'est là le type des substitutions que nous devons ramener à la forme T^n. Observons à cet effet qu'en y supposant nulles les variables u et U, elle doivent fournir les substitutions semblables de la forme binaire

$$A'v^2 + 2Bvw + A''w^2.$$

Cela nous conduit à faire

$$\frac{1 + \mathfrak{A}\lambda^2}{1 - \mathfrak{A}\lambda^2} = p, \qquad \frac{2\lambda}{1 - \mathfrak{A}\lambda^2} = q,$$

p et q devant être *entiers* et vérifiant l'équation

$$p^2 - \mathfrak{A}q^2 = 1.$$

Or il vient ainsi:

$$u = U,$$

$$v = (p - Bq)V - A''qW - \left(B'q + \frac{(p-1)\mathfrak{B}''}{\mathfrak{A}}\right)U,$$

$$w = A'qV + (p + Bq)W + \left(B''q - \frac{(p-1)\mathfrak{B}'}{\mathfrak{A}}\right)U;$$

d'où l'on tire

$$\mathfrak{A}w - \mathfrak{B}'u + (B''u + A'v + Bw)\sqrt{\mathfrak{A}}$$
$$= (p + q\sqrt{\mathfrak{A}})\{\mathfrak{A}W - \mathfrak{B}'U + (B''U + A'V + BW)\sqrt{\mathfrak{A}}\}$$

et

$$\mathfrak{A}w - \mathfrak{B}'u - (B''u + A'v + Bw)\sqrt{\mathfrak{A}}$$
$$= (p - q\sqrt{\mathfrak{A}})\{\mathfrak{A}W - \mathfrak{B}'U - (B''U + A'V + BW)\sqrt{\mathfrak{A}}\}.$$

Mais on sait qu'on peut faire

$$p + q\sqrt{\mathfrak{A}} = (P + Q\sqrt{\mathfrak{A}})^n,$$

les entiers P et Q étant les moindres nombres qui vérifient la condition $P^2 - \mathfrak{A}Q^2 = 1$. La substitution considerée étant donc définie par les équations

$$u = U,$$

$$\mathfrak{A}w - \mathfrak{B}'u + (B''u + A'v + Bw)\sqrt{\mathfrak{A}} = (P + Q\sqrt{\mathfrak{A}})^n \{\mathfrak{A}W - \mathfrak{B}'U + (B''U + A'V + BW)\sqrt{\mathfrak{A}}\},$$

$$\mathfrak{A}w - \mathfrak{B}'u - (B''u + A'v + Bw)\sqrt{\mathfrak{A}} = (P - Q\sqrt{\mathfrak{A}})^n \{\mathfrak{A}W - \mathfrak{B}'U - (B''U + A'V + BW)\sqrt{\mathfrak{A}}\},$$

il est évident qu'elle résulte de la substitution particulière pour laquelle $n = 1$, prise n fois successivement.

X.

L'expression générale des transformations semblables donnée au (§. I), peut être présentée sous une forme analytique bien différente, en cherchant à mettre en évidence les fonctions qui se reproduisent à un facteur constant près; comme nous venons d'être conduit à le faire. On y parvient aisément de la manière suivante. Désignons par λ', μ', ν', trois quantités entièrement arbitraires, et employons les mêmes notations qu'au (§. V), pour désigner des expressions analytiques de même forme, savoir:

$$\pi = \lambda x + \mu y + \nu z, \qquad \Pi = \lambda X + \mu Y + \nu Z,$$
$$\pi' = \lambda' x + \mu' y + \nu' z, \qquad \Pi' = \lambda' X + \mu' Y + \nu' Z,$$
$$\varphi = Lx + My + Nz, \qquad \Phi = LX + MY + NZ;$$

nous trouverons d'abord, en ajoutant les équations (1), après les avoir respectivement multipliées par λ', μ', ν':

$$(1-\gamma)\pi' = (1+\gamma)\Pi' - 2\Phi - 2\Gamma\Pi.$$

En second lieu nous déduirons des équations (2), les suivantes:

$$(1-\gamma)\left(\mu\frac{df}{dz} - \nu\frac{df}{dy}\right) = (1+\gamma)\left(\mu\frac{df}{dZ} - \nu\frac{df}{dY}\right) + 2\gamma X - 2\frac{d\gamma}{d\lambda}\cdot\Pi,$$

$$(1-\gamma)\left(\nu\frac{df}{dx} - \lambda\frac{df}{dz}\right) = (1+\gamma)\left(\nu\frac{df}{dX} - \lambda\frac{df}{dZ}\right) + 2\gamma Y - 2\frac{d\gamma}{d\mu}\cdot\Pi,$$

$$(1-\gamma)\left(\lambda\frac{df}{dy} - \mu\frac{df}{dx}\right) = (1+\gamma)\left(\lambda\frac{df}{dY} - \mu\frac{df}{dX}\right) + 2\gamma Z - 2\frac{d\gamma}{d\nu}\cdot\Pi.$$

Puis, en les ajoutant, après les avoir multipliées, la première par λ', la seconde par μ', la troisième par ν', il viendra:

$$(1-\gamma)\varphi = (1+\gamma)\Phi - 2\gamma\Pi' + 2\Gamma\Pi.$$

Ainsi, l'introduction des quantités arbitraires λ', μ', ν' nous conduit à cette transformation remarquable des équations (1), savoir:

$$\begin{aligned} \pi &= \Pi, \\ (1-\gamma)\pi' &= -2\Gamma\Pi + (1+\gamma)\Pi' - 2\Phi, \\ (1-\gamma)\varphi &= \quad 2\Gamma\Pi - \quad 2\gamma\Pi' \quad + (1+\gamma)\Phi; \end{aligned}$$

et nous en conclurons en dernier lieu, les relations suivantes auxquelles nous voulions parvenir, et qu'on vérifiera facilement:

$$\begin{aligned} \pi &= \Pi, \\ \gamma\pi' - \Gamma\pi + \varphi\sqrt{\gamma} &= \frac{1-\sqrt{\gamma}}{1+\sqrt{\gamma}}(\gamma\Pi' - \Gamma\Pi + \Phi\sqrt{\gamma}), \\ \gamma\pi' - \Gamma\pi - \varphi\sqrt{\nu} &= \frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}}(\gamma\Pi' - \Gamma\Pi - \Phi\sqrt{\gamma}). \end{aligned}$$

Il est digne de remarque, que les coefficients de la forme ternaire, les quantités λ, μ, ν, qui definissent la substitution par laquelle cette forme se change en elle même, et enfin les quantités entièrement arbitraires λ', μ', ν', ne figurent plus dans les coefficients de ces nouvelles relations que par les deux constantes γ et Γ.

XI.

Les théorèmes de compositions relatifs aux formes quaternaires

$$\varrho^2 - g(\lambda, \mu, \nu) \quad \text{et} \quad \Delta\varrho^2 - f(\lambda, \mu, \nu),$$

donnés au (§. VIII), ont été déduits des expressions générales pour les transformations semblables des formes ternaires. Réciproquement, on peut obtenir ces expressions générales comme conséquence des théorèmes du (§. VIII) par la méthode suivante.

Considérons le produit des trois facteurs

$$(\varrho^2 - g(\lambda, \mu, \nu))(\varrho'^2 - g(\lambda', \mu', \nu'))(\varrho''^2 - g(\lambda'', \mu'', \nu'')),$$

mis sous la forme

$$\mathfrak{R}^2 - g(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

Pour obtenir les valeurs de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}$, nous poserons

$$\delta = \begin{vmatrix} \lambda, & \lambda', & \lambda'' \\ \mu, & \mu', & \mu'' \\ \nu, & \nu', & \nu'' \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} l &= \mu'\nu'' - \nu'\mu'', & l' &= \mu''\nu - \nu''\mu, & l'' &= \mu\nu' - \nu\mu', \\ m &= \nu'\lambda'' - \lambda'\nu'', & m' &= \nu''\lambda - \lambda''\nu, & m'' &= \nu\lambda' - \lambda\nu', \\ n &= \lambda'\mu'' - \mu'\lambda'', & n' &= \lambda''\mu - \mu''\lambda, & n'' &= \lambda\mu' - \mu\lambda', \end{aligned}$$

$$L = \tfrac{1}{2}\frac{df}{dl}, \quad L' = \tfrac{1}{2}\frac{df'}{dl'}, \quad L'' = \tfrac{1}{2}\frac{df''}{dl''},$$

$$M = \tfrac{1}{2}\frac{df}{dm}, \quad M' = \tfrac{1}{2}\frac{df'}{dm'}, \quad M'' = \tfrac{1}{2}\frac{df''}{dm''},$$

$$N = \tfrac{1}{2}\frac{df}{dn}, \quad N' = \tfrac{1}{2}\frac{df'}{dn'}, \quad N'' = \tfrac{1}{2}\frac{df''}{dn''},$$

$$\Gamma = \tfrac{1}{2}\Big(\lambda''\frac{d\gamma'}{d\lambda'} + \mu''\frac{d\gamma'}{d\mu'} + \nu''\frac{d\gamma'}{d\nu'}\Big),$$
$$\Gamma' = \tfrac{1}{2}\Big(\lambda\frac{d\gamma''}{d\lambda''} + \mu\frac{d\gamma''}{d\mu''} + \nu\frac{d\gamma''}{d\nu''}\Big),$$
$$\Gamma'' = \tfrac{1}{2}\Big(\lambda'\frac{d\gamma}{d\lambda} + \mu'\frac{d\gamma}{d\mu} + \nu'\frac{d\gamma}{d\nu}\Big),$$

où l'on a mis pour abréger, f, f', f''; $\gamma, \gamma', \gamma''$ pour $f(l, m, n)$, $f(l', m', n')$, $f(l'', m'', n'')$; $g(\lambda, \mu, \nu)$, $g(\lambda', \mu', \nu')$, $g(\lambda'', \mu'', \nu'')$. Cela étant, on aura les expressions suivantes:

$$\mathfrak{L} = (\varrho\varrho'\lambda'' + \varrho'\varrho''\lambda + \varrho''\varrho\lambda') + (\varrho L - \varrho' L' + \varrho'' L'') + (\lambda\Gamma - \lambda'\Gamma' + \lambda''\Gamma''),$$
$$\mathfrak{M} = (\varrho\varrho'\mu'' + \varrho'\varrho''\mu + \varrho''\varrho\mu') + (\varrho M - \varrho' M' + \varrho'' M'') + (\mu\Gamma - \mu'\Gamma' + \mu''\Gamma''),$$
$$\mathfrak{N} = (\varrho\varrho'\nu'' + \varrho'\varrho''\nu + \varrho''\varrho\nu') + (\varrho N - \varrho' N' + \varrho'' N'') + (\nu\Gamma - \nu'\Gamma' + \nu''\Gamma'').$$
$$\mathfrak{R} = \varrho\varrho'\varrho'' + \varrho\Gamma + \varrho'\Gamma' + \varrho''\Gamma'' + \Delta\delta.$$

Maintenant faisons

$$\lambda'' = -\lambda,$$
$$\mu'' = -\mu,$$
$$\nu'' = -\nu,$$
$$\varrho'' = \varrho;$$

on aura

$$L = L'', \quad L' = 0,$$
$$\Gamma = -\Gamma'', \quad \Gamma' = -g(\lambda, \mu, \nu);$$

et le déterminant δ s'évanouissant, la valeur de $\mathfrak{R}$ deviendra

$$\mathfrak{R} = \varrho'(\varrho^2 - g(\lambda, \mu, \nu)).$$

L'équation

$$\mathfrak{R}^2 - g(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = (\varrho^2 - g(\lambda, \mu, \nu))(\varrho'^2 - g(\lambda', \mu', \nu'))(\varrho''^2 - g(\lambda'', \mu'', \nu''))$$

se réduisant donc à la suivante:

$$\varrho'^2(\varrho^2 - g(\lambda, \mu, \nu))^2 - g(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = (\varrho^2 - g(\lambda, \mu, \nu))^2(\varrho'^2 - g(\lambda', \mu', \nu')),$$

donnera

$$g(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = g(\lambda', \mu', \nu)(\varrho^2 - g(\lambda, \mu, \nu))^2,$$

et l'on en conclura:

$$g\Big(\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}}, \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}, \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{R}}\Big) = g\Big(\frac{\lambda'}{\varrho'}, \frac{\mu'}{\varrho'}, \frac{\nu'}{\varrho'}\Big).$$

D'ailleurs on obtient pour $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, les expressions suivantes:

$$\mathfrak{L} = (\varrho^2 + \gamma)\lambda' + 2\varrho L - 2\lambda\Gamma,$$
$$\mathfrak{M} = (\varrho^2 + \gamma)\mu' + 2\varrho M - 2\mu\Gamma,$$
$$\mathfrak{N} = (\varrho^2 + \gamma)\nu' + 2\varrho N - 2\nu\Gamma;$$

de sorte que l'on retrouve ainsi l'un des théorèmes donnés au (§. VII). Mais il y a une autre conséquence à déduire des considérations précédentes.

Nommons respectivement S, S', S'', les transformations semblables de la forme ternaire f, qui sont définies par les quantités $\frac{\lambda}{\varrho}$, $\frac{\mu}{\varrho}$, $\frac{\nu}{\varrho}$; $\frac{\lambda'}{\varrho'}$, $\frac{\mu'}{\varrho'}$, $\frac{\nu'}{\varrho'}$; $\frac{\lambda''}{\varrho''}$, $\frac{\mu''}{\varrho''}$, $\frac{\nu''}{\varrho''}$; les quantités analogues par lesquelles sera déterminée la substitution composée $SS'S''$, seront évidemment $\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}}$, $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}$, $\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{R}}$. Or l'hypothèse admise précédemment, savoir:

$$\frac{\lambda''}{\varrho''} = -\frac{\lambda}{\varrho}, \quad \frac{\mu''}{\varrho''} = -\frac{\mu}{\varrho}, \quad \frac{\nu''}{\varrho''} = -\frac{\nu}{\varrho}$$

revient à supposer la substitution S'' l'inverse de la substitution S (voyez §. IV): donc toute substitution telle que

$$S.S'.S^{-1},$$

se tire de S', en y remplaçant $\frac{\lambda'}{\varrho'}$, $\frac{\mu'}{\varrho'}$, $\frac{\nu'}{\varrho'}$ par trois fonctions linéaires de ces quantités qui donnent précisement une transformation en elle-même de la forme adjointe.

Seconde partie.

Nous venons de résumer tout ce que nous avons pu jusqu'à présent tirer de l'étude algébrique des formules générales de substitution par lesquelles une forme ternaire quelconque se change en elle-même. Si nous nous sommes un peu étendus sur ces considérations, c'est dans l'espoir de les lier un jour par de nouvelles recherches à l'étude arithmétique des substitutions semblables, que nous avons entreprises sous un point de vue si différent; en le faisant dépendre de la réduction continuelle d'une forme ternaire définie à paramêtres variables. Afin qu'on puisse mieux saisir ce qu'il y a de général dans ce point de vue, nous réunirons ici les deux questions de l'équivalence des formes décomposables en facteurs linéaires, et de l'équivalence des formes quadratiques indéfinies, traitées par le même principe arithmétique. Dans d'autres mémoires nous donnerons les démonstrations des théorèmes que nous allons énoncer; désirant surtout en ce moment, appeler l'attention du lecteur, sur l'identité de la méthode appliquée à des genres de formes d'une nature si différente.

I.

Deux formes sont dites équivalentes, lorsqu'on peut obtenir l'une d'elles en faisant dans l'autre une substitution linéaire et homogène, à coefficients entiers et au déterminant *un*. C'est en cela du moins que consiste *l'équivalence arithmétique*. En admettant des quantités quelconques pour les coefficients de la substitution, on aura la notion de ce qu'on peut appeler *l'équivalence algébrique*. Dans le cas des formes quadratiques à un nombre quelconque n d'indéterminées, et des formes du n^e degré, décomposable en n facteurs linéaires, un seul et même fait analytique très simple déroule de cette notion. Ces formes en effet, sont toujours algébriquement équivalentes; les premières comme réductibles à une somme de n carrés $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2$, les secondes comme réductibles à un produit de n variables $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$. De là résulte pour ces deux genres de formes, l'existence d'un seul *invariant*, c. à d. d'une seule fonction des coefficients, qui la réproduit dans une transformée obtenue par une substitution algébrique, multipliée par une puissance donnée du déterminant de cette substitution. S'il s'agit d'une forme quadratique à n indéterminées $f(x_0, x_1, \ldots x_{n-1})$, nous définirons cet invariant comme le déterminant du système linéaire

$$\tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_0}, \quad \tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_1}, \quad \tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_2}, \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_n}.$$

Pour une forme décomposable en facteurs linéaires

$$F = u_0 u_1 u_2 \ldots U_{n-1},$$

où l'on suppose

$$u_i = a_i x_0 + b_i x_1 + c_i x_2 + \cdots + k_i x_{n-1},$$

nous le définirons comme le carré du déterminant relatif aux fonctions

$$u_0, \ u_1, \ u_2, \ \ldots \ u_{n-1}.$$

Dans ces deux cas, l'invariant que nous désignerons par Δ, se reproduira dans toute transformée, multiplié par le carré du déterminant de la substitution.

II.

On peut particulariser la nature de l'équivalence algébrique de deux formes, en exigeant que les coefficients de la substitution soient des quantités réelles. Sous ce point de vue, les formes dont nous nous occupons, n'offrent plus une seule espèce chacune, et en supposant leurs coefficients des quantités réelles, on a les propositions suivantes.

1°.

Les formes du n^e degré, décomposables en n facteurs linéaires, sont réductibles par des substitutions algébriques réelles, à $\frac{1}{2}(n+1)$ ou $\frac{1}{2}(n+2)$ types distincts; suivant que n est *impair* ou *pair*. L'un de ces types est encore le produit $x_0 x_1 \ldots x_{n-1}$ des variables, et les autres s'obtiendront en groupant deux à deux les indéterminées, et remplaçant successivement le produit des indéterminées d'un même groupe, par la somme de leurs carrés. Nous les nommerons en général *types factoriels*, et le nombre des facteurs d'un type, qui seront formés d'une somme de deux carrés, sera *l'indice* de ce type.

2°.

Les formes quadratiques à n indéterminées sont réductibles par des substitutions réelles à $n+1$ types distincts, dont l'un est la somme $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2$ des indéterminées, les autres s'en déduisant en faisant précéder du signe *moins* le carré de l'une de deux etc. ou de toutes les indéterminées. Nous nommerons *indice* d'un type quadratique, le nombre des carrés qui sont ainsi précédés du signe *moins*.

La proposition relative à l'équivalence réelle des formes décomposables en facteurs, revient à la notion élémentaire des racines réelles ou imaginaires des équations algébriques; celle qui concerne les formes quadratiques, à la distinction géométrique des diverses courbes ou surfaces du second degré, dans les cas de trois ou quatre indéterminées.

III.

Les considérations précédentes impliquent ce théorème, que deux types différents ne peuvent être identifiés par aucune substitution réelle; elles conduisent aussi à la recherche des conditions qui doivent être remplies par une forme, pour qu'elle soit réductible à un type donné. Pour les formes quadratiques, Mr. *Cauchy* a donné l'expression suivante de ces conditions. Soit $f(x_0, x_1, \ldots x_{n-1})$ la forme proposée, Δ_i l'invariant de la forme à i indéterminées qu'on obtient en faisant

$$x_i = 0, \quad x_{i+1} = 0, \quad x_{i+2} = 0, \quad \ldots \quad x_{n-1} = 0,$$

le nombre des termes négatifs de la suite

$$\Delta_1, \ \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \ \cdots \ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

sera immédiatement l'indice du type auquel appartient la forme proposée. Le

premier terme Δ_1 est le coefficient de x_0^2, et il faut remarquer que si l'une des quantités Δ, Δ_i, p. ex. vient à s'évanouir, on devra considérer les deux termes $\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$ et $\frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}$, comme donnant, l'un un signe *plus* et l'autre un signe *moins*. Remarquons qu'en appliquant la même règle à une transformée de f, les quantités Δ_1, Δ_2, etc. changent toutes en général, mais de manière que le nombre des termes positifs et négatifs de la nouvelle suite soit exactement le nombre des termes positifs et négatifs de l'ancienne.

IV.

Un premier point de contact entre la théorie des formes décomposables en facteurs, et la théorie des formes quadratiques, consiste en ce que la connaissance des caractères propres aux divers types quadratiques, que fournit si simplement la méthode de Mr. *Cauchy*, suffit pour arriver à la distinction des types factoriels. Soit en effet

$$F = u_0 u_1 \dots u_{n-1}$$

la forme proposée, u_i désignant la même chose qu'au (§. I), il est aisé de voir que les coefficients de la forme quadratique

$$\varphi = \left(\frac{u_0}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{u_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{u_{n-1}}{a_{n-1}}\right)^2$$

s'exprimeront rationnellement par ceux de F. ***Or le type factoriel de F, et le type quadratique de φ, ont précisément même indice.*** Alors, si l'un des deux détermine l'autre, j'ajouterai la remarque suivante. Soit ω une fonction rationnelle quelconque des quantités $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\dots$ $\frac{k}{a}$, et faisons

$$\omega_i = \theta\left(\frac{b_i}{a_i}, \frac{c_i}{a_i}, \dots \frac{k_i}{a_i}\right):$$

quel que soit l'indéterminée z, les coefficients de la forme

$$f = \frac{1}{z-\omega_0}\left(\frac{u_0}{a_0}\right)^2 + \frac{1}{z-\omega_1}\left(\frac{u_1}{a_1}\right)^2 + \frac{1}{z-\omega_2}\left(\frac{u_2}{a_2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{z-\omega_{n-1}}\left(\frac{u_{n-1}}{a_{n-1}}\right)^2$$

s'exprimeront encore rationnellement par ceux de F, où l'indice du type quadratique auquel appartient cette nouvelle forme, sera l'indice du type factoriel de F, augmenté du nombre des quantités ω qui sont supérieurs à z. Ainsi le nombre des quantités ω qui sont comprises entre deux limites z_0 et z_1, sera déterminé par la différence entre l'indice du type quadratique de f pour $z = z_0$ et l'indice du type quadratique de la même forme pour $z = z_1$.

V.

Arrivons maintenant à la question de l'équivalence arithmétique de deux formes décomposables en facteurs, et des transformations semblables de ces formes. Cette recherche, que nous allons rapprocher de celle qui est relative aux formes quadratiques indéfinies, repose sur les principes suivants.

Désignons par $\mathrm{Mod}^2 u$, le carré du module d'un facteur linéaire quelconque de F, c. à d. le carré de ce facteur, s'il est *réel;* ou le produit qu'on obtient en le multipliant par le facteur conjugué, s'il est *imaginaire.* Nous considérons en même temps avec F, la forme quadratique définie

$$\varphi = \lambda_0^2 \mathrm{Mod}^2 u_0 + \lambda_1^2 \mathrm{Mod}^2 u_1 + \lambda_2^2 \mathrm{Mod}^2 u_2 + \cdots + \lambda_{n-1}^2 \mathrm{Mod}^2 u_{n-1},$$

où les quantités λ sont des indéterminées réelles quelconques auxquelles nous donnerons le nom *d'arguments*, et nous aurons les propositions qui suivent.

1°.

Concevant qu'on calcule toutes les substitutions propres à réduire φ, pour toutes les valeurs des arguments, et qu'on fasse chacune de ces substitutions dans F; on obtiendra ainsi une infinité de transformées dont nous désignerons l'ensemble par le symbole (F). Cela étant, si l'on opère de même sur une autre forme F', et que F et F' soient arithmétiquement équivalentes, (F) et (F') seront *identiques.* L'opération de réduction est faite ici dans le sens que je lui ai donnée dans la troisième de mes lettres à M. *Jacobi* sur la théorie des nombres.

2°.

En supposant entiers les coefficients de F, ceux des formes contenues dans (F) le seront pareillement, et auront des limites déterminées par une seule fonction des coefficients de F, à savoir l'invariant Δ.

3°.

Si l'on désigne par $\mathfrak{F}$, l'une des formes de (F), il n'y aura aucune transformation semblable de $\mathfrak{F}$, qui ne soit donnée par le calcul arithmétique de $(\mathfrak{F})$, tel que nous l'avons défini.

4°.

Toutes les formes F, à coefficients entiers et de même invariant Δ, sont réductibles à un nombre fini de classes distinctes. Une application de cette dernière conséquence, que nous allons indiquer en peu de mots, conduit à une notion importante sur les racines des équations à coefficients entiers.

Soit

$$\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \cdots + \delta x + \varepsilon = \alpha(x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_{n-1}) = 0$$

une équation à coefficients entiers de degré n. Représentons par Δ, cette fonction entière des coefficients α, β, etc. à laquelle les géomètres anglais ont donnée le nom de ***discriminant***, et qu'on peut définir ainsi:

$$\Delta = \alpha^{2(n-1)}(a_0 - a_1)^2 (a_1 - a_2)^2 \ldots (a_{n-2} - a_{n-1})^2,$$

le second membre renfermant le produit des carrés des différences des racines prises deux à deux. Si l'on pose

$$a_i = x_0 + a_i x_1 + a_i^2 x_2 + \cdots + a_i^{n-1} x_{n-1},$$

et qu'on considère la forme

$$F = \alpha_{n-1} u_0 u_1 u_2 \ldots u_{n-1},$$

les coefficients de cette forme seront tous entiers; et d'après la définition que nous avons donnée, son invariant réproduira précisement le discriminant Δ. Observant donc que deux équations différentes, donnant lieu à des formes F arithmétiquement équivalentes, sont réductibles l'une à l'autre, par une substitution rationnelle, on arrivera à ce théorème:

Les équations numériques, en nombre infini, pour lesquelles le discriminant a une même valeur, ne contiennent qu'un nombre essentiellement limité d'irrationnalités distinctes.

VI.

Considérons actuellement une forme quadratique quelconque ***indéfinie***, et à n indéterminées. Cette forme appartiendra à un type d'indice i, différent de zéro, de sorte qu'on pourra trouver d'une infinité de manières, n fonctions linéaires réelles, $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$, telles qu'on ait:

$$F = -u_0^2 - u_1^2 - \cdots - u_{i-1}^2 + u_i^2 + u_{i+1}^2 + \cdots + u_{n-1}^2.$$

Supposons d'abord connu, un seule système de pareilles fonctions: tous les autres s'obtiendront en posant

$$\begin{aligned} &-u_0^2 - u_1^2 - \cdots - u_{i-1}^2 + u_i^2 + u_{i+1}^2 + \cdots + u_{n-1}^2 \\ &= -U_0^2 - U_1^2 - \cdots - U_{i-1}^2 + U_i^2 + U_{i+1}^2 + \cdots + U_{n-1}^2, \end{aligned}$$

et en déterminant l'expression la plus générale des quantités U, par les quantités u. Cela revient à la recherche algébrique des substitutions semblables du type quadratique d'indice i. Or la méthode donnée dans mon premier article sur les formes ternaires, s'applique à des formes d'un nombre quelconque

d'indéterminées, et conduira à exprimer rationnellement cette substitution au moyen de $\frac{1}{2}n(n-1)$ quantités arbitraires*). Nous leur donnerons le nom *d'arguments*, car on va voir qu'elles jouent le même rôle que les quantités λ, du (§. V).

En effet, nous considérons en même temps que la forme indéfinie proposée F, la forme définie

$$\varphi = U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_{n-1}^2,$$

et nous aurons les propositions suivantes:

1°.

Concevant qu'on calcule toutes les substitutions propres à réduire f, pour toutes les valeurs des arguments, et qu'on fasse chacune de ces substitutions dans F, on obtiendra ainsi une infinité des transformées dont nous désignerons l'ensemble par le symbole (F). Cela fait, si deux formes F et F' sont arithmétiquement équivalentes, (F) et (F') seront identiques.

2°.

En supposant entiers les coefficients de F, ceux des formes contenues dans (F) le seront pareillement, et auront des limites déterminées par une seule fonction des coefficients de F, l'invariant Δ. Un exemple des limitations de ces coefficients a été donné dans mon premier article, pour le cas des formes ternaires.

3°.

Si l'on désigne par $\mathfrak{F}$ l'une des formes de (F), il n'y aura aucune transformation de $\mathfrak{F}$ en elle-même, qui ne soit donnée par le calcul arithmétique de $(\mathfrak{F})$, tel qu'il a été défini.

4°.

Toutes les formes quadratiques à coefficients entiers, qui appartiennent au même type, et ont même invariant Δ, sont réductibles à un nombre fini de classes distinctes.

Depuis l'année 1847 où je rencontrais les principes de la réduction des formes définies, j'ai cherché à plusieurs reprises la démonstration rigoureuse de ce dernier théorème, et je ne suis parvenu qu'après bien des efforts à la théorie qu'on vient de voir. Il me reste à montrer comment pour les

---

*) On pourrait, sans recourrir à ma théorie, déduire ces expressions de celles qu'à données Mr. *Cayley*, pour le type d'indice zéro. Voyez dans ce journal le beau mémoire sur les déterminants gauches, du savant géomètre anglais.

formes binaires de déterminant positif qui appartiennent en même temps aux formes quadratiques indéfinies et aux formes décomposables en facteurs linéaires, on est conduit au même résultat en appliquant les principes relatifs à ces deux cas.

Ayant fait

$$F = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = (ax + by)(a'x + b'y) = uu',$$

nous aurons d'abord cette expression par le type quadratique binaire d'indice *un*, savoir:

$$F = \nu^2 - \nu'^2,$$

en posant

$$u + u' = 2\nu, \quad u - u' = 2\nu'.$$

Soit ensuite:

$$U = \alpha\nu + \alpha'\nu', \quad U' = \beta\nu + \beta'\nu',$$

et déterminons les constantes α, α', β, β' de manière à obtenir identiquement:

$$U^2 - U'^2 = \nu - \nu'^2.$$

On posera pour cela:

$$\alpha^2 - \alpha'^2 = 1, \quad \alpha\beta - \alpha'\beta' = 0, \quad \beta^2 - \beta'^2 = -1,$$

d'où il sera facile de conclure:

$$\beta^2 = \alpha'^2, \quad \beta'^2 = \alpha^2.$$

Or la forme définie φ étant

$$\varphi = U^2 + U'^2 = (\alpha\nu + \alpha'\nu')^2 + (\beta\nu + \beta'\nu')^2,$$

elle deviendra par ces relations:

$$\varphi = (\alpha^2 + \beta^2)\nu^2 + 2(\alpha\alpha' + \beta\beta')\nu\nu' + (\alpha'^2 + \beta'^2)\nu'^2 = (\alpha^2 + \alpha'^2)(\nu^2 + \nu'^2) + 4\alpha\alpha'\nu\nu'.$$

Remettant maintenant au lieu de ν et ν' leurs valeurs en u et u', il viendra:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha'^2)(u^2 + u'^2) + \alpha\alpha'(u^2 - u'^2) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha')^2 u^2 + \tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha')^2 u'^2;$$

ce qui est précisément la forme quadratique définie à laquelle on serait amené d'après le (§. V), en considérant F comme appartenant aux formes décomposables en facteurs linéaires. (Je reprendrai dans un mémoire spécial la distribution en périodes des formes de déterminant positif, pour compléter et mettre fin en quelques points à ce que j'en ai déjà dit dans un mémoire sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres.)

VII.

Pour compléter ce qui nous reste à dire des principes communs à ces deux grandes théories arithmétiques des formes quadratiques à un nombre quelconque d'indéterminées, et des formes décomposables en facteurs linéaires, nous allons exposer comment on doit concevoir l'opération de la réduction continuelle de l'une en l'autre des formes précédemment désignées par φ. Nommons $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$, etc., la série des formes contenues dans (F); F désignant, soit une forme quadratique, soit une forme à facteurs linéaires, et S, S', S'', ... les substitutions par lesquelles on les à respectivement tirées de F. En effectuant chacune de ces substitutions dans φ, on aura les transformées correspondantes Φ, Φ', Φ'', ... qui seront réduites pour certaines valeurs de leurs arguments. Or il est très facile de voir pour l'une et l'autre des formes φ, que toute transformée telle que Φ, peut s'obtenir directement par $\mathfrak{F}$, d'après le mode même de formation de φ au moyen de F. Maintenant, pour arriver à saisir l'enchainement de ces opérations arithmétiques de réduction continuelles, lorsque les arguments prennent toutes les valeurs possibles, nous observerons qu'au lieu d'opérer toujours sur cette même forme φ, pour en déduire successivement Φ, Φ', Φ'', etc. on peut concevoir l'une quelconque de ces formes, obtenue au moyen d'une autre précédemment réduite, en y introduisant les valeurs des arguments pour lesquelles elle a cessé de l'être, et lui appliquant alors la méthode générale de réduction.

Or ici est l'origine d'une notion importante, que nous allons présenter d'abord, dans le cas particulier de deux arguments variables. Imaginons que ces deux arguments soient les coordonnées d'un point rapporté sur un plan à deux axes fixes, de sorte qu'à tout point de ce plan corresponde une forme φ entièrement déterminée. Indépendamment de toute connaissance sur la nature analytique des conditions que doivent remplir les coefficients d'une forme réduite, on peut concevoir l'existence d'une courbe séparant les points du plan auxquels correspond une forme Φ, toujours réduite, de ceux auxquels correspond une forme qui ne l'est plus. Cela posé, soient à une distance infiniment voisine de cette courbe, Σ', Σ'', Σ''', etc. les diverses substitutions qu'il faudra successivement employer pour réduire de nouveau Φ, nous nommerons ***reduites adjacentes*** à Φ, les transformées Φ', Φ'', Φ''', etc qu'on obtiendra en faisant ces substitutions dans Φ. Et si l'on appelle $\mathfrak{F}$, la forme de (F) à laquelle Φ correspond, nous donnerons le nom de ***formes contigues*** à $\mathfrak{F}$, aux transformées $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$, $\mathfrak{F}'''$, etc., qui en résultent par les substitutions

Σ', Σ'', Σ''', etc. Dans le cas général, considérons l'ensemble des valeurs des arguments pour lesquelles une forme Φ est réduite, ces valeurs étant telles, que cette forme cesse de l'être lorsqu'elles subissent une variation infiniment petite. Nommons encore, Σ', Σ'', etc. la *totalité* des substitutions propres à reduire Φ de nouveau, dans cette hypothèse d'un changement infiniment petit dans les arguments: les réduites adjacentes, seront les transformées Φ', Φ'', etc. qui résultent de Φ par les substitutions Σ', Σ'', etc.; et en nommant $\mathfrak{F}$ la forme correspondante de Φ dans (F), ses contigues seront les transformées F', F''', etc. qui s'en déduisent par les mêmes substitutions.

Cette notion des réduites adjacentes, conduit à imaginer la disposition graphique suivante du calcul arithmétique de la réduction continuelle de φ.

Ayant représenté par les désignations abrégées Φ, Φ', Φ'', etc. la série indéfinie des réduites quadratiques qui correspondent chacune à une forme de (F), nous concevrons qu'on fasse avec toutes ces formes, un tableau, dans lequel chacune d'elles sera immédiatement environnée de toutes celles qui lui sont adjacentes, et auxquelles on la joindra par autant de traits. De la sorte toute forme Φ se trouvera réunie par deux traits à une autre Φ'; car Φ ayant pour adjacente Φ', réciproquement Φ' aura pour adjacente Φ. Maintenant si l'on place sur chaque double trait, une désignation abrégée de la substitution par laquelle l'une des deux formes dépend de son adjacente, on aura la réunion de touts les éléments du calcul arithmétique dont nous avons essayé de donner une image claire et sensible.

On pourra encore dans le tableau ainsi obtenu, remplacer chaque réduite quadratique Φ, par la forme $\mathfrak{F}$ qui lui correspond dans (F); en conservant d'ailleurs toutes les indications de subsfitutions. De là résultera une disposition par groupes de formes contigues, dont on va voir l'usage dans la démonstration du théorème suivant.

VIII.

Lorsque les coefficients de la forme F sont entiers, que cette forme soit quadratique ou décomposable en facteurs linéaires: il existe un nombre fini de substitutions semblables, telles qu'on peut exprimer par les produits des puissances de ces substitutions, toutes les transformations de cette forme en elle même.

Je dis en premier lieu qu'il suffit d'établir ce théorème pour une forme déterminée $\mathfrak{F}$, de l'ensemble (F). Supposons en effet que F se change en $\mathfrak{F}$,

par la substitution Σ; en désignant indéfiniment par S, les substitutions semblables de $\mathfrak{F}$: toutes les substitutions de même nature relativement à F, seront données, comme on sait, par la formule $\Sigma S \Sigma^{-1}$. Cela posé, admettons que S s'exprime par le produit de diverses substitutions S', S'', S''', etc. de sorte qu'on ait par exemple

$$S = S'.S''.S'''.$$

En posant

$$T = \Sigma S \Sigma^{-1}, \quad T' = \Sigma S' \Sigma^{-1}, \quad T'' = \Sigma S'' \Sigma^{-1}, \quad T''' = \Sigma S''' \Sigma^{-1},$$

on vérifiera de suite la relation

$$T = T'.T''.T'''.$$

On voit par là comment à toute expression de la substitution S par un produit d'autres substitutions, correspond une expression toute semblable pour la substitution T.

Cela posé, soit Φ la forme quadratique qui correspond à $\mathfrak{F}$. Cette forme sera réduite pour certaines valeurs de ses arguments; mais en les faisant varier de nouveau, et considérant l'ensemble des substitutions qui se présentent successivement pour la réduire, nous avons fait la remarque (§. V et §. VI, 3°) qu'il n'y avait aucune transformation de $\mathfrak{F}$ en elle-même, qui ne soit comprise dans cet ensemble de substitutions. En partant de cette proposition, qui est fondamentale pour ce que nous allons avoir à dire, nous raisonnons comme il suit.

Supposons formé le tableau complet des formes de (F), disposé par groupes de formes contigues, ainsi qu'on l'a expliqué plus haut. En vertu du second théorème des (§. V et VI) ce tableau renfermera, repétées une infinité de fois chacunes, un nombre essentiellement limité de formes différentes. Ainsi il s'agit de saisir, en général, par quel enchainement de substitutions on peut toujours lier deux transformées identiques, occupant dans le tableau deux plans distinctes.

Pour y parvenir, nous concevrons qu'on groupe les formes du tableau, de la manière suivante.

Partant d'abord de $\mathfrak{F}$, nous la joindrons à toutes ses contigues, pour en faire un *premier* groupe (A). Ensuite nous regarderons la totalité des formes contigues à (A), comme formant, d'une part, (A) lui même, et de l'autre un *second* groupe (B). Nous continuerons de même en regardant les formes contigues à (A) et (B), comme formant d'une part (A) et (B) et de

l'autre un *troisième* groupe (C). Enfin, ayant en général obtenu les groupes (A), (B), (C), ... (K), le suivant (L) sera défini, comme réunissant les formes qui, sans appartenir aux groupes précédents, leurs sont contigues.

Cela posé, j'observe que si deux formes égales à $\mathfrak{F}$, se présentent à deux places différentes dans le tableau général, et qu'on les prenne l'une et l'autre pour points de départ d'une disposition par groupes, on arrivera identiquement aux mêmes résultats. On se rappelle en effet, que toute forme quadratique Φ, se déduit directement de sa correspondante $\mathfrak{F}$, dans l'ensemble (F), de sorte que deux transformées égales dans (F), ramènent des formes quadratiques, offrant les mêmes fonctions des arguments, et par suite les mêmes opérations de réductions successives.

Cela étant, considérons le premier groupe dans lequel on retrouve la forme $\mathfrak{F}$, qui a été prise pour point de départ. Autant de fois cette forme se trouvera-t-elle reproduite dans un groupe, autant aura-t-on de transformations en elle même. Nommons S, S', S'', etc. ces substitutions. De ce que nous avons dit précédemment, résulte que ce sera toujours l'une de ces substitutions qu'il faudra employer pour passer de $\mathfrak{F}$, (quel que soit sa place dans le tableau), à la même forme placée dans le groupe le plus voisin. Donc de proche en proche, on voit que la substitution à faire pour passer généralement de $\mathfrak{F}$ à la même forme, placée en tout autre point, résultera nécessairement de la combinaison successive des substitutions *fondamentales* S, S', S'', etc.

IX.

Il est possible de réduire *de moitié* le nombre de ces substitutions fondamentales; car on démontre immédiatement comme conséquence de la manière dont elles on été obtenues, qu'on y trouve simultanément S et S^{-1}, S' et S'^{-1} etc. Mais c'est seulement pour les formes décomposables en facteurs linéaires que j'ai pu obtenir l'expression du nombre des substitutions fondamentales, entièrement indépendantes. Il est alors le même que celui des arguments essentiellement distincts dans la forme quadratique φ, c. à d., comme nous l'avons annoncé au commencement de ce mémoire, la somme du nombre des facteurs linéaires *réels* et du nombre des couples de facteurs *imaginaires* conjugués. La démonstration de ce théorème sera pour nous l'objet d'un mémoire particulier, dans lequel nous montrerons comment nos principes s'appliquent à l'étude des équations algébriques dont les coefficients sont des

nombres entiers. Nous terminerons en remarquant que la présence d'un nombre illimité d'entiers arbitraires dans les transformations semblables des formes ternaires, résulte des considérations précédentes. Car en supposant, pour fixer les idées, deux substitutions fondamentales S et S', l'expression générale des transformations semblables serait de la forme

$$S^m S'^n S^p S'^q \ldots,$$

$m, n, p, q,$ étant des entiers positifs ou négatifs. Or aucune réduction ne saurait avoir lieu entre les nombres m, n, etc. à cause de l'impossibilité de permuter deux substitutions distinctes; comme nous l'avons démontrée (§. IX 1re partie).

Paris, Juin 1853.

20.

Sur la théorie des formes quadratiques.

(Par M. *Hermite* à Paris.)

Second mémoire.

On sait avec quelle facilité on a pu étendre aux *nombres complexes* de la forme $a+b\sqrt{-1}$, la plupart des notions arithmétiques fondamentales relatives aux nombres *entiers* réels. Ainsi des propositions élémentaires qui se rapportent à la divisibilité, on est parvenu rapidement jusqu'à ces propriétés plus profondes et plus cachées qui reposent sur la considération des formes quadratiques, sans rien changer d'essentiel aux principes des méthodes propres aux nombres réels. Il est cependant certaines circonstances où cette extension parait exiger des principes nouveaux, et où l'on se trouve amené à suivre dans plusieurs directions différentes, l'analogie entre les deux ordres de considérations arithmétiques. Nous nous proposons d'en offrir ici un exemple, auquel nous avons été conduit en étudiant la représentation d'un nombre par une *somme de quatre carrés.* Voici d'abord la méthode nouvelle que nous avons suivie dans cette question.

I.

Désignons par A, un nombre entier *impair* ou *impairement pair;* nous commencerons pour établir la possibilité de la congruence

$$x^2+y^2+1\equiv 0 \quad \text{Mod: } A.$$

À cet effet, soit d'abord $A\equiv\varepsilon$ Mod. 4, ε représentant $+1$ ou -1. La progression arithmétique, ayant pour terme général

$$4Az+2\varepsilon A-1,$$

ne contiendra que des nombres $\equiv 1$ Mod. 4, puisque

$$2\varepsilon A-1\equiv 2\varepsilon^2-1\equiv 1 \text{ Mod. } 4.$$

J'observe ensuite que le premier terme, $2\varepsilon A-1$, et la raison $4A$, sont premiers entre eux, car on a identiquement:

$$4A.A-(2\varepsilon A-1)(2\varepsilon A+1)=1.$$

Donc, d'après le théorème démontré par Mr. *Dirichlet,* cette progression contiendra une infinité de nombres premiers qui seront $\equiv 1$ Mod. 4, et par suite

décomposables en ***deux carrés.*** On pourra faire ainsi, pour une infinité de valeurs de z:

$$4Az + 2\varepsilon A - 1 = x^2 + y^2,$$

d'où l'on conclura:

$$x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \quad \text{Mod. } A.$$

Soit en second lieu

$$A \equiv 2 \quad \text{Mod. } 4.$$

Tout ce qui précède subsistera relativement à la nouvelle progression ayant pour terme général:

$$2Az + A - 1.$$

Ainsi la possibilité de la congruence

$$x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \quad \text{Mod. } A$$

se trouve établie, pour tout module ***impair*** ou double d'un nombre ***impair.***

II.

Considérons maintenant la forme quadratique définie à quatre indéterminées:

$$f = (Ax + \alpha x + \beta u)^2 + (Ay + \alpha u - \beta x)^2 + z^2 + u^2,$$

où les nombres entiers α et β satisfont à la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 + 1 \equiv 0 \quad \text{Mod. } A.$$

L'invariant Δ de cette forme, sera en valeur absolue A^4; car il s'obtiendra en multipliant l'invariant de

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2,$$

qui est ***l'unité,*** par le carré du déterminant de la substitution linéaire

$$\begin{aligned} Ax + \alpha z + \beta u &= X, \\ Ay + \alpha u - \beta z &= Y, \\ z &= Z, \\ u &= U; \end{aligned}$$

et on trouve bien facilement que ce déterminant est A^2. Cela étant, cherchons pour des valeurs entières des indéterminées, le ***minimum*** de cette forme. D'après un théorème que j'ai donné en général (voyez oeuvres de ***Jacobi*** 2e volume, page 223) il sera au dessous de la limité $(\frac{4}{3})^{\frac{3}{2}} \sqrt[4]{\Delta}$, et par suite, d'après la valeur de Δ, moindre que $2A$. Mais il est aisé de reconnaitre que les nombres représentables par f, sont nécessairement $\equiv 0$ Mod. A; donc ce minimum ne peut qu'être A lui même, qui se trouvera ainsi décomposé en une somme de quatre carrés.

III.

On peut rapprocher la démonstration précédente des méthodes relatives à la représentation des nombres par les formes quadratiques binaires, en la présentant sous le point de vue suivant. La forme

$$\frac{1}{A}f = A(x^2+y^2)+2\alpha(zx+yu)+2\beta(xu-zy)+\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{A}(z^2+u^2)$$

a ses coefficients entiers, et pour invariant *l'unité*. Elle est donc équivalente à

$$X^2+Y^2+Z^2+U^2:$$

réduite unique qu'on obtient pour les formes quaternaires définies dont l'invariant est *un*. Soit donc

$$\begin{aligned} X &= mx+m'y+m''z+m'''u,\\ Y &= nx+n'y+n''z+n'''u,\\ Z &= px+p'y+p''z+p'''u,\\ U &= qx+q'y+q''z+q'''u, \end{aligned}$$

une transformation de l'une de ces formes dans l'autre: on trouvera, en comparant les coefficients de x^2 et y^2, les représentations suivantes du nombre A, par une somme de quatre carrés:

$$\begin{aligned} A &= m^2+n^2+p^2+q^2,\\ A &= m'^2+n'^2+p'^2+q'^2. \end{aligned}$$

Pour décomposer en deux carrés, un nombre A, relativement auquel -1 est résidu quadratique, il faudrait de même considérer la forme

$$Ax^2+2\alpha xy+\frac{\alpha^2+1}{A}y^2,$$

où l'on suppose

$$\alpha^2+1 \equiv 0 \text{ Mod } A,$$

et la substitution qui la lie à sa réduite X^2+Y^2. Mais les considérations suivantes rattacheront à un ordre d'idées plus générales, l'analyse que nous indiquons entre ces deux questions.

IV.

Représentons par v et w, les variables *imaginaires* $x+y\sqrt{-1}$, $z+u\sqrt{-1}$, et par v_0 et w_0, leurs *conjuguées* $x-y\sqrt{-1}$, $z-u\sqrt{-1}$. Soit de même

$$\begin{aligned} V &= X+Y\sqrt{-1}, \quad & W &= Z+U\sqrt{-1},\\ V_0 &= X-Y\sqrt{-1}, \quad & W_0 &= Z-U\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

on pourra distinguer dans l'ensemble des substitutions réelles entre les deux

groupes de variables $x, y, z, u,$ d'une part, $X, Y, Z, U,$ de l'autre, celles qui sont exprimables ainsi:

$$v = aV + bW, \qquad w = cV + dW,$$
$$v_0 = a_0V_0 + b_0W_0, \qquad w_0 = c_0V_0 + d_0W_0,$$

où $a, b, c, d,$ sont encore des quantités imaginaires quelconques, et $a_0, b_0, c_0, d_0,$ leurs conjuguées respectives. On obtient de la sorte une classe parfaitement définie de substitutions réelles, par rapport auxquelles on peut se poser les questions fondamentales de la comparaison des formes quaternaires: les deux problèmes de l'équivalence algébrique, de l'équivalence arithmétique, et de la représentation des nombres par ces formes. Pour l'objet que nous avons en vue en ce moment, nous nous bornerons aux formes quadratiques suivantes:

$$f = Avv_0 + Bvw_0 + B_0wv_0 + Cww_0,$$

dans lesquelles les coefficients extrêmes A et C sont supposés réels, tandis que les coefficients moyens, $B, B_0,$ sont des quantités imaginaires conjuguées. Considérées par rapport aux variables primitives, $x, y, z, u:$ ces formes sont entièrement réelles, mais leur étude au point de vue des substitutions que nous avons précédemment définies, repose essentiellement sur l'emploi des nombres complexes. On est alors conduit, à leur attribuer un mode d'existence singulièrement analogue à celui des formes quadratiques binaires, bien qu'elles contiennent essentiellement quatre indéterminées.

Les considérations suivantes que nous présentons comme une première esquisse d'une théorie vaste et féconde, sur laquelle nous reviendrons à l'avenir, offreront plusieurs exemples de cette étroite analogie avec les formes binaires; mais on y verra en même temps le germe de notions arithmétiques toutes nouvelles, qui méritent peut-être de fixer un instant l'attention des géomètres.

V.

Le fait algébrique sur lequel repose en entier la théorie des formes

$$f = Avv_0 + Bvu_0 + B_0uv_0 + Cuu_0,$$

consiste en ce que la substitution

$$(1.) \quad \begin{cases} v = aV + bU, & v_0 = a_0V_0 + b_0U_0, \\ u = cV + dU, & u_0 = c_0V_0 + d_0U_0, \end{cases}$$

conduit à une transformée semblable:

$$F = \mathfrak{A}VV_0 + \mathfrak{B}VU_0 + \mathfrak{B}_0UV_0 + \mathfrak{C}UU_0,$$

dans laquelle les coefficients extrêmes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$, sont *réels* comme A et C,

les coefficients moyens $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}_0$ étant des quantités *imaginaires* conjuguées comme B et B_0. On a en effet:

$$\mathfrak{A} = Aaa_0 + Bac_0 + B_0a_0c + Cc\,c_0 = f(a, c; a_0, c_0),$$

$$\mathfrak{B} = Aab_0 + Bad_0 + B_0a_0d + Cc\,d_0 = a\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial d},$$

$$\mathfrak{B}_0 = A_0a_0b + B_0a_0d + Bad_0 + Cc_0d = a_0\frac{\partial f}{\partial b_0} + c_0\frac{\partial f}{\partial d_0},$$

$$\mathfrak{C} = Ab\,b_0 + Bb\,d_0 + B_0b_0d + Cd\,d_0 = f(b, d; b_0, d_0),$$

et ce que nous disons résulte immédiatement de ces formules. On en tire ensuite les conséquences suivantes:

1°.

On a le théorème

$$\mathfrak{B}\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{A}\mathfrak{C} = (ad - bc)(a_0d_0 - b_0c_0)(BB_0 - AC).$$

Ainsi l'expression $BB_0 - AC$, jouera dans notre théorie le rôle *d'invariant.* Nous la désignerons par Δ.

2°.

Nommant m et n, deux constantes imaginaires quelconques, m_0 et n_0, leurs conjuguées, et posant

$$m\frac{df}{dv} + n\frac{df}{du} = V, \qquad m_0\frac{df}{dv_0} + n_0\frac{df}{du_0} = V_0,$$

$$nv - mu = U, \qquad n_0v_0 - m_0u_0 = U_0,$$

ce qui sera une substitution comprise dans la forme analytique générale des substitutions (1): je dis qu'on aura:

$$f(v, u; v_0, u_0).f(m, n; m_0, n_0) = VV_0 - \Delta UU_0.$$

Effectivement, cette relation n'est autre que celle du théorème précédent, dans laquelle on a mis v et u, au lieu de a et c; m et n, au lieu de b et d. Nous allons voir qu'elle donne tout ce qui concerne l'équivalence algébrique des formes f.

Supposons d'abord Δ *positif,* et mettons $V\sqrt{\Delta}$, au lieu de V, il faudra au lieu de V_0 prendre $V_0\sqrt{\Delta}$, et alors la forme f deviendra:

$$\frac{\Delta(VV_0 - UU_0)}{f(m, n; m_0, n_0)}.$$

Mais si Δ est *négatif,* en remplaçant V par $V\sqrt{\Delta}$, il faudra mettre $-V_0\sqrt{\Delta}$,

pour la quantité conjuguée, et alors f deviendra

$$\frac{-\Delta(VV_0+UU_0)}{f(m,n;m_0,n_0)}.$$

Enfin, par une nouvelle substitution qui consistera à multiplier V et U d'une part, V_0 et U_0 de l'autre, par un facteur et son conjugué, on obtiendra au lieu des deux formes précédentes, celles-ci:

$$\pm(VV_0-UU_0),$$
$$\pm(VV_0+UU_0).$$

Nous en concluerons ce théorème:

Les formes f, peuvent toujours par les substitutions (1), être ramenées à l'un des trois types quadratiques quaternaires, d'indice *zéro*, d'indice *deux*, ou d'indice *quatre*.

VI.

Ce qui précède montre que les formes f, sont *définies* ou *indéfinies*, suivant que Δ, est *négatif* ou *positif*. Nous pourrions aussi en conclure que relativement aux substitutions (1), elles ne sauraient avoir d'autre invariant que la fonction Δ, ou ses puissances. Mais pour abréger, nous arrivons immédiatement aux principes relatifs à la représentation des nombres.

Rappelons d'abord qu'en désignant par m et n deux entiers complexes sans diviseurs communs, on peut toujours trouver deux autres nombres complexes μ et ν, tels qu'on ait:

$$m\nu - n\mu = 1.$$

Car si l'on cherche par le procédé de Mr. *Dirichlet*, le plus grand commun diviseur entre m et n, il est aisé de voir qu'un reste de rang quelconque dans cette opération, s'exprime toujours par une somme de multiples complexes des nombres m et n. Le dernier de ces restes ayant dans le cas présent, *l'unité* pour norme, pourra donc s'obtenir sous la même forme; d'où se conclut de suite la possibilité de la relation proposée. Cela étant, nous aurons les théorèmes qui suivent.

1°.

Si un nombre M, peut être représenté par la forme f, de manière que les valeurs complexes des indéterminées v et u, v_0 et u_0, soient premières entre elles, l'invariant Δ, sera congru suivant le module M, à la somme de deux carrés.

Supposant en effet:

$$M = f(m, n; m_0, n_0),$$

et déterminant μ et ν, par la relation

$$m\nu - n\mu = 1:$$

l'équation déjà considerée,

$$f(m, n; m_0, n_0) f(\mu, \nu; \mu_0, \nu_0)$$
$$= \left(m\frac{df}{d\mu} + n\frac{df}{d\nu}\right)\left(m_0\frac{df}{d\mu_0} + n_0\frac{df}{d\nu_0}\right) - \Delta(m\nu - n\mu)(m_0\nu_0 - n_0\mu_0)$$

donnera:

$$\Delta \equiv \left(m\frac{df}{d\mu} + n\frac{df}{d\nu}\right)\left(m_0\frac{df}{d\mu_0} + n_0\frac{df}{d\nu_0}\right) \text{ Mod } M.$$

Or le second membre, étant la norme de l'expression $m\frac{df}{d\mu} + n\frac{df}{d\nu}$, est une somme de deux carrés.

Nous voyons par là, qu'à toute représentation propre de M par la forme f, est attachée une solution de la congruence

$$x^2 + y^2 \equiv \Delta \text{ Mod } M,$$

en prenant

$$x + y\sqrt{-1} = m\frac{df}{d\mu} + n\frac{df}{d\nu}.$$

D'ailleurs, quels que soient μ et ν, dans la relation $m\nu - n\mu = \Delta$, les diverses valeurs qui en résulteront pour x et y, seront congrues suivant le module M.

2°.

Si le nombre M peut être représenté par f, en donnant aux indéterminées v et u, les valeurs premières entre elles m et n, et à leurs conjuguées les valeurs m_0, n_0, et que le nombre complexe

$$x + y\sqrt{-1}$$

soit la valeur de l'expression

$$m\frac{df}{d\mu} + n\frac{df}{d\nu} \text{ Mod } M,$$

les deux formes, f, et

$$F = MVV_0 + (x + y\sqrt{-1})VU_0 + (x - y\sqrt{-1})UV_0 + \frac{x^2 + y^2 - \Delta}{M}UU_0,$$

seront arithmétiquement équivalentes, par la substitution:

$$v = mV + \mu U, \qquad v_0 = m_0V_0 + \mu_0U_0,$$
$$u = nV + \nu U, \qquad u_0 = n_0V_0 + \nu_0U_0,$$

où les entiers complexes, m, n; μ, ν, vérifieront la relation

$$m\nu - n\mu = 1.$$

3°.

On remarquera la complète identité des théorèmes qui précédent, avec ceux des paragraphes (154, 155, et 168) de l'ouvrage de M. *Gauss*. Il en resulte qu'il n'est aucune représentation propre de M, par la forme f, qui ne puisse s'obtenir en calculant toutes les expressions

$$F = MVV_0 + (x + y\sqrt{-1})\,VU_0 + (x - y\sqrt{-1})\,V_0U + \frac{x^2+y^2-\Delta}{M}\,UU_0,$$

composées avec le nombre M, et les entiers complexes $x + y\sqrt{-1}$, solutions de la congruence

$$x^2 + y^2 \equiv \Delta \text{ Mod } M,$$

et cherchant ensuite les transformations de f, en chacune de ces formes. Et toutes ces représentations seront distinctes, si les formules de transformation sont comme ci-dessus:

$$v = mV + \mu U, \qquad v_0 = m_0V_0 + \mu_0U_0,$$
$$u = nV + \nu U, \qquad u_0 = n_0V_0 + \nu_0U_0;$$

les entiers m, n, μ, ν, vérifiant toujours la condition

$$m\nu - n\mu = +1.$$

VII.

Après avoir fondé sur des principes identiques à ceux de M. *Gauss*, pour les formes binaires, les éléments de notre théorie, nous pourrons cependant voir ce présenter déjà, deux notions arithmétiques nouvelles et qui lui sont entièrement propres. La première consiste dans les divers ordres d'équivalence, auxquelles conduisent les substitutions

$$v = mV + \mu U, \qquad v_0 = m_0V_0 + \mu_0U_0,$$
$$u = nV + \nu U, \qquad u_0 = n_0V_0 + \nu_0U_0,$$

d'après les conditions

$$m\nu - n\mu = +1,$$
$$m\nu - n\mu = -1,$$
$$m\nu - n\mu = +\sqrt{-1},$$
$$m\nu - n\mu = -\sqrt{-1}.$$

Nous réservons pour un autre mémoire, l'étude approfondie des trois ordres d'équivalence *impropre*. La seconde que nous voulons étudier dès à

présent, consiste dans la forme nouvelle que vient prendre ici le caractère quadratique d'un nombre par rapport à un autre; car au lieu de la congruence

$$x^2 \equiv \Delta \text{ Mod } M$$

de la théorie des formes binaires, nous avons la suivante:

$$x^2 + y^2 \equiv \Delta \text{ Mod } M.$$

Pour plus de généralité nous considérerons l'équation

$$x^2 + Ay^2 \equiv \Delta \text{ Mod } M,$$

qui se présenterait dans la théorie des formes analogues à f, mais où l'on introduirait des nombres complexes $x + y\sqrt{-A}$ au lieu des nombres $x + y\sqrt{-1}$. La possibilité de la résolution, et ce qui est plus difficile, la recherche du nombre total des solutions, reposent sur les lemmes suivants.

1°.

Une congruence à un nombre quelconque d'inconnues, et dont le module est un nombre composé, peut toujours être ramenée au cas où le module est premier, ou une puissance d'un nombre premier.

Soit, pour fixer les idées, $\varphi(x, y)$, une fonction entière et à coefficients entiers de deux inconnues x et y, et considérons le cas de la congruence

$$\varphi(x, y) \equiv 0 \text{ Mod } M.$$

Si l'on nomme ses diverses solutions:

$$\begin{aligned} x &= x_1, & y &= y_1, \\ x &= x_2, & y &= y_2, \\ &\vdots \\ x &= x_\mu, & y &= y_\mu, \end{aligned}$$

tous les systèmes de nombres entiers qui rendent la fonction φ, divisible par M, seront renfermés dans les formules

$$(A.) \quad \begin{cases} x = x_1 + MX, & y = y_1 + MY, \\ x = x_2 + MX, & y = y_2 + MY, \\ \vdots \\ x = x_\mu + MX, & y = y_\mu + MY. \end{cases}$$

On aura pareillement tous les systèmes qui rendent la fonction φ, divisible par un autre entier M', au moyen des solutions de la congruence

$$\varphi(x, y) \equiv 0 \text{ Mod } M',$$

que nous représenterons par:

$$(A'.)\quad \begin{cases} x = x'_1, & y = y'_1, \\ x = x'_2, & y = y'_2, \\ \vdots & \\ x = x'_{\mu'}, & y = y'_{\mu'}. \end{cases}$$

Cela posé, s'il est possible de rendre la fonction φ divisible à la fois par M et M', il faudra que l'un des systèmes (A), par exemple:

$$x = x_k + MX, \qquad y = y_k + MY,$$

coïncide avec l'un des systèmes semblables, déduit des formules (A'); par exemple:

$$x = x'_{k'} + M'X', \qquad y = y'_{k'} + M'Y'.$$

D'ailleurs, si l'on peut obtenir simultanément:

$$x_k + MX = x'_{k'} + M'X', \qquad y_k + MY = y'_{k'} + M'Y',$$

pour des valeurs entières de X, X', Y, Y', on rendra la formation φ, divisible à la fois par M et M', et conséquemment, s'ils sont premiers entre eux, par leur produit. Or, en nous plaçant dans ce cas, on pourra déterminer deux nombres entiers M_0, M'_0, de manière à avoir:

$$MM_0 - M'M'_0 = 1,$$

et si l'on fait:

$$X = (x'_{k'} - x_k)M_0 + \xi M', \qquad Y = (y'_{k'} - y_k)M_0 + \eta M',$$
$$X' = (x'_{k'} - x_k)M'_0 + \xi M, \qquad Y' = (y'_{k'} - y_k)M'_0 + \eta M,$$

on trouvera, quel que soient les entiers arbitraires ξ et η:

$$x_k + MX = x'_{k'} + MX' \quad \text{et} \quad y_k + MY = y'_{k'} + M'Y'.$$

Ce qui précède subsistant évidemment quel que soit le nombre des inconnues de la congruence, montre, comme nous l'avons annoncé, qu'il suffit de savoir la résoudre, lorsque le module est premier, ou une puissance d'un nombre premier.

2°.

Si l'on désigne par μ et μ', les nombres de solutions de la congruence $\varphi(x, y) \equiv 0$, pour les modules M et M', qu'on suppose essentiellement premiers entre eux, μ, μ' sera le nombre des solutions de la congruence $\varphi(x, y) \equiv 0$ Mod MM'.

Il resulte en effet des valeurs qu'on vient d'obtenir pour X, X', Y, Y', les relations:

$$x_k + MX = x'_{k'} + M'X' \equiv x'_{k'} MM_0 - x_k M'M'_0 \text{ Mod } MM',$$
$$y_k + MY = y'_{k'} + M'Y' \equiv y'_{k'} MM'_0 - y_k M'M'_0 \text{ Mod } MM',$$

de sorte qu'en combinant les μ formules (A) avec les μ' formules (A'), on aura les $\mu\mu'$ systèmes de nombres:

$$x = x'_{k'} MM_0 - x_k M'M'_0, \qquad y = y'_{k'} MM_0 - y_k M'M'_0,$$

qui offriront des solutions de la congruence proposée suivant le module MM'. Or je dis qu'on n'aura jamais *à la fois*:

$$\left.\begin{aligned} x'_{k'} MM_0 - x_k M'M'_0 &\equiv x'_{i'} MM_0 - x_i M'M'_0 \\ y'_{k'} MM_0 - y_k M'M'_0 &\equiv y'_{i'} MM_0 - y_i M'M'_0 \end{aligned}\right\} \text{ Mod } MM';$$

car suivant le module M d'abord, en observant que $M'M'_0 \equiv -1$, on en conclurait:

$$x_k \equiv x_i,$$
$$y_k \equiv y_i,$$

et ensuite, suivant le module M', les mêmes relations donneraient:

$$x'_{k'} \equiv x'_{i'},$$
$$y'_{k'} \equiv y'_{i'}.$$

On voit qu'on n'aurait pas opéré, comme il faut le supposer, sur deux systèmes $(x_{k'}, y_k)$, $(x'_{k'}, y'_{s'})$, et (x_i, y_i), $(x'_{i'}, y'_{i'})$ distincts l'un de l'autre.

3°.

En supposant la congruence $\varphi(x, y) \equiv 0$ soluble pour un module premier, p, elle le sera également pour le module p^n, si la fonction φ, est telle qu'on en puisse avoir à la fois:

$$\varphi \equiv 0, \qquad \frac{d\varphi}{dx} \equiv 0, \qquad \frac{d\varphi}{dy} \equiv 0 \text{ Mod } p.$$

Dans ce cas, en désignant par π le nombre des solutions pour le module p, le nombre des solutions pour le module p^n sera $p^{n-1}\pi$.

Représentons indéfiniment par $x \equiv \xi$, $y \equiv \eta$ les solutions de la congruence

$$\varphi(x, y) \equiv 0 \text{ Mod } p^n,$$

tous les systèmes de nombres entiers, rendant la fonction φ, divisible par p^n, seront compris dans les formules

$$x = \xi + p^n X, \qquad y = \eta + p^n Y.$$

Cela étant, je dis que sous les conditions énoncées, il est possible de résoudre la même congruence suivant le module p^{n-1}. Effectivement, on pourra déterminer

pour X et Y, des valeurs telles que

$$\varphi(\xi+p^nX, \eta+p^nY)$$

soit divisible par p^{n+1}; car en développant, on voit qu'il suffira de rendre divisible par p l'ensemble des termes

$$\frac{1}{p^n}\cdot\varphi+X\frac{d\varphi}{d\xi}+Y\frac{d\varphi}{d\eta};$$

et cela sera toujours possible, si l'on n'a jamais simultanément:

$$\frac{d\varphi}{d\xi}\equiv 0, \quad \frac{d\varphi}{d\eta}\equiv 0 \ \text{Mod}\, p;$$

car l'équation indéterminée

$$\frac{1}{p^n}\varphi+X\frac{d\varphi}{d\xi}+Y\frac{d\varphi}{d\eta}=pZ$$

sera alors résoluble en nombres entiers. Soit $X=X_0$, $Y=Y_0$, un système quelconque de solutions pour les inconnues X et Y, il est aisé de voir que toutes les solutions possibles seront données par les formules

$$\left.\begin{aligned} X &\equiv X_0+t\frac{d\varphi}{d\eta} \\ Y &\equiv Y_0-t\frac{d\varphi}{d\xi} \end{aligned}\right\} \ \text{Mod}\, p,$$

et que les valeurs de l'indéterminée t, non-congrues suivant le module p, donneront autant de solutions distinctes. De là résulte cette expression des solutions de la congruence

$$\varphi(x, y) \equiv 0 \ \text{Mod}\, p^{n+1}:$$

$$\left.\begin{aligned} X &\equiv \xi+p^n\left(X_0+t\frac{d\varphi}{d\eta}\right) \\ Y &\equiv \eta+p^n\left(Y_0-t\frac{d\varphi}{d\xi}\right) \end{aligned}\right\} \ \text{Mod}\, p^{n+1},$$

et comme on peut donner à t, les valeurs $0, 1, 2, \ldots p-1$, on voit qu'en désignant par $\pi^{(n)}$ le nombre des solutions pour le module p^n, le nombre des solutions pour le module p^{n+1}, sera $\pi^{(n+1)}=p\pi^{(n)}$; d'où l'on conclut, comme nous l'avons annoncé:

$$\pi^{(n)} = p^{n-1}\pi.$$

VIII.

Les théorèmes précédents conduisent à une expression générale du nombre des solutions de la congruence $\varphi(x, y)\equiv 0$ suivant un module composé quelconque, lorsqu'on connaît les nombres de solutions pour des modules

premiers. Soit en effet $M = p^n p_1^{n_1} \dots p_\omega^{n_\omega}$ l'expression du module décomposé en ses facteurs premiers, et π, π_1, $\dots$ π_ω les nombres de solutions de la congruence proposée suivant les modules p, p_1, $\dots$ p_ω, on trouvera pour le nombre μ des solutions suivant le module M, la valeur suivante:

$$\mu = p^{n-1}\pi \times p_1^{n_1-1}\pi_1 \dots \times p_\omega^{n_\omega-1}\pi_\omega.$$

On aura

$$\mu = M\frac{\pi\pi_1 \dots \pi_\omega}{p p_1 \dots p_\omega}.$$

Pour des congruences à un nombre k d'inconnues, on aurait la formule analogue: $\mu = M^{k-1}\dfrac{\pi\pi_1 \dots \pi_\omega}{(p p_1 \dots p_\omega)^{k-1}}$.

Nous allons en faire l'application à la congruence particulière que nous avions principalement en vue, savoir:

$$x^2 + Ay^2 \equiv \Delta \text{ Mod } M.$$

Alors la détermination des nombres, π, π_1, etc. exige qu'on distingue deux cas, suivant que $-A$ est ***non-résidu*** ou ***résidu*** de p. Nous allons les traiter successivement.

1°. $-ANp$.

Dans ce cas Δ lui même peut être ***résidu*** ou ***non-résidu*** de p, de sorte qu'on peut supposer: $\Delta \equiv a^2$ ou $\Delta \equiv -Aa^2$ Mod p; d'où ces deux formes de congruences:

$$x^2 + Ay^2 \equiv a^2 \quad \text{et} \quad x^2 + Ay^2 \equiv -Aa^2 \text{ Mod } p.$$

Or en faisant dans la première:

$$x \equiv a\xi, \qquad y \equiv a\eta \text{ Mod } p,$$

et dans la seconde:

$$x \equiv Aa\eta, \qquad y \equiv a\xi \text{ Mod } p,$$

elles deviendront respectivement:

$$\xi^2 + A\eta^2 \equiv 1 \quad \text{et} \quad \xi^2 + A\eta^2 \equiv -1.$$

Cela posé, A étant non-résidu de p, on aura:

$$(\xi + \eta\sqrt{-A})^p \equiv \xi - \eta\sqrt{-A} \text{ Mod } p,$$

d'où:

$$\xi^2 + A\eta^2 \equiv (\xi + \eta\sqrt{-A})^{p+1}.$$

Toutes les solutions des congruences proposées, seront donc données par les

$p+1$ nombres complexes $\xi+\eta\sqrt{-A}$, qui satisfont à l'une ou à l'autre des congruences binomés

$$z^{p+1} \equiv 1 \quad \text{et} \quad z^{p+1} \equiv -1 \text{ Mod } p.$$

Dans les deux cas le nombre π des solutions de la proposée, suivant le module premier p, suivant lequel $-A$ est ***non-résidu***, sera donc: $\pi = p+1$.

$$2^{o}. \quad -AR p.$$

Nous pouvons ici donner une méthode plus générale, n'exigeant pas comme tout-à-l'heure que le module soit un nombre premier. Supposant en effet $-A$ ***résidu*** d'un nombre entier quelconque M, on pourra trouver une représentation propre de ce nombre, ou d'un de ses multiples, par la forme principale, x^2+Ay^2. Soit KM ce multiple, N la valeur de l'expression $\sqrt{-A}$ Mod KM, et $M' = \frac{N^2+A}{KM}$: les deux formes

$$x^2+Ay^2 \text{ et } KMX^2+2NXY+M'Y^2$$

seront équivalentes. Or soit:

$$x = \alpha X+\beta Y,$$
$$y = \gamma X+\delta Y$$

une transformation de l'une dans l'autre. En effectuant cette substitution dans la congruence proposée, elle deviendra:

$$2NXY+M'Y^2 \equiv \Delta \text{ Mod } M.$$

Cela étant, on voit qu'on peut attribuer à Y une valeur entière quelconque, mais sans diviseur commun avec le module M, et qu'on trouvera une valeur entière correspondante pour X, par la congruence du premier degré:

$$2NXY \equiv \Delta - M'Y^2 \text{ Mod } M.$$

Cette congruence sera effectivement soluble, si $2N$ est aussi premier avec M; ce qui revient à supposer le module *impair*, et le nombre A sans facteurs communs avec ce module; comme on le voit par la condition $N^2+A \equiv 0$ Mod M. La congruence proposée admettra donc autant de solutions qu'il y a de nombres moindres que M, et premiers avec M, car on ne pourra jamais avoir:

$$\left.\begin{aligned} \alpha X+\beta Y &\equiv \alpha X'+\beta Y' \\ \gamma X+\delta Y &\equiv \gamma X'+\delta Y' \end{aligned}\right\} \text{ Mod } M$$

qu'en supposant à la fois:

$$X \equiv X',$$
$$Y \equiv Y',$$

c. à d. qu'aux solutions distinctes de la transformée en X et Y, correspondent nécessairement des solutions distinctes de la congruence proposée.

Ce qui précède conduit à la valeur suivante du nombre μ des solutions pour un module M, par rapport auquel $-A$ est *résidu*. Supposant $M = p^n p_1^{n_1} \dots p_\omega^{n_\omega}$, on aura:

$$\mu = p^{n-1}(p-1) \times p_1^{n_1-1}(p_1-1) \cdots \times p_\omega^{n_\omega-1}(p_\omega-1).$$

En combinant ensuite ce résultat avec celui qui a été obtenu précédemment pour les modules relativement auxquels $-A$ est *non-résidu*, on arrive à l'expression générale du nombre des solutions, que nous voulions obtenir. Si l'on suppose toujours

$$M = p^n p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_\omega^{n_\omega},$$

on trouvera sans peine pour cette expression générale, la forme suivante:

$$\mu = \frac{M}{p p_1 \dots p_\omega}\left[p-\left(\frac{-A}{p}\right)\right]\left[p_1-\left(\frac{-A}{p_1}\right)\right] \dots \left[p_\omega-\left(\frac{-A}{p_\omega}\right)\right],$$

dans laquelle $\left(\frac{-A}{p}\right)$ est $+1$ ou -1, suivant que $-A$ est *résidu* ou *non-résidu* du nombre premier p.

IX.

Les principes relatifs à la représentation des nombres par les formes quaternaires, que nous étudions dans ce mémoire, nous conduisent à la question de l'équivalence arithmétique de ces formes. Dans cette nouvelle recherche nous pourrons suivre encore longtemps l'analogie qui nous a déjà servi de guide, et l'on va voir s'établir par là des nouveaux rapports entre la théorie des nombres *réels* et celle des nombres *complexes*.

Nous obtiendrons en effet pour la réduction des formes f, lorsqu'elles sont définies, des résultats entièrement semblables à ceux qui concernent les formes binaires de déterminant négatif. Puis, en faisant de ces résultats, les éléments de principes nouveaux pour l'étude des fonctions homogènes à deux indéterminées, et à coefficients complexes, nous donnerons un nouvel exemple de l'identité des méthodes relatives aux nombres réels et aux nombres complexes. Dans ce champ si vaste de recherches, nous nous proposerons surtout de revenir sur l'étude des formes du second degré, qui ont été déjà l'objet d'un mémoire important de Mr. *Dirichlet*. Le travail du savant géomètre, laissant entièrement de côté, la question difficile de la distribution en *périodes* de ces formes de

même déterminant, j'essayerai dans un mémoire spécial de combler cette lacune. On aura d'ailleurs, par ce que nous dirons plus bas des fractions continues complexes, une idée de la méthode que nous employerons.

1°.

A toute forme définie à coefficients quelconques:

$$f = Avv_0 + Bvu_0 + B_0v_0u + Cuu_0,$$

correspond toujours une transformée arithmétiquement équivalente:

$$F = \mathfrak{A}VV_0 + \mathfrak{B}VU_0 + \mathfrak{B}_0V_0U + \mathfrak{C}UU_0,$$

telle que $\mathfrak{A}$ *soit non plus grand que* $\mathfrak{C}$, *et qu'en faisant:*

$$\mathfrak{B} = m + n\sqrt{-1}, \quad \mathfrak{B}_0 = m - n\sqrt{-1},$$

on ait, abstraction faite des signes:

$$2m \leqq \mathfrak{A}, \quad 2n \leqq \mathfrak{A}.$$

Concevons qu'on effectue dans f, toutes les substitutions:

$$v = aV + bU, \quad v_0 = a_0V_0 + b_0U_0,$$
$$u = cV + dU, \quad u_0 = c_0V_0 + d_0U_0,$$

où a, b, c, d, désignent indéfiniment des entiers complexes au déterminant $ad - bc = 1$, et a_0, b_0, c_0, d_0, leurs conjugués respectifs. Cela étant, formons un premier groupe dans l'ensemble des transformées ainsi obtenues, de celles où le coefficient de VV_0 est le plus petit possible; puis dans ce groupe considérons toutes celles où le coefficient de UU_0, est lui-même un minimum. Je dis que la forme unique, ou les diverses formes auxquelles on parviendra de la sorte, vérifieront les conditions énonçées.

Supposons en effet que l'une d'elles soit:

$$F = \mathfrak{A}VV_0 + \mathfrak{B}VU_0 + \mathfrak{B}_0UV_0 + \mathfrak{C}UU_0$$

et qu'on ait:

$$\mathfrak{B} = m + n\sqrt{-1}, \quad \mathfrak{B}_0 = m - n\sqrt{-1}.$$

Désignons par μ et ν, deux quantités dont la valeur absolue soit l'unité, et qui aient respectivement le même signe que m et n; si l'on fait dans F, la substitution au déterminant un:

$$V = V' - \mu U', \quad V_0 = V_0' - \mu U_0',$$
$$U = U', \quad U_0 = U_0',$$

on trouvera une transformée:

$$F' = \mathfrak{A}'V'V_0' + \mathfrak{B}'V'U_0' + \mathfrak{B}_0'V_0'U' + \mathfrak{C}'U'U_0',$$

dans laquelle:

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{C}' = \mathfrak{A} - 2\mu m + \mathfrak{C}.$$

Or il suit, de la manière même dont F a été définie et obtenue, qu'on aura nécessairement:

$$\mathfrak{C} \geqq \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{C}' \geqq \mathfrak{C};$$

et cette dernière inégalité revient à:

$$2\mu m \leqq \mathfrak{A}.$$

Considérons en second lieu la substitution:

$$\begin{aligned} V &= V' + v\sqrt{-1}\,U', & V_0 &= V_0' - v\sqrt{-1}\,U_0', \\ U &= U', & U_0 &= U_0', \end{aligned}$$

qui est encore au déterminant *un*, on arrivera tout-à-fait de même, à la condition:

$$2vn \leqq \mathfrak{A}.$$

Ainsi notre théorème est démontré.

Nous donnerons le nom de *réduites* aux formes F, qui vérifient les conditions précédentes, et nous reservons pour la suite de ces recherches, la discussion complète des divers cas dans lesquelles deux formes réduites sont équivalentes sans être identiques; cette discussion étant intimement liée à celle des divers ordres d'équivalence impropre dont nous avons parlé plus haut.

2°.

Les conditions qui viennent d'être établies, conduisent immédiatement à la suivante:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{B}_0 < \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}^2$$

et a fortiori:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{B}_0 < \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\mathfrak{C}.$$

On en conclut:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C} < 2(\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}\mathfrak{B}_0),$$

ou encore:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C} < 2(AC - BB_0),$$

puisque F et f, ont même *invariant*. Cette notion d'invariant, si facile à obtenir, est au reste la seule que supposent les théorèmes que nous venons d'établir, et qui donnent lieu à une longue suite de conséquences; comme nous pensons déjà l'avoir montré à propos des formes binaires dans notre mémoire sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres. Suivant

ici une marche analogue, nous allons traiter en premier lieu les questions relatives à l'approximation des quantités imaginaires quelconques, par des fractions rationnelles complexes.

Considérons pour cela, la forme suivante:

$$f = (v - au)(v_0 - a_0 u_0) + \frac{uu_0}{\delta^2},$$

dans laquelle a est une quantité imaginaire, a_0 sa conjuguée, et δ, une quantité réelle quelconque. Soit:

$$F = \mathfrak{A}VV_0 + \mathfrak{B}VU_0 + \mathfrak{B}_0V_0U + \mathfrak{C}UU_0$$

sa réduite, et

$$v = mV + \mu U, \qquad v_0 = m_0V_0 + \mu_0 U,$$
$$u = nV + \nu U, \qquad u_0 = n_0V_0 + \nu_0 U_0$$

la substitution propre à l'obtenir. La condition $\mathfrak{A}\mathfrak{C} < 2\Delta$ donne pour le coefficient minimum $\mathfrak{A}$, la limite $\sqrt{2\Delta}$. On a d'ailleurs:

$$\Delta = \frac{1}{\delta^2}, \qquad \mathfrak{A} = (m - an)(m_0 - a_0 n_0) + \frac{nn_0}{\delta^2};$$

ainsi pour une valeur quelconque donnée à δ, on peut toujours déterminer deux entiers complexes m et n, tels qu'on ait:

$$(m - an)(m_0 - a_0 n_0) + \frac{nn_0}{\delta^2} < \frac{\sqrt{2}}{\delta}.$$

On tire de là les conséquences suivantes.

Premièrement, les expressions $(m - an)(m_0 - a_0 n_0)$ et $\frac{nn_0}{\delta^2}$, étant essentiellement positives, on a à fortiori:

$$(A.) \qquad (m - an)(m_0 - a_0 n_0) < \frac{\sqrt{2}}{\delta}, \quad \frac{nn_0}{\delta^2} < \frac{\sqrt{2}}{\delta} \quad \text{ou,} \quad nn_0 < \delta\sqrt{2}.$$

Secondement, le produit des mêmes expressions, étant moindre que le carré de leur demi-somme, on aura encore à fortiori:

$$(m - an)(m_0 - a_0 n_0) \times \frac{nn_0}{\delta^2} < \frac{1}{2\delta^2},$$

ou bien:

$$(m - an)(m_0 - a_0 n_0) < \frac{1}{2nn_0},$$

et

$$(B.) \qquad \left(\frac{m}{n} - a\right)\left(\frac{m_0}{n_0} - a_0\right) < \frac{1}{2n^2 n_0^2}.$$

Or la *première* relation (A), montre qu'étant donnée une quantité imaginaire quelconque, a, on peut toujours en approcher par une fraction rationnelle complexe $\frac{m}{n}$, de telle manière que la norme de $m - an$, soit moindre que toute quantité donnée.

La *seconde* relation (A), donne l'ordre de grandeur du dénominateur de la fraction, lorsqu'on fixe au dessous de quelle limite doit se trouver la norme de $m - an$.

La relation (B), donne d'une manière précise la limite de l'erreur $\frac{m}{n} - a$, à quelque valeur de δ que corresponde l'approximation obtenue.

D'un autre côté, si nous observons que, quel que soit δ, les entiers complexes m et n, donnent le minimum de f, nous serons amenée à cette nouvelle conséquence:

> Il n'existe aucun système de deux autres nombres complexes, m' et n', tels que la norme de n', étant moindre que la norme de n, la norme de $m' - an'$ soit aussi moindre que celle de $m - an$.

Ainsi l'expression $(m - an)(m_0 - a_0 n_0)$ représente un *minimum* de l'expression $(v - au)(v_0 - a_0 u_0)$ relativement à toute valeur complexe entière de v, et à toute valeur complexe entière de u, dont la norme ne dépasse pas une limite donnée. On peut encore dire que $\frac{m}{n}$ approche plus de a, que toute fraction dont le dénominateur aurait une norme moindre; car l'hypothèse $n' n_0' < n n_0$, entrainant $(m' - an')(m_0' - a_0 n_0') > (m - an)(m_0 - an_0)$, on en déduit, en divisant membre à membre les inégalités qui sont de sens contraire:

$$\text{Norme}\left(\frac{m'}{n'} - a\right) > \text{Norme}\left(\frac{m}{n} - a\right).$$

Nous pouvons enfin établir d'une manière complète et rigoureuse, un théorème sur les fractions $\frac{m}{n}$, que j'ai déjà donné dans une de mes lettres à M. *Jacobi* sur la théorie des nombres.

Considérons deux minima consécutifs de la forme f, auxquels correspondent les deux systèmes d'entiers complexes $v = m$, $u = n$, et $v = m'$, $u = n'$; on pourra concevoir deux valeurs infiniment voisines de δ, auxquelles appartiennent successivement les deux systèmes, de telle sorte qu'en désignant par ε une quantité infiniment petite, on ait:

$$(m-an)(m_0-a_0n_0)+\frac{nn_0}{\delta^2}<\frac{\sqrt{2}}{\delta},$$
$$(m'-an')(m'_0-a_0n'_0)+\frac{n'n'_0}{(\delta+\varepsilon)^2}<\frac{\sqrt{2}}{\delta+\varepsilon}.$$

Mettons cette seconde inégalité sous la forme:

$$(m'-an')(m'_0-a_0n'_0)+\frac{n'n'_0}{\delta^2}<\frac{\sqrt{2}}{\delta}+\eta,$$

η étant encore infiniment petit, et multiplions la membre à membre avec la première. En faisant dans l'équation identique suivante:

$$(MM_0+NN_0)(M'M'_0+N'N'_0)$$
$$=(MM'_0+NN'_0)(M_0M'+N_0N')+(M'N-MN')(M'_0N_0-M_0N'_0),$$

(qu'on trouve en cherchant le produit des déterminants $\begin{vmatrix} N & M \\ N' & M' \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} N_0 & M_0 \\ N'_0 & M'_0 \end{vmatrix}$ qui figure dans le second membre):

$$M=m-an, \qquad M_0=m_0-a_0n_0,$$
$$M'=m'-an', \qquad M'_0=m'_0-a_0n'_0,$$
$$N=\frac{n}{\delta}, \qquad N_0=\frac{n_0}{\delta},$$
$$N'=\frac{n'}{\delta}, \qquad N'_0=\frac{n'_0}{\delta};$$

le produit des premiers membres prendra la forme:

$$\text{Norme}\left\{(m-an)(m'_0-a_0n'_0)+\frac{nn'_0}{\delta^2}\right\}+\frac{1}{\delta^2}\ \text{Norme}\,(mn'-m'n),$$

le produit des seconds membres étant: $\frac{2}{\delta^2}+\frac{\eta\sqrt{2}}{\delta}$. Or en négligeant η vis à vis des quantités finies, on en conclura, après avoir multiplié par δ^2:

$$\text{Norme}\,(mn'-m'n)<2,$$

et puisque m, n, m', n', sont des entiers complexes:

$$\text{Norme}\,(mn'-m'n)=1.$$

Cette relation entre les fractions qui correspondent à deux approximations consécutives, rattache complêtement la théorie présente à la théorie élémentaire des fractions continues. Les principes sur lesquels nous nous sommes fondés, ont donné bien rapidement, comme on voit, l'extension de cette théorie aux ***nombres complexes.*** La marche plus naturelle qui consisterait à prendre le poïnt de départ dans le procédé donné par M. ***Dirichlet*** pour obtenir le plus grand commun diviseur entre deux quantités complexes,

serait au contraire sujette à de nombreuses difficultés. Il nous semble particulièrement impossible d'établir simplement, en ce plaçant à ce point de vue, les propriétés de minimum des expressions $m - an$, $\frac{m}{n} - a$: propriétés caractéristiques du mode d'approximation des quantités réelles par les fractions continues, et que donne tout d'abord notre méthode. Quant au théorème exprimé par la relation:

$$(m - an)(m_0 - a_0 n_0) < \frac{1}{2nn_0},$$

M. ***Dirichlet*** l'a donné avec une limité numérique moins précise dans son admirable mémoire sur la théorie des formes quadratiques à coefficients et indéterminées complexes. Le procédé si ingénieux et si simple, employé dans cette occasion par l'illustre analyste, tout en conduisant par la voie la plus rapide à un résultat important, ne me semble pas pouvoir donner les rapports qui existent entre deux approximations consécutives, et qu'il faut cependant obtenir pour mettre dans toute son évidence l'analogie entre les nombres réels et les nombres complexes.

3°.

Les formes f, à coefficients entiers, et de même invariant, peuvent être distribuées en un nombre fini de classes.

Les limitations données précédemment pour les coefficients des formes réduites, font voir en effet que le nombre de ces réduites est essentiellement fini pour un invariant donné. On les trouvera toutes d'ailleurs par la méthode suivante. Soit Δ l'invariant proposé, et considérons, pour fixer les idées, seulement les formes *positives*. On prendra pour $\mathfrak{A}$ tous les nombres entiers réels qui ne surpassent pas $\sqrt{2\Delta}$, et à chaque valeur de $\mathfrak{A}$ on fera correspondre une valeur de $\mathfrak{B}$, représentée par le nombre complexe $x + y\sqrt{-1}$: la solution de la congruence

$$x^2 + y^2 \equiv \Delta \pmod{\mathfrak{A}}$$

est telle qu'on ait en valeur absolue:

$$2x \leqq \mathfrak{A}, \quad 2y \leqq \mathfrak{A}.$$

Quant à $\mathfrak{C}$, on le déterminera par la relation

$$\mathfrak{B}\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{A}\mathfrak{C} = \Delta,$$

qui fournira toujours une valeur entière. Mais s'il arrive qu'on obtienne par là quelques formes dans lesquelles $\mathfrak{C}$ soit $< \mathfrak{A}$, elles seront à rejeter, et les autres seront évidemment des formes réduites.

Considérons par exemple le cas de $\Delta = -1$, on aura la seule valeur $\mathfrak{A} = 1$, d'ou: $\mathfrak{B} = 0$, et par suite: $\mathfrak{C} = 1$; ainsi toutes les formes f, d'invariant -1, sont réductibles par le genre spécial de substitutions que nous considérons ici, à la seule forme:

$$VV_0 + UU_0.$$

Ce résultat va nous conduire très simplement au théorème de ***Jacobi*** sur le nombre des représentations d'un nombre entier impair quelconque par une somme de quatre carrés.

XII.

1°.

Dans la théorie des formes f, un nombre impair quelconque M, est représentable par la forme $vv_0 + uu_0$.

Nous avons établi en effet que la congruence:

$$x^2 + y^2 \equiv -1 \text{ Mod } M$$

est toujours résoluble pour tout module impair. Or toutes les formes:

$$F = MVV_0 + (x + y\sqrt{-1})VU_0 + (x - y\sqrt{-1})V_0U + \frac{x^2+y^2+1}{M}UU_0,$$

ayant pour invariant -1, seront équivalentes à la réduite unique $vv_0 + uu_0$, que nous avons trouvée dans ce cas. Cela étant, soit:

$$\begin{aligned} v &= aV + bU, & v_0 &= a_0V_0 + b_0U_0, \\ u &= cV + dU, & u_0 &= c_0V_0 + d_0U_0, \end{aligned}$$

une quelconque des substitutions au déterminant $ad - bc = 1$, qui donnent:

$$vv_0 + uu_0 = MVV_0 + (x + y\sqrt{-1})VU_0 + (x - y\sqrt{-1})V_0U + \frac{x^2+y^2+1}{M}UU_0,$$

on trouvera:

$$M = aa_0 + cc_0;$$

ce qui constitue une représentation de M, par la forme $vv_0 + uu_0$, qui est une somme de quatre carrés, quand on la considère par rapport aux variables réelles.

Mais comme conséquence de la théorie des formes f, cette représentation possède ce caractère tout particulier, que les deux entiers complexes a et c, sont premiers entre eux. Nous sommes amenés par là à cette conclusion:

Tout nombre impair est décomposable en quatre carrés, et parmi ces décompositions, il en existe toujours de telles que la somme de

deux des carrés, soit sans diviseurs communs avec la somme de deux autres.

2°.

Nous allons actuellement nous servir des propositions établies dans ce mémoire, pour obtenir l'expression générale du nombre de toutes les représentations de cette espèce.

Représentons cette expression par $\varphi(M)$. Des théorèmes établies (§. VI), resulte qu'en désignant par μ le nombre des solutions de la congruence:

$$x^2+y^2 \equiv -1 \mod M,$$

et par δ, le nombre des transformation en elle même de la forme vv_0+uu_0, on aura:

$$\varphi(M) = \mu\delta.$$

Or nous établirons dans la suite de ces recherches que $\delta = 8$, de sorte que si l'on fait:

$$M = p^n p_1^{n_1} \dots p_\omega^{n_\omega},$$

on trouvera:

$$\varphi(M) = \frac{8M}{p\,p_1 \dots p_\omega}\left[p-\left(\frac{-1}{p}\right)\right]\left[p_1-\left(\frac{-1}{p_1}\right)\right] \dots \left[p_\omega-\left(\frac{-1}{p_\omega}\right)\right].$$

Ainsi, dans le cas où M ne renferme qu'à la première puissance des nombres premiers $\equiv -1 \mod 4$, on aura: $\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$, $\left(\frac{-1}{p_1}\right)=-1$, etc., et la formule devenant:

$$\varphi(M) = 8(p+1)(p_1+1) \dots (p_\omega+1),$$

on voit apparaitre la fonction remarquable, qui donne la somme de tous les diviseurs de M. Mais alors, on reconnait de suite, qu'il ne peut y avoir d'autres décompositions de M en quatre carrés, que celles qui resultent des représentations propres de M dans la théorie des formes f, par vv_0+uu_0. Donc, en désignant par $\Phi(M)$, l'expression générale de toutes les représentations de M, par une somme de quatre carrés, on aura dans ce cas:

$$\Phi(M) = \varphi(M) = 8(p+1)(p_1+1) \dots (p_\omega+1);$$

comme ***Jacobi*** l'a trouvé par la théorie des fonctions elliptiques.

3°.

Pour arriver en général à la détermination de $\Phi(M)$, il nous faut recourrir aux représentations impropres de M, par la forme vv_0+uu_0. Ces représentations ont lieu en faisant:

$$v = kg, \quad v_0 = k_0 g_0,$$
$$u = kh, \quad u_0 = k_0 h_0,$$

k étant le plus grand commun diviseur des nombres complexes u et v. De là résulte:

$$M = kk_0(gg_0 + hh_0);$$

par conséquent, M est divisible par kk_0, et la substitution:

$$v = g, \quad v_0 = g_0,$$
$$u = h, \quad u_0 = h_0,$$

fournit une représentation propre du nombre $\frac{M}{kk_0}$ par la forme $vv_0 + uu_0$.

On voit par là que si M n'est divisible par aucun nombre qui soit une somme de deux carrés, ce qui s'est présenté tout-à-l'heure, il n'y aura pas de pareilles représentations. Mais si M a le diviseur

$$m = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta\sqrt{-1})(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = kk_0,$$

on cherchera d'abord les représentations propres de $\frac{M}{m}$ par la forme $vv_0 + uu_0$. Ayant ainsi trouvé les valeurs:

$$v = g, \quad v_0 = g_0,$$
$$u = h, \quad u_0 = h_0,$$

on en déduira celles où k est le plus grand commun diviseur de v et u, en prennant:

$$v = kg, \quad v_0 = k_0 g_0,$$
$$u = kh, \quad u_0 = k_0 h_0.$$

De là nous pouvons facilement conclure toutes les décompositions possibles d'un nombre en quatre carrés.

Soit en effet:

$$M = \mathrm{m}^2 + \mathrm{m}'^2 + \mathrm{m}''^2 + \mathrm{m}'''^2.$$

Si p. ex. les deux sommes: $\mathrm{m}^2 + \mathrm{m}'^2$ et $\mathrm{m}''^2 + \mathrm{m}'''^2$ ont un diviseur commun, on sait par la théorie des formes binaires qu'il sera nécessairement une somme de deux carrés; donc le plus grand commun diviseur m, sera lui même de la forme $m = \alpha^2 + \beta^2$, et la décomposition considérée, resultera d'une représentation propre de $\frac{M}{m}$, par la forme $vv_0 + uu_0$.

4°.

Ces considérations bien simples, nous conduisent à exprimer la fonction $\Phi(M)$ qui désigne le nombre de toutes les représentations de M par une somme de quatre carrés, au moyen de la fonction $\varphi(M)$. Soient en effet $m_1, m_2, \ldots m_i$ les différents diviseurs de M qui sont décomposables en deux carrés; $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_i$ les nombres de représentations de chacun de ces diviseurs par une pareille somme, on aura:

$$\Phi(M) = \mu_1\varphi\left(\frac{M}{m_1}\right)+\mu_2\varphi\left(\frac{M}{m_2}\right)+\cdots+\mu_i\varphi\left(\frac{M}{m_i}\right).$$

Cette relation va nous donner le théorème de *Jacobi,* que nous allons établir dans le cas où les nombres premiers qui divisent M, n'y entrent qu'à la première puissance.

Décomposons à cet effet M en deux facteurs, P et Q, le premier, formé du produit $p\,p_1 \ldots p_\omega$ des nombres premiers $\equiv +1 \bmod 4$, le second du produit $q\,q_1 \ldots q_\varpi$ des nombres premiers $\equiv -1 \bmod 4$. Les diviseurs décomposables en deux carrés, et designés dans la relation précédente par la lettre m, seront, comme on sait, les divers termes du developpement:

$$(1+p)(1+p_1)\ldots(1+p_\omega).$$

Or il résulte de la théorie des formes binaires, que pour un diviseur m, composé de λ facteurs premiers, le nombre μ correspondant sera 2^λ. L'expression de $\Phi(M)$ peut donc s'écrire ainsi:

$$\begin{aligned}\Phi(M) = {} & \varphi(M)\\ & +2\left\{\varphi\left(\frac{M}{p}\right)+\varphi\left(\frac{M}{p_1}\right)+\cdots+\varphi\left(\frac{M}{p_\omega}\right)\right\}\\ & +2^2\left\{\varphi\left(\frac{M}{p\,p_1}\right)+\varphi\left(\frac{M}{p\,p_2}\right)+\cdots+\varphi\left(\frac{M}{p_{\omega-1}p_\omega}\right)\right\}\\ & +2^3\left\{\varphi\left(\frac{M}{p\,p_1p_2}\right)+\varphi\left(\frac{M}{p\,p_1p_3}\right)+\cdots+\varphi\left(\frac{M}{p_{\omega-2}p_{\omega-1}p_\omega}\right)\right\},\\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

Cela posé, d'après ce que nous avons obtenu précédemment en général:

$$\varphi(M) = 8(p-1)(p_1-1)\ldots(p_\omega-1)(q+1)(q_1+1)\ldots(q_\varpi+1)$$

d'où l'on conclut les relations:

$$\varphi\left(\frac{M}{p}\right) = \frac{\varphi(M)}{p-1},$$
$$\varphi\left(\frac{M}{pp_1}\right) = \frac{\varphi(M)}{(p-1)(p_1-1)},$$
$$\varphi\left(\frac{M}{pp_1p_2}\right) = \frac{\varphi(M)}{(p-1)(p_1-1)(p_2-1)},$$
$$\text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

de sorte que l'expression de $\Phi(M)$ prend cette nouvelle forme:

$$\Phi(M) = \varphi(M)\left\{1+2\Sigma\frac{1}{p-1}+2^2\Sigma\frac{1}{(p-1)(p_1-1)}+2^3\Sigma\frac{1}{(p-1)(p_1-1)(p_2-1)}+\cdots\right\},$$

les signes Σ désignant successivement la somme des quantités $\frac{1}{p-1}$, la somme de leurs produits deux à deux, trois à trois etc. Or il est évident qu'on a ainsi le développement du produit:

$$\left(1+\frac{2}{p-1}\right)\left(1+\frac{2}{p_1-1}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{p_\omega-1}\right)$$

qu'on peut ramener à:

$$\frac{p+1}{p-1}\cdot\frac{p_1+1}{p_1-1}\cdots\frac{p_\omega+1}{p_\omega-1}.$$

Nous obtenons donc, en supprimant le facteur commun $(p-1)(p_1-1)\ldots(p_\omega-1)$:

$$\Phi(M) = 8(p+1)(p_1+1)\ldots(p_\omega+1)(q+1)(q_1+1)\ldots(q_\varpi+1);$$

ce qui est précisément le théorème de *Jacobi*.

Pour le cas plus compliqué, où le nombre M contient des diviseurs premiers à des puissances quelconques, nous remettons à le traiter lorsque nous publierons la suite de ces recherches; dans l'espérance, de la présenter d'une manière plus concise et plus élégante, que nous ne pourrions le faire maintenant.

Paris, Août 1853.

21.

Intégration des équations aux différences partielles simultanées d'une certaine classe.

(Par M. l'abbé *Aoust*, Professeur de mathématiques pures à la Faculté des sciences de Besançon.)

Un grand nombre de questions de physique mathématique et de mécanique conduisent à des équations aux différences partielles, linéaires, dont la forme suit des lois particulières, et qui renferment un nombre de fonctions égal à celui des équations, leurs dérivées premières ou secondes par rapport au temps, ainsi que leurs dérivées premières et secondes par rapport à une autre variable qui fixe la position d'un point quelconque du corps, les fonctions et leurs dérivées étant multipliées par des fonctions connues de la même variable. Un pareil système peut présenter deux cas: le premier est celui où les variables dépendantes se trouvent séparées dans les équations. Ce cas est simple, puisque chaque équation se traite séparément. Le second est celui où les variables dépendantes ne sont pas séparées dans les équations. Ce cas offre une grande complication, puisqu'il faut, en général, traiter les équations simultanément.

Une méthode uniforme a été exposée et suivie par M. ***Poisson***, dans son traité sur *la chaleur* et dans *sa mécanique*, pour la résolution des questions qui rentrent dans le premier cas. Mais, la méthode qui fournit l'intégrale d'une équation aux différences partielles, peut-elle fournir aussi les intégrales d'un système d'équations simultanées aux différences partielles? C'est une question que l'on pouvait se proposer de résoudre. M. ***Poisson*** s'exprime ainsi dans son traité sur la chaleur, page 166: „Je crois mon procédé appli„cable à tous les cas, soit que la question ne présente qu'une seule inconnue, „soit qu'on ait à déterminer plusieurs inconnues dépendantes d'un pareil nombre „d'équations aux différences partielles linéaires et simultanées etc." La présomption de l'illustre Géomètre était une raison qui s'ajoutait à l'importance de la question pour m'engager à la traiter.

1.

Soient m équations aux différences partielles simultanées; le nombre des variables est $m+2$, dont m dépendantes $x, y, z, \ldots w$, et 2 indépendantes, t le temps, et v la variable qui fixe la position d'un point quelconque. La forme de ces équations, fournies par les questions naturelles, suit toujours certaines lois qu'il sera facile d'appercevoir.

Soient donc les équations

$$(1.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d}{dv}\left(K_1\frac{dx}{dv}\right)-\frac{d}{dv}\left(K_2\frac{dy}{dv}\right)-\frac{d}{dv}\left(K_3\frac{dz}{dv}\right)-\cdots\\
&\qquad -\frac{d}{dv}\left(K_m\frac{dw}{dv}\right)-G_1x-G_2y-G_3z-\cdots-G_mw=0,\\
&\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{d}{dv}\left(K_2\frac{dx}{dv}\right)-\frac{d}{dv}\left(K_{m+1}\frac{dy}{dv}\right)-\frac{d}{dv}\left(K_{m+2}\frac{dz}{dv}\right)-\cdots\\
&\qquad -\frac{d}{dv}\left(K_{2m-1}\frac{dw}{dv}\right)-G_2x-G_{m+1}y-G_{m+2}z-\cdots-G_{2m-1}w=0,\\
&\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{d}{dv}\left(K_3\frac{dx}{dv}\right)-\frac{d}{dv}\left(K_{m+2}\frac{dy}{dv}\right)-\frac{d}{dv}\left(K_{m+3}\frac{dz}{dv}\right)-\cdots\\
&\qquad -\frac{d}{dv}\left(K_{2m}\frac{dw}{dv}\right)-G_3x-G_{m+2}y-G_{m+3}z-\cdots-G_{2m}w=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{dw}{dt^2}-\frac{d}{dv}\left(K_m\frac{dx}{dv}\right)-\frac{d}{dv}\left(K_{2m-1}\frac{dy}{dv}\right)-\frac{d}{dv}\left(K_{2m}\frac{dz}{dv}\right)-\cdots\\
&\qquad -\frac{d}{dv}\left(K_{3m-3}\frac{dw}{dv}\right)-G_mx-G_{2m-1}y-G_{2m}z-\cdots-G_{3m-3}w=0,
\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles $K_1, K_2, K_3, \ldots G_1, G_2, \ldots$ etc. sont des fonctions de la variable indépendante v.

Les intégrales de ces équations doivent satisfaire à certaines conditions; les unes sont relatives à une *époque* donnée, et les autres à des *points* déterminés. Ainsi on doit avoir,

pour $t=0$:

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned}
&x=f_1(v),\quad y=f_2(v),\quad z=f_3(v),\ \ldots\ w=f_m(v),\\
&\frac{dx}{dt}=\varphi_1(v),\quad \frac{dy}{dt}=\varphi_2(v),\quad \frac{dz}{dt}=\varphi_3(v),\ \ldots\ \frac{dw}{dt}=\varphi_m(v).
\end{aligned}\right.$$

Relativement aux limites v' et v'' l'on aura,

pour $v = v'$:

$$(3.)'\quad \begin{cases} K_1\frac{dx}{dv} + K_2\cdot\frac{dy}{dv} + K_3\cdot\frac{dz}{dv} + \cdots \\ \qquad + K_m\cdot\frac{dw}{dv} - h_1 x - h_2 y \quad - h_3 z \quad - \cdots - h_m w \quad = 0, \\ K_2\frac{dx}{dv} + K_{m+1}\frac{dy}{dv} + K_{m+2}\frac{dz}{dv} + \cdots \\ \qquad + K_{2m-1}\frac{dw}{dv} - h_2 x - h_{m+1} y - h_{m+2} z - \cdots - h_{2m-1} w = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_m\frac{dx}{dv} + K_{2m-1}\frac{dy}{dv} + K_{2m}\frac{dz}{dv} + \cdots \\ \qquad + K_{3m-3}\frac{dw}{dv} - h_m x - h_{2m-1} y - h_{2m} z - \cdots - h_{3m-3} w = 0, \end{cases}$$

pour $v = v''$:

$$(3.)''\quad \begin{cases} K_1\frac{dx}{dv} + K_2\cdot\frac{dy}{dv} + K_3\cdot\frac{dz}{dv} + \cdots \\ \qquad + K_m\cdot\frac{dw}{dv} - h'_1 x - h'_2 y \quad - h'_3 z \quad - \cdots - h'_m w \quad = 0, \\ K_2\frac{dx}{dv} + K_{m+1}\frac{dy}{dv} + K_{m+2}\frac{dz}{dv} + \cdots \\ \qquad + K_{2m-1}\frac{dw}{dv} - h'_2 x - h'_{m+1} y - h'_{m+2} z - \cdots - h'_{2m-1} w = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_m\frac{dx}{dv} + K_{2m-1}\frac{dy}{dv} + K_{2m}\frac{dz}{dv} + \cdots \\ \qquad + K_{3m-3}\frac{dw}{dv} - h'_m x - h'_{2m+1} y - h'_{2m} z - \cdots - h'_{3m-3} w = 0. \end{cases}$$

Ces équations aux limites, sont très générales; $h_1, h_2, \ldots$ etc., $h'_1, h'_2, \ldots$ etc. sont des constantes positives. Suivant que l'on supposera ces quantités nulles, ou infinies, on aura tous les cas qui peuvent se présenter dans les problèmes de l'espèce qui nous occupe.

Pour intégrer les équations (1), nous poserons

(4.) $\quad x = AX\sin(\varrho t + \alpha),\quad y = AY\sin(\varrho t + \alpha),\ \ldots\ w = AW\sin(\varrho t + \alpha),$

A, α étant deux constantes arbitraires, $X, Y, Z, \ldots W$ des fonctions de v, ϱ un paramètre variable.

En portant ces valeurs dans les équations (1), elles deviendront:

$$(5.)\quad\begin{cases}\varrho^2 X+\frac{d}{dv}\left(K_1\frac{dX}{dv}\right)+\frac{d}{dv}\left(K_2\frac{dY}{dv}\right)+\cdots\\ \qquad+\frac{d}{dv}\left(K_m\frac{dW}{dv}\right)+G_1X+G_2Y+\cdots+G_mW=0,\\ \varrho^2 Y+\frac{d}{dv}\left(K_2\frac{dX}{dv}\right)+\frac{d}{dv}\left(K_{m+1}\frac{dY}{dv}\right)+\cdots\\ \qquad+\frac{d}{dv}\left(K_{2m-1}\frac{dW}{dv}\right)+G_2X+G_{m+1}Y+\cdots+G_{2m-1}W=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varrho^2 W+\frac{d}{dv}\left(K_m\frac{dX}{dv}\right)+\frac{d}{dv}\left(K_{2m-1}\frac{dY}{dv}\right)+\cdots\\ \qquad+\frac{d}{dv}\left(K_{3m-3}\frac{dW}{dv}\right)+G_mX+G_{2m-1}Y+\cdots+G_{3m-3}W=0.\end{cases}$$

Pour $v=v'$, on aura aussi:

$$(6.)'\quad\begin{cases}K_1\frac{dX}{dv}+K_1\frac{dY}{dv}+\cdots+K_m\frac{dW}{dv}-h_1X-h_2Y-\cdots-h_mW=0,\\ K_2\frac{dX}{dv}+K_{m+1}\frac{dY}{dv}+\cdots+K_{2m-1}\frac{dW}{dV}-h_2X-h_{m+1}Y-\cdots-h_{2m-1}W=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ K_m\frac{dX}{dv}+K_{2m-1}\frac{dY}{dv}+\cdots+K_{3m-3}\frac{dW}{dv}-h_mX-h_{2m-1}Y-\cdots-h_{3m-3}W=0,\end{cases}$$

et pour $v=v''$:

$$(6.)''\quad\begin{cases}K_1\frac{dX}{dv}+K_2\frac{dY}{dv}+\cdots+K_m\frac{dW}{dv}-h'_1X-h'_2Y-\cdots-h'_mW=0,\\ K_2\frac{dX}{dv}+K_{m+1}\frac{dY}{dv}+\cdots+K_{2m-1}\frac{dW}{dv}-h'_2X-h'_{m+1}Y-\cdots-h'_{2m-1}W=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ K_m\frac{dX}{dv}+K_{2m-1}\frac{dY}{dv}+\cdots+K_{3m-3}\frac{dW}{dv}-h'_mX-h'_{2m+1}Y-\cdots-h'_{3m-3}W=0.\end{cases}$$

Or, si l'on donne à X, Y, Z, ... W des valeurs arbitraires X_0, Y_0, Z_0, ... W_0 dans les équations (6)', on aura un système de m équations linéaires, à pareil nombre d'inconnues, d'où l'on tirera les valeurs de $\frac{dX}{dv}$, $\frac{dY}{dv}$, ... $\frac{dW}{dv}$ pour $v=v'$. Cela posé, il est évident que les intégrales des équations (5), calculées par les séries, ou par un moyen quelconque, ne contiendront

que m sortes de termes dont chacun sera multiplié par l'une des quantités $X_0, Y_0, \ldots W_0$; et, en portant les valeurs générales des fonctions $X, Y, \ldots W$ et de leurs derivées dans les équations (6)″, après y avoir fait $v = v''$, on aura m équations de la forme

$$pX_0 + qY_0 + rZ_0 + \ldots + sW_0 = 0.$$

En éliminant $X_0, Y_0, \ldots W$, entre ces m équations, l'on aura une équation finale en ϱ que nous représenterons par

$$(7.) \qquad F(\varrho) = 0.$$

Ce seront les valeurs de ϱ tirées de cette équation qu'il faudra introduire successivement dans les équations (4); et comme les équations proposées sont linéaires, on aura pour intégrales générales:

$$(8.) \quad x = \Sigma AX \sin(\varrho t + \alpha), \; y = \Sigma AY \sin(\varrho t + \alpha), \ldots w = \Sigma AW \sin(\varrho t + \alpha),$$

dans lesquelles le signe Σ s'étend à toutes les racines de l'équation $F(\varrho) = 0$ et aux valeurs correspondantes de $X, Y, Z, \ldots W$.

2.

Nous allons nous occuper maintenant de la détermination des constantes A et α. Cette détermination est un point important de la théorie; elle se fait bien simplement de la manière suivante.

Multiplions les équations (1), la première par Xdv, la deuxième par Zdv, la m^{me} par Wdv, et ajoutons et intégrons de v' à v''. Si nous posons pour abréger:

$$\int_{v'}^{v''} (X_x + Y_y + Z_z + \cdots + W_w)\, dv = \xi,$$

$$\int_{v'}^{v''} \left\{ X \frac{d}{dv}\left(K_1 \frac{dx}{dv}\right) + Y \frac{d}{dv}\left(K_2 \frac{dx}{dv}\right) + \cdots + W \frac{d}{dv}\left(K_m \frac{dx}{dv}\right) \right\} dv = M_{(x)},$$

$$\int_{v'}^{v''} \left\{ X \frac{d}{dv}\left(K_2 \frac{dy}{dv}\right) + Y \frac{d}{dv}\left(K_{m+1} \frac{dy}{dv}\right) + \cdots + W \frac{d}{dv}\left(K_{2m-1} \frac{dy}{dv}\right) \right\} dv = M_{(y)},$$

. . . . . .

$$\int_{v'}^{v''} \left\{ X \frac{d}{dv}\left(K_m \frac{dw}{dv}\right) + Y \frac{d}{dv}\left(K_{2m-1} \frac{dw}{dv}\right) + \cdots + W \frac{d}{dv}\left(K_{3m-3} \frac{dw}{dv}\right) \right\} dv = M_{(w)},$$

$$\int_{v'}^{v''}(G_1X+G_2Y+\cdots+G_mW)\cdot x\,dv = N_{(x)},$$

$$\int_{v'}^{v''}(G_2X+G_{m+1}Y+\cdots+G_{2m-1}W)y\,dv = N_{(y)},$$

. . . . . .

$$\int_{v'}^{v''}(G_mX+G_{2m-1}Y+\cdots+G_{3m-3}W)w\,dv = N_{(w)},$$

il viendra:

$$(9.)\qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = M_{(x)}+M_{(y)}+\cdots+M_{(w)}+N_{(x)}+N_{(y)}+\cdots+N_{(w)}.$$

Intégrons par parties tous les termes de $M_{(x)}$ entre les limites v' et v'', nous aurons:

$$\int_{v'}^{v''}X\frac{d}{dv}\left(K_1\frac{dx}{dv}\right)dv=\left\{X\left(K_1\frac{dx}{dv}\right)\right\}_{v'}^{v''}-\left\{x\left(K_1\frac{dX}{dv}\right)\right\}_{v'}^{v''}+\int_{v'}^{v''}x\frac{d}{dv}\left(K_1\frac{dX}{dv}\right)dv,$$

. . . . . .

$$\int_{v'}^{v''}W\frac{d}{dv}\left(K_m\frac{dx}{dv}\right)dv=\left\{W\left(K_m\frac{dx}{dv}\right)\right\}_{v'}^{v''}-\left\{x\left(K_m\frac{dW}{dv}\right)\right\}_{v'}^{v''}+\int_{v'}^{v''}x\frac{d}{dv}\left(K_m\frac{dW}{dv}\right)dv.$$

En ajoutant toutes ces intégrales, et en représentant par $S_{(x)}$ les parties qui sont en dehors du signe $\int$, on aura:

$$M_{(x)}=\int_{v'}^{v''}\left\{x\frac{d}{dv}\left(K_1\frac{dX}{dv}+K_2\frac{dY}{dv}+\cdots+K_m\frac{dW}{dv}\right)\right\}dv+S_{(x)}.$$

En opérant de la même manière, on trouvera:

$$M_{(y)}=\int_{v'}^{v''}\left\{y\frac{d}{dv}\left(K_2\frac{dX}{dv}+K_{m+1}\frac{dY}{dv}+\cdots+K_{2m-1}\frac{dW}{dv}\right)\right\}dv+S_{(y)},$$

. . . . . .

$$M_{(w)}=\int_{v'}^{v''}\left\{w\frac{d}{dv}\left(K_m\frac{dX}{dv}+K_{2m-1}\frac{dY}{dv}+\cdots+K_{3m-3}\frac{dW}{dv}\right)\right\}dv+S_{(w)}.$$

Il est aisé de voir que la somme des termes

$$S_{(x)}+S_{(y)}+S_{(z)}+\cdots+S_{(w)}$$

est nulle en vertu des équations (3)′, (3)″; (6)′, (6)″. Il suffit, pour cela, d'éliminer h_1 entre la première des équations (3)′ et la première des équations (6)′; h_1' entre la première des équations (3)″ et la première des équations (6)″, d'ajouter les deux équations résultantes; d'éliminer h_2 entre la deuxième des équations (3)′ et la deuxième des équations (6)′; h_2' entre la

deuxième des équations (3)″ et la deuxième des équations (6)″, d'ajouter les deux équations résultantes; et ainsi de suite. Cela posé, si l'on fait la somme de tous les résultats ainsi obtenus, l'on trouvera:

$$S_{(x)}+S_{(y)}+S_{(z)}+\cdots+S_{(w)}=0.$$

D'après cela, si l'on appelle $M_{(X)}$, $N_{(X)}$ ce que deviennent $M_{(x)}$, $N_{(x)}$ lorsqu'on y change x en X, et $X, Y, \ldots W$ en $x, y, \ldots w$, et ainsi de suite: l'équation (9) pourra s'écrire sous la forme

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=M_{(X)}+M_{(Y)}+M_{(Z)}+\cdots+M_{(W)}+N_{(X)}+N_{(Y)}+\cdots+N_{(W)}.$$

Multiplions les équations (5), la 1ière par $x\,dv$, la 2me par $y\,dv$, ... la m^{me} par $w\,dv$, ajoutons et intégrons de v' à v'', nous trouverons:

$$-\varrho^2\xi=M_{(x)}+M_{(y)}+M_{(z)}+\cdots+M_{(w)}+N_{(x)}+N_{(y)}+\cdots+N_{(w)};$$

on aura donc l'équation différentielle

$$(10.)\qquad \frac{d^2\xi}{dt^2}+\varrho^2\xi=0,$$

dont l'intégrale est

$$\int_{v'}^{v''}(X_x+Y_y+Z_z+\cdots+W_w)\,dv=B\sin(\varrho t+\beta),$$

B et β étant deux constantes arbitraires. On détermine ces deux constantes en posant $t=0$ dans cette équation et dans sa dérivée, et en ayant égard aux équations (2). De cette manière on obtient:

$$B\sin\beta=\int(Xf_1(v)+Yf_2(v)+\cdots+Wf_m(v))\,dv=\Sigma_1\Big(\int Xf(v)\,dv\Big),$$

$$B\cos\beta=\frac{1}{\varrho}\int(X\varphi_1(v)+Y\varphi_2(v)+\cdots+W\varphi_m(v))\,dv=\Sigma_1\Big(\int X\varphi(v)\,dv\Big),$$

où le signe Σ_1 s'étend à tous les produits $Xf_1(v)$, $Yf_2(v)$, ... $X\varphi_1(v)$, $Y\varphi_2(v)$ ... On a donc pour ξ:

$$(11.)\qquad \xi=\Sigma_1\Big(\int_{v'}^{v''}Xx\,dv\Big)$$

$$=\cos\varrho t\,.\,\Sigma_1\Big(\int_{v'}^{v''}Xf(v)\,dv\Big)+\frac{\sin\varrho t}{\varrho}\Sigma_1\Big(\int_{v'}^{v''}X\varphi(v)\,dv.$$

L'équation (10) est absolument la même que celle que l'on trouve dans le cas d'une seule équation aux différences partielles, et l'équation (11) qui est de la même forme que celle que l'on trouve dans ce cas particulier, donne naissance aux mêmes conclusions.

Si l'on substitue dans l'équation (11) les valeurs de x, y, z, ... w, fournies par les équations (8), l'on aura dans le premier membre deux séries, suivant les sinus et les cosinus des arcs donnés par les produits de t et des différentes racines de l'équation $F(\varrho) = 0$. Ces deux séries devront être identiques avec les deux termes du second membre de la même équation. Il résulte de là que, si l'on représente par ϱ_i une racine quelconque de l'équation $F(\varrho) = 0$, tant que ϱ_i sera différent de ϱ, les coefficients des sinus et cosinus correspondants à ces valeurs de ϱ_i, seront nuls. Mais si ϱ_i est égal à ϱ, les coefficients des sinus et cosinus seront identiques. De là on tire les équations suivantes:

$$(12.)\qquad \Sigma_1\Big(\int_{v'}^{v''} XX_i\,dv\Big) = \int_{v'}^{v''} (XX_i + YY_i + \cdots + WW_i)\,dv = 0,$$

$$A\sin\alpha\int_{v'}^{v''}\Sigma_1 X^2\,dv = \int_{v'}^{v''}\Sigma_1 Xf(v)\,dv,$$

$$A\cos\alpha\int_{v'}^{v''}\Sigma_1 X^2\,dv = \frac{1}{\varrho}\int_{v'}^{v''}\Sigma_1 X\varphi(v)\,dv.$$

Les valeurs générales de x, y, z, ... w seront donc:

$$(13.)\qquad \begin{cases} x = \Sigma X\left\{\dfrac{\int_{v'}^{v''}\Sigma_1 Xf(v)\,dv}{\int_{v'}^{v''}\Sigma_1 X^2\,dv}\right\}\cos\varrho t + \Sigma X\left\{\dfrac{\int_{v'}^{v''}\Sigma_1 X\varphi(v)\,dv}{\varrho\int_{v'}^{v''}\Sigma_1 X^2\,dv}\right\}\sin\varrho t, \\ y = \Sigma Y\left\{\dfrac{\int_{v'}^{v''}\Sigma_1 Xf(v)\,dv}{\int_{v'}^{v''}\Sigma_1 X^2\,dv}\right\}\cos\varrho t + \Sigma Y\left\{\dfrac{\int_{v'}^{v''}\Sigma_1 X\varphi(v)\,dv}{\varrho\int_{v'}^{v''}\Sigma_1 X^2\,dv}\right\}\sin\varrho t, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w = \Sigma W\left\{\dfrac{\int_{v'}^{v''}\Sigma_1 Xf(v)\,dv}{\int_{v'}^{v''}\Sigma_1 X^2\,dv}\right\}\cos\varrho t + \Sigma W\left\{\dfrac{\int_{v'}^{v''}\Sigma_1 X\varphi(v)\,dv}{\varrho\int_{v'}^{v''}\Sigma_1 X^2\,dv}\right\}\sin\varrho t. \end{cases}$$

Telles sont les intégrales générales des équations aux différences partielles simultanées que nous nous proposions de traiter. Elles sont de même forme que l'intégrale d'une seule équation aux différences partielles.

Nous remarquerons que la même méthode serait applicable dans le cas où les équations (1) renfermeraient la derivée première par rapport au temps, au lieu de la derivée seconde. Seulement les intégrales générales renfermeraient une seule série qui dépendrait des exponentielles $e^{\varrho_i t}$.

3.

L'équation $F(\varrho)=0$, jouit de propriétés importantes intimement liées avec les phénomenes physiques représentés par les intégrales (13). Ces propriétés se démontrent aussi simplement dans le cas de plusieurs équations simultanées aux différences partielles que dans le cas d'une seule équation.

I. L'équation $F(\varrho)=0$ n'a pas de racines imaginaires de la forme $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$.

Soient ϱ et ϱ_i deux racines de l'équation $F(\varrho)=0$; soient $X, Y, \ldots W$ les valeurs relatives à ϱ; $X_i, Y_i, \ldots W_i$ les valeurs relatives à ϱ_i; appelons $H_1, H_2, H_3, \ldots H_m$ les premiers membres des équations (6)′ et $L_1, L_2, \ldots L_m$ les premiers membres des équations (6)″ relatifs à la racine ϱ, et $H_1^{(i)}, H_2^{(i)}, \ldots$ $L_1^{(i)}, L_2^{(i)}, \ldots$ les premiers membres des mêmes équations relatifs à la racine ϱ_i. Si l'on fait successivement dans le premier membre des équations (5), $\varrho=\varrho$ et $\varrho=\varrho_i$ que l'on multiplie l'équation relative à ϱ par $X_i dv$ et l'équation relative à ϱ_i par $X dv$ et qu'on retranche l'une de l'autre, l'on aura:

$$(\varrho^2-\varrho_i^2)XX_i dv+\left\{X_i\frac{d}{dv}\left(K_1\frac{dX}{dv}\right)-X\frac{d}{dv}\left(K_1^{(i)}\frac{dX_i}{dv}\right)\right\}dv$$

$$+\left\{X_i\frac{d}{dv}\left(K_2\frac{dY}{dv}\right)-X\frac{d}{dv}\left(K_2^{(i)}\frac{dY_i}{dv}\right)dv+\cdots\right.$$

$$+(G_1-G_1^{(i)})XX_i dv+(G_2YX_i-G_2^{(i)}XY_i)dv+\cdots=0.$$

Intégrons entre les limites v' et v'', et remarquons qu'un terme de la forme $X_i\frac{d}{dv}\left(K_2\frac{dY}{dv}\right)-X\frac{d}{dv}\left(K_2^{(i)}\frac{dY_i}{dv}\right)$ peut être remplacé par $\frac{d}{dv}\left\{X_iK_2\frac{dY}{dv}-XK_2^{(i)}\frac{dY_i}{dv}\right\}$ $-\left\{K_2\frac{dX_i}{dv}\frac{dY}{dv}-K_2^{(i)}\frac{dX}{dv}\frac{dY_i}{dv}\right\}$, il viendra:

$$(\varrho^2-\varrho_i^2)\int_{v'}^{v''}XX_i dv+\left\{X_i\left(K_1\frac{dX}{dv}+K_2\frac{dY}{dv}+\cdots+K_m\frac{dW}{dv}\right)\right\}_{v'}^{v''}$$

$$-\left\{X\left(K_1\frac{dX_i}{dv}+K_2\frac{dY_i}{dv}+\cdots+K_m\frac{dW_i}{dv}\right)\right\}_{v'}^{v''}$$

$$+\int_{v'}^{v''}X_i(G_1X+G_2Y+\cdots+G_mW)dv-\int_{v'}^{v''}X(G_1^{(i)}X_i+G_2^{(i)}Y_i+\cdots+G_m^{(i)}W_i)dv$$

$$-\int_{v'}^{v''}\frac{dX_i}{dv}\left(K_1\frac{dX}{dv}+K_2\frac{dY}{dv}+\cdots+K_m\frac{dW}{dv}\right)dv$$

$$+\int_{v'}^{v''}\frac{dX}{dv}\left(K_1\frac{dX_i}{dv}+K_2\frac{dY_i}{dv}+\cdots+K_m\frac{dW_i}{dv}\right)dv=0.$$

Cette relation donne la valeur de $\int_{v'}^{v''} XX_i\,dv$. On trouvera de la même manière la valeur de $\int_{v'}^{v''} YY_i\,dv$ et de $\int_{v'}^{v''} WW_i\,dv$.

Si l'on fait la somme de toutes ces intégrales, l'on trouvera, reductions faites:

$$(14.)\quad (\varrho^2-\varrho_1^2)\int_{v'}^{v''}(XX_i+YY_i+ZZ_i+\cdots+WW_i)\,dv$$
$$=\{XL_1^{(i)}-X_iL_1\}^{v''}+\{YL_2^{(i)}-Y_iL_2\}^{v''}$$
$$+\cdots+\{WL_m^{(i)}-W_iL_m\}^{v''}-\{XH_1^{(i)}-X_iH_1\}_{v'}$$
$$-\{YH_2^{(i)}-Y_iH_2\}_{v'}-\cdots-\{WH_m^{(i)}-W_iH_m\}_{v'}.$$

Or, à cause des équations (6)′, (6)″:

$$L_1=0,\ L_2=0,\ \ldots\ L_m=0;\quad L_1^{(i)}=0,\ \ldots\ L_2^{(i)}=0,\ \ldots,$$
$$H_1=0,\ H_2=0,\ \ldots\ H_1^{(i)}=0,\ H_2^{(i)}=0,\ \ldots;$$

on obtient donc, en définitive, l'équation que nous avons déjà trouvée (12):

$$\int_{v'}^{v''}(XX_i+YY_i+ZZ_i+\cdots+WW_i)\,dv=0.$$

Cela posé, soient $\varrho=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\varrho_i=\alpha-\beta\sqrt{-1}$, X deviendra de la forme $P_{(x)}+Q_{(x)}\sqrt{-1}$ et X_i de la forme $P_{(x)}-Q_{(x)}\sqrt{-1}$; Y deviendra $P_{(y)}+Q_{(y)}\sqrt{-1}$ et Y_i, $P_{(y)}-Q_{(y)}\sqrt{-1}$, et ainsi de suite; par conséquent l'équation ci-dessus deviendra:

$$\int_{v'}^{v''}\{P_{(x)}^2+Q_{(x)}^2+P_{(y)}^2+Q_{(y)}^2+\cdots+P_{(w)}^2+Q_{(w)}^2\}\,dv=0:$$

équation absurde, puisque tous les éléments de l'intégrale sont positifs.

L'équation $F(\varrho)=0$ ne peut donc pas avoir des racines imaginaires de la forme $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$.

II. L'équation $F(\varrho)=0$ n'a pas de racines égales.

En effet, l'équation (14) ne peut pas être satisfaite quand on fait $\varrho=\varrho_i$. La valeur de l'intégrale contenue dans le premier membre de cette équation se présente sous forme indéterminée quand on fait $\varrho=\varrho_i$. Pour avoir sa vraie valeur, il faut, selon la règle, différentier cette équation par rapport à ϱ, et puis supposer $\varrho=\varrho_i$. Différentions et remarquons que X devient X_i, H_1 devient $H_1^{(i)}$, etc. quand on y fait $\varrho=\varrho_i$; on aura

$$2\varrho_i \int_{v'}^{v''} (X_i^2 + Y_i^2 + \cdots + W_i^2)\, dv$$

$$= \left\{\frac{dX_i}{d\varrho} L_1^{(i)} - X_i \frac{dL_1^{(i)}}{d\varrho}\right\}^{v''} + \cdots + \left\{\frac{dW_i}{d\varrho} L_m^{(i)} - W_i \frac{dL_m^{(i)}}{d\varrho}\right\}^{v''}$$

$$- \left\{\frac{dX_i}{d\varrho} H_1^{(i)} - X_i \frac{dH_1^{(i)}}{d\varrho}\right\}_{v'} - \cdots - \left\{\frac{dW_i}{d\varrho} H_m^{(i)} - W_i \frac{dH_m^{(i)}}{d\varrho}\right\}_{v'}.$$

Puisque l'on suppose que ϱ est égal à ϱ_i, l'on admet qu'il y a deux racines égales à ϱ_i; par conséquent les équations $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, ... $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ doivent être satisfaites pour la valeur $\varrho = \varrho_i$, ainsi que leurs dérivées complètes par rapport à ϱ. Ces conditions rendront nul le second membre de l'équation précédente et l'on aura simplement:

$$\int_{v'}^{v''} (X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 + \cdots + W_i^2)\, dv = 0:$$

équation absurde, puisque tous ses élémens sont essentiellement positifs. On ne peut donc pas supposer que l'équation $F(\varrho) = 0$ ait deux racines égales.

Nous remarquerons en terminant que la méthode d'intégration précédente est aussi applicable à des équations simultanées aux différences partielles d'un ordre supérieur au second; et les intégrales jouissent aussi de propriétés analogues à celles que nous venons de démontrer.

Besançon, Mars 1853.

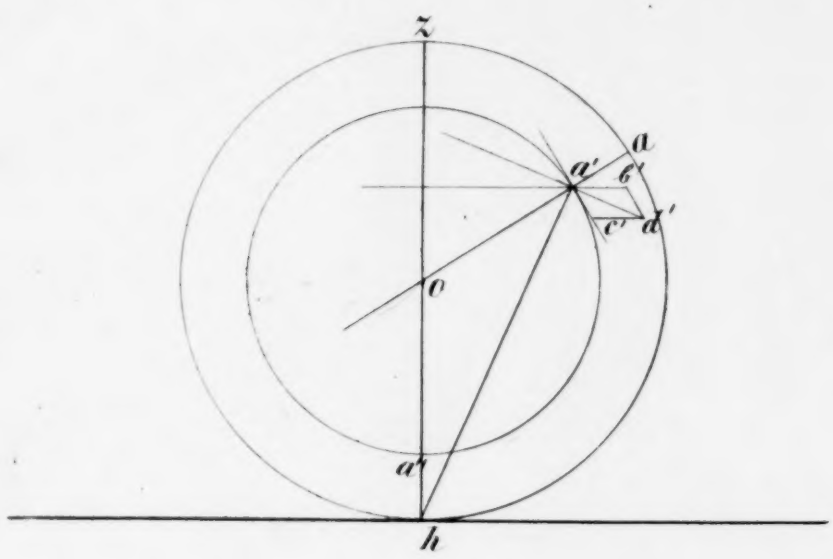
Verbesserungen im 1sten Heft dieses Bandes.

Seite 1 Mitte lies $3g(g-2)$ statt $3g(g-1)$
— 8 unten lies $\nu(\nu+1)-1$ statt $\nu(\nu+1)$
— 106 Satz 3. lies „die C^3 hat ein Paar" statt „die C^3 hat keine"

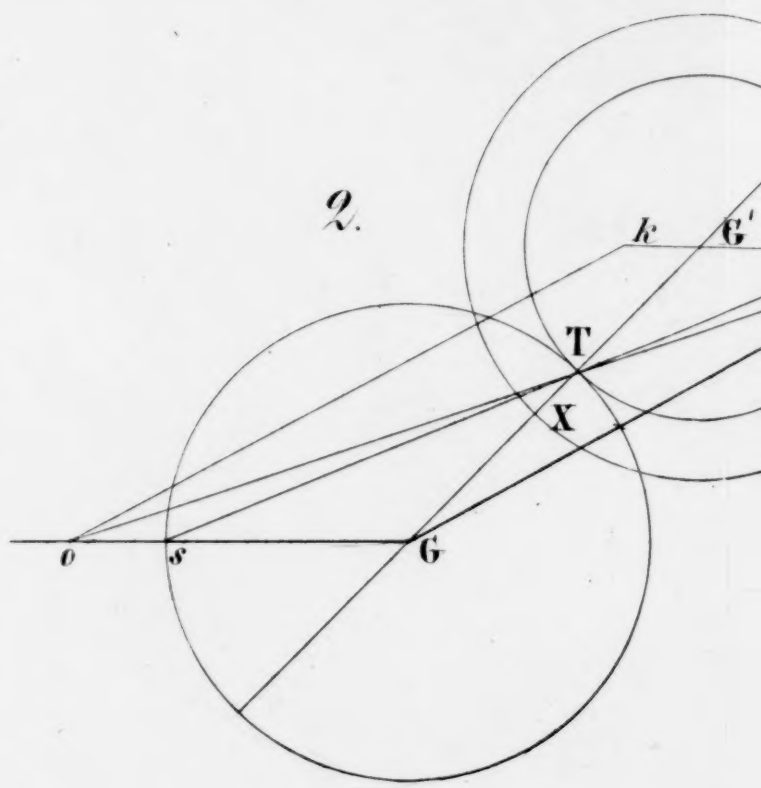
Im Inhaltsverzeichnifs des 2ten Hefts mufs es unter No. 6. heifsen:
„Poligonometria" st. „Peligonometria"

Druck von G. Reimer in Berlin.

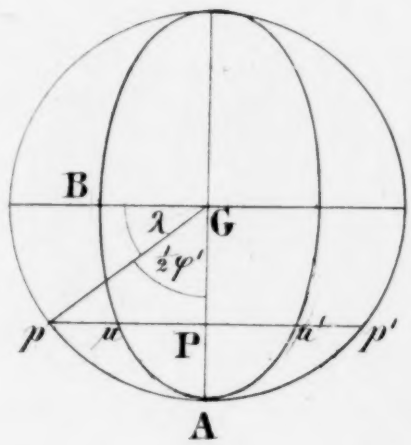
1.



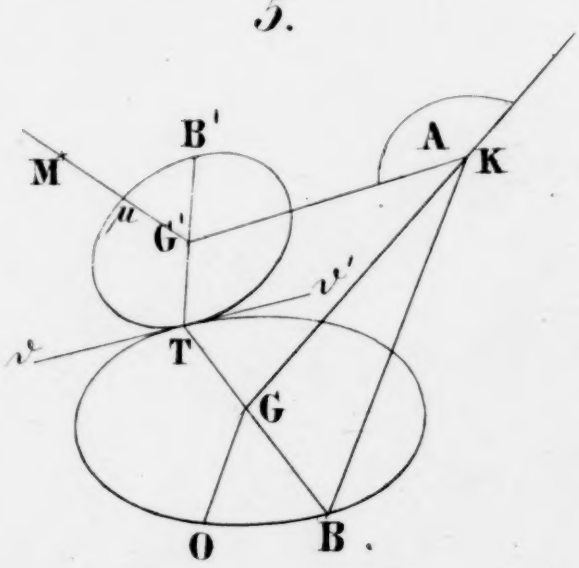
2.



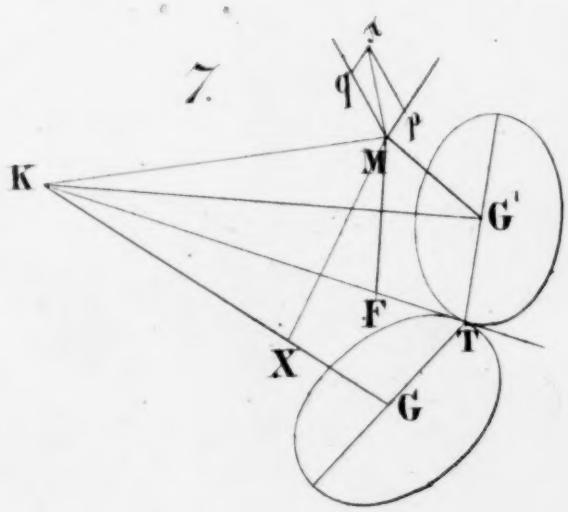
4.

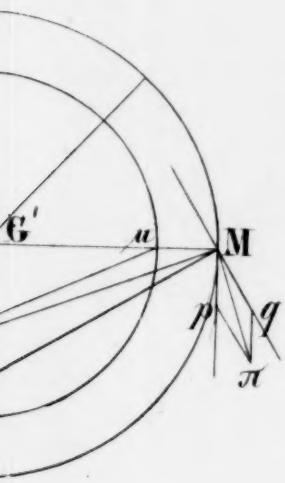


5.

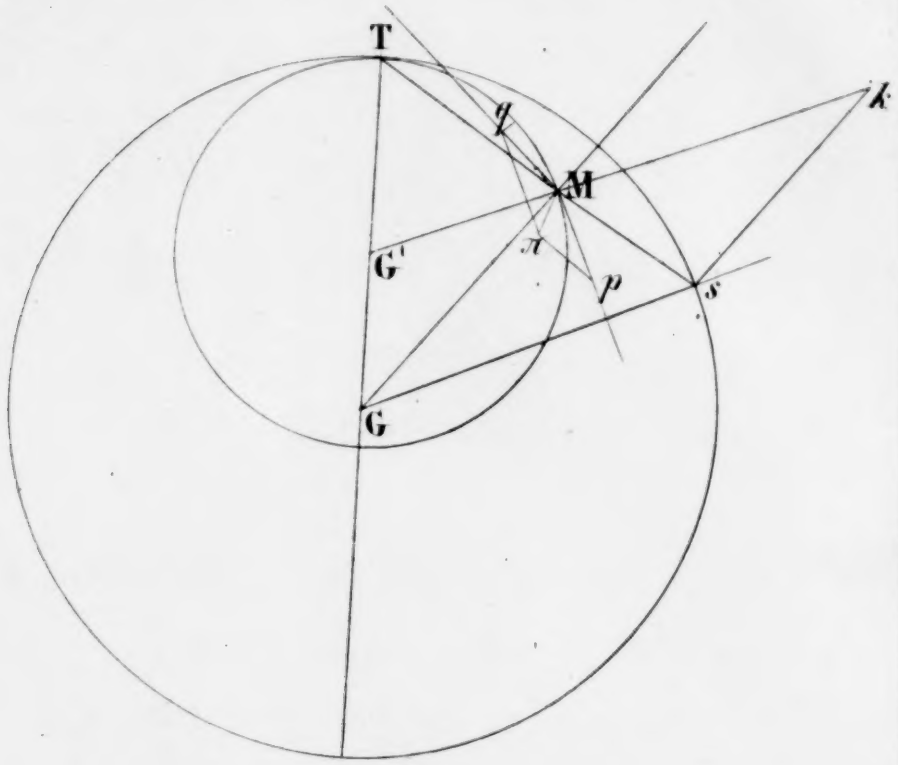


7.

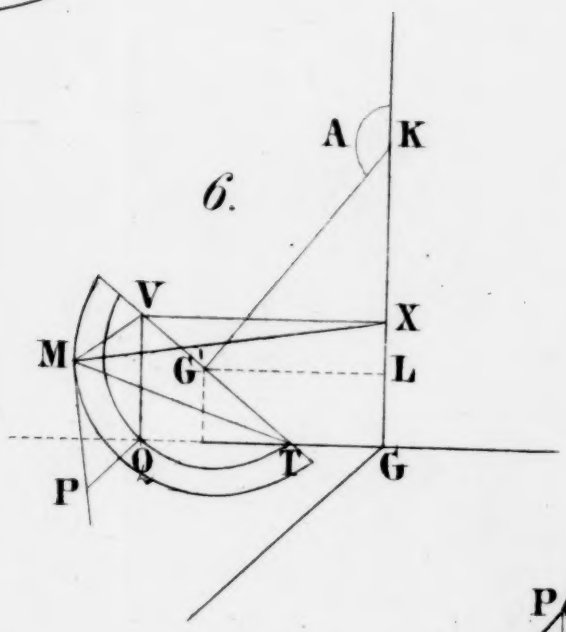




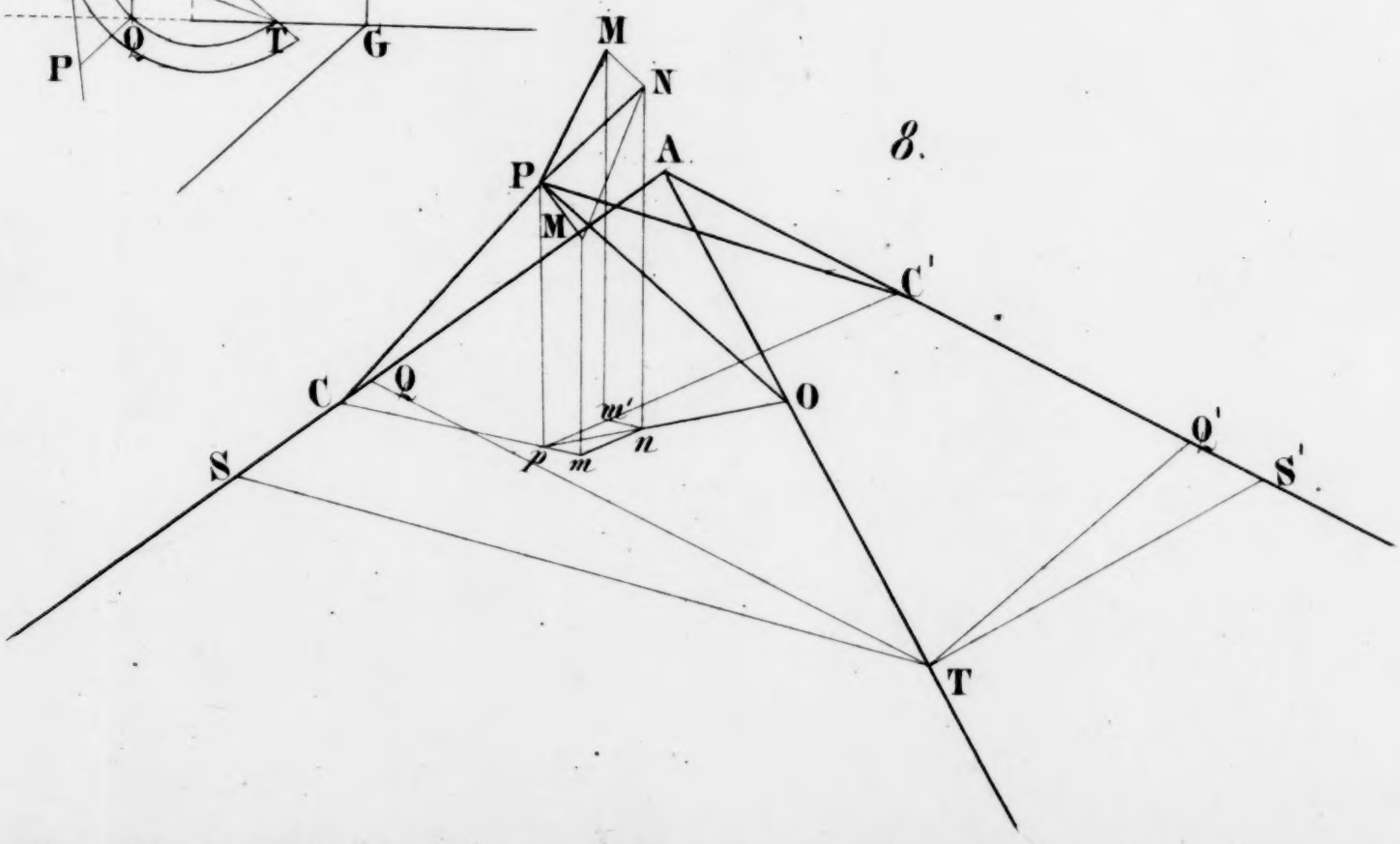
3.



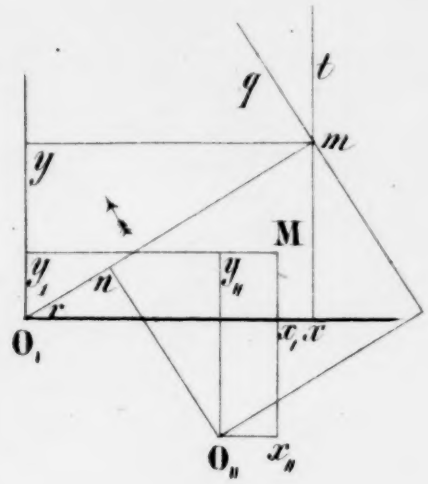
6.

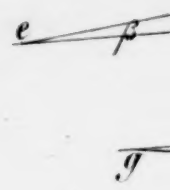


8.

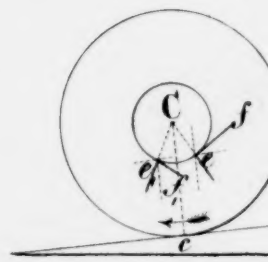


1.

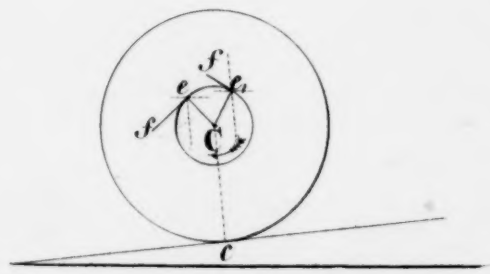




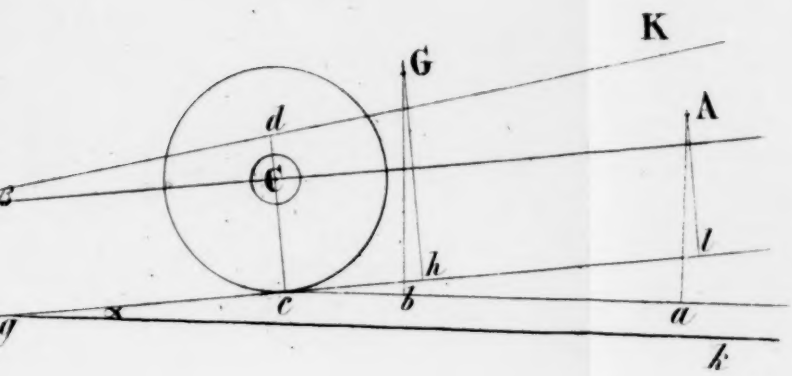
3.



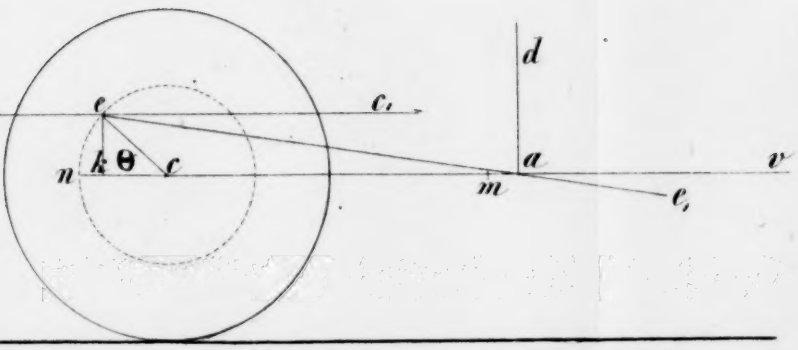
4.



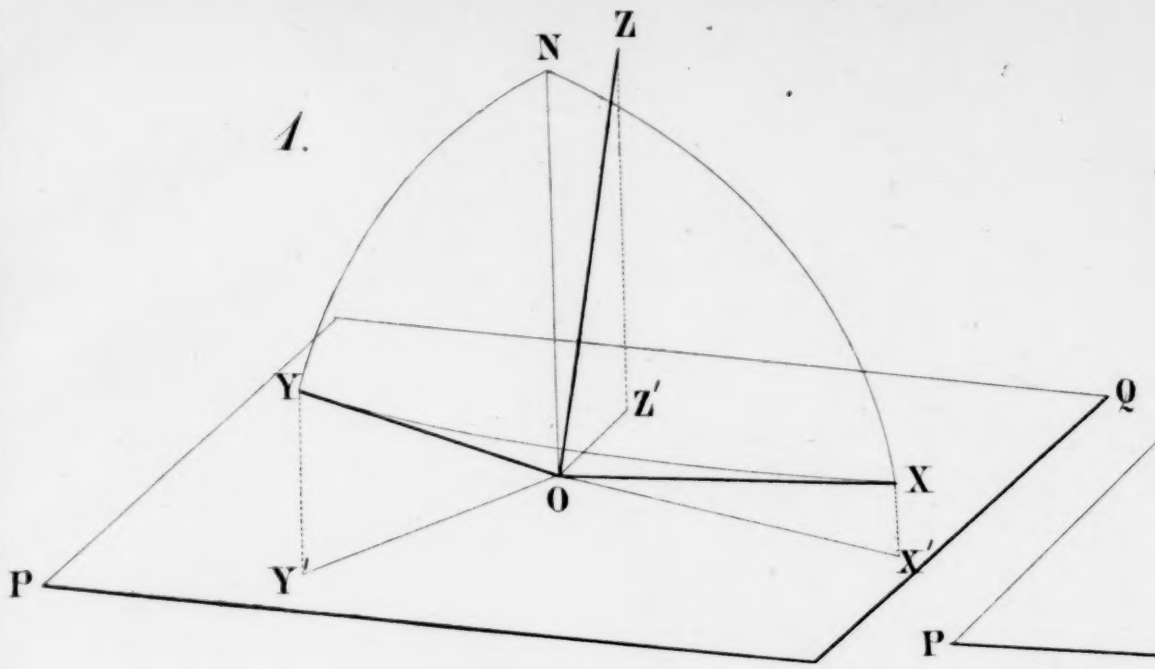
2.



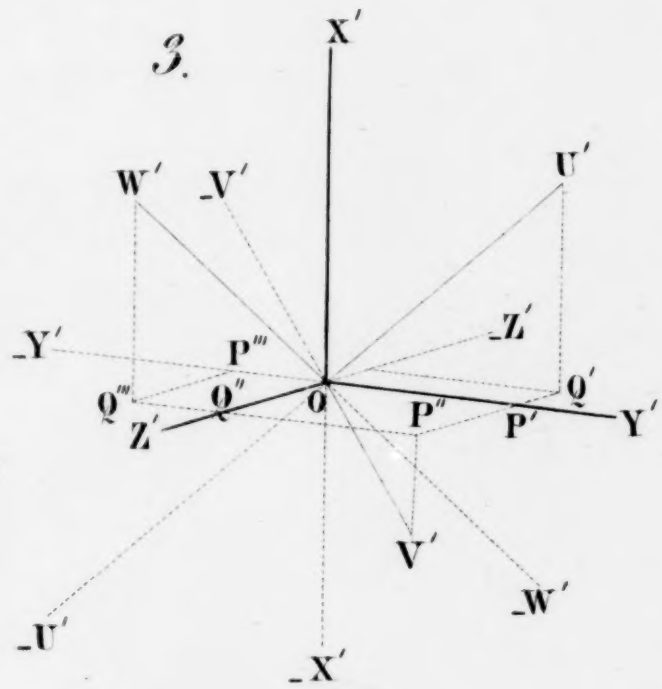
5.



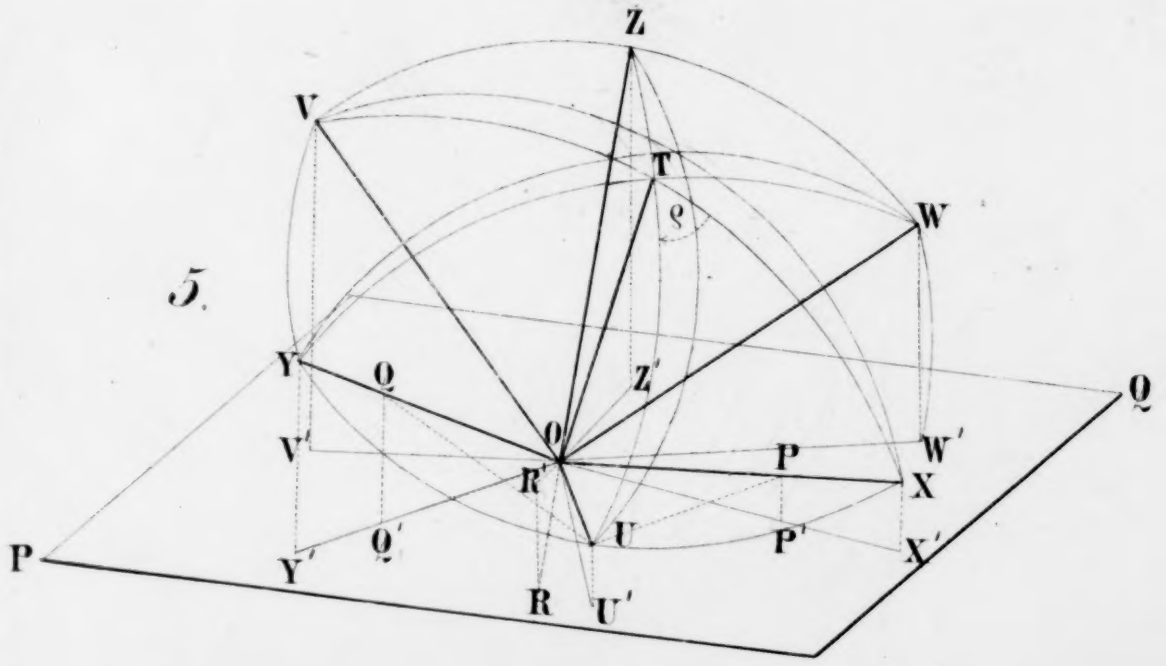
1.


N
Z
Y
Z′
O
X
Y′
X′
P
Q
P

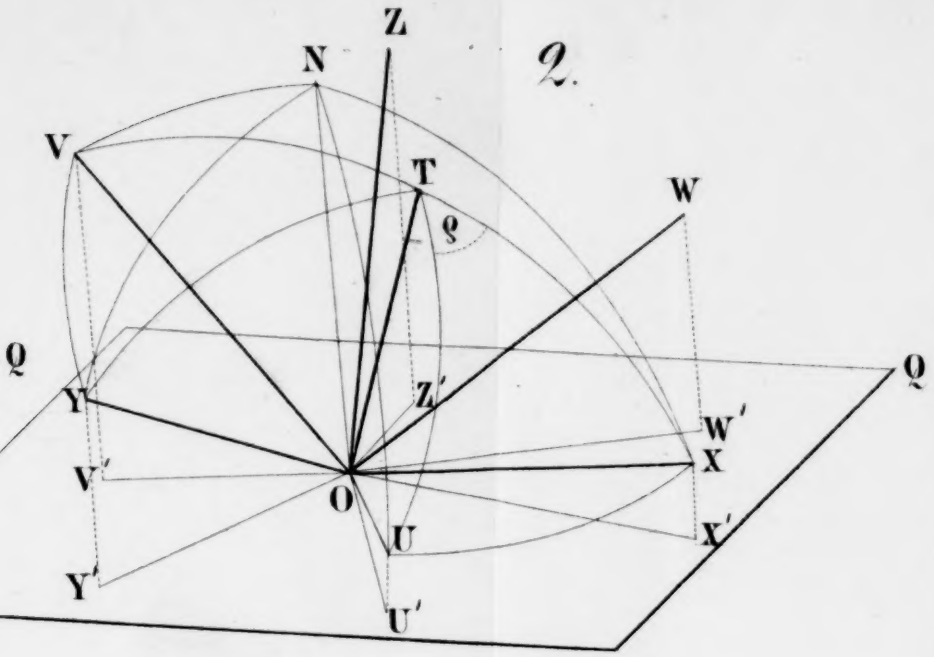
3.


X′
W′
V′
U′
Y′
P‴
Z′
Q‴
Q″
Q
Q′
P″
P′
Y′
Z′
V′
W′
U′
X′

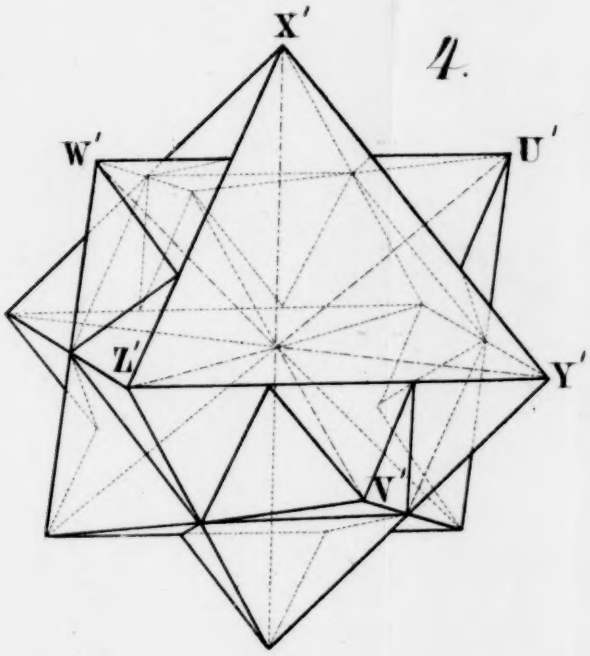
5.


Z
V
T
ϱ
W
Y
Q
Z′
Q
V′
O
P
W′
R
X
U
P′
X′
P
Y′
Q′
R
U′

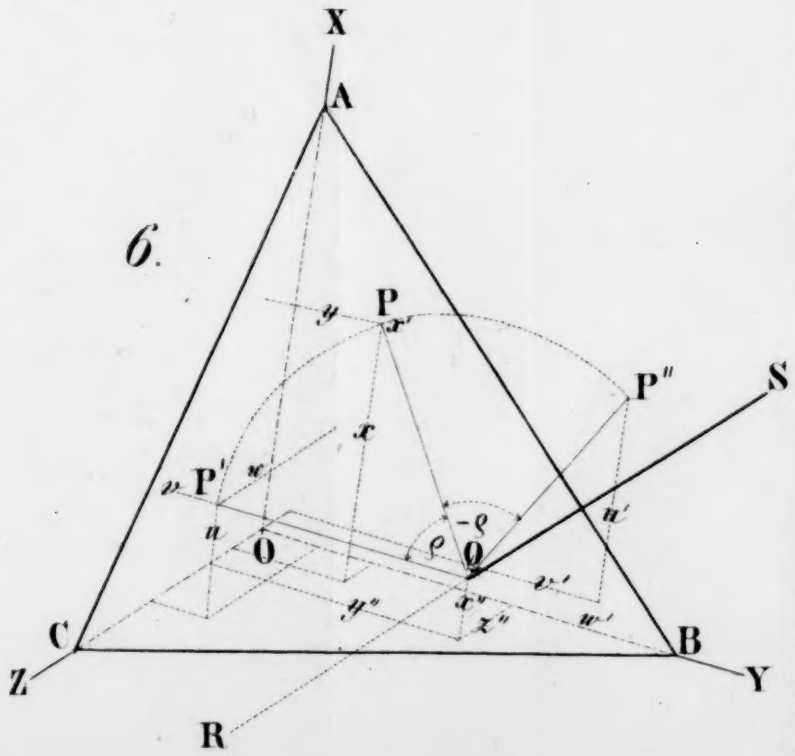
2.


Z
N
V
T
W
ϱ
Q
Q
Y
Z′
W′
X
V′
O
U
X′
Y′
U′

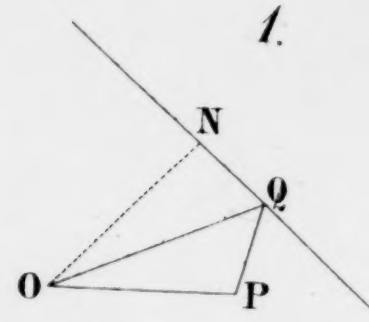
4.


X′
W′
U′
Z′
Y′
V′

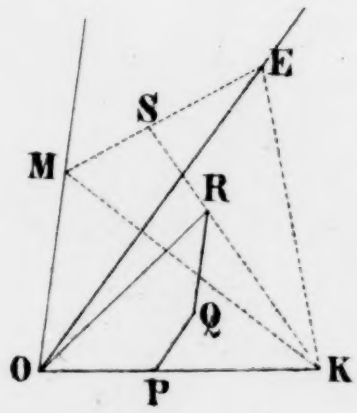
6.


X
A
y
P
x′
P″
S
x
v
P′
w
u
O
-ϱ
ϱ
Q
n′
v′
y″
x″
z″
w′
C
B
Z
Y
R

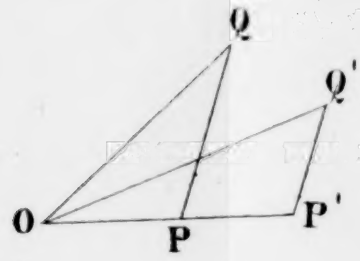
1.



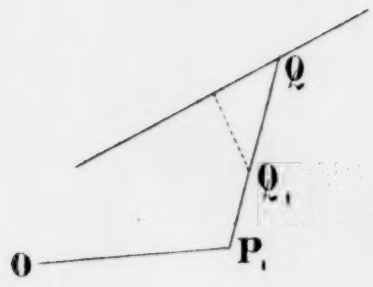
4.



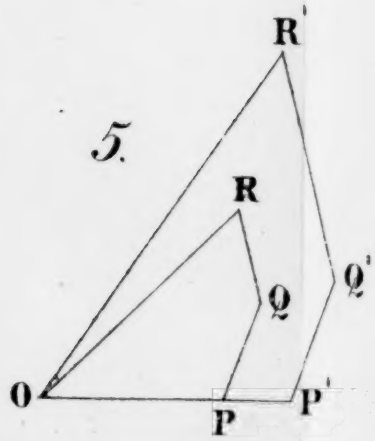
2.



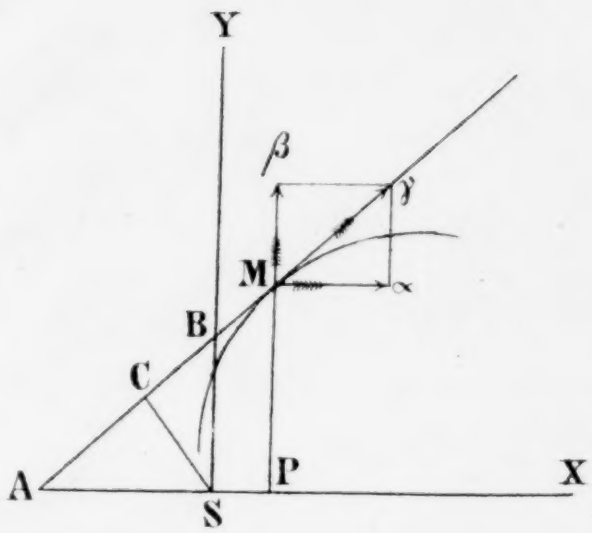
3.



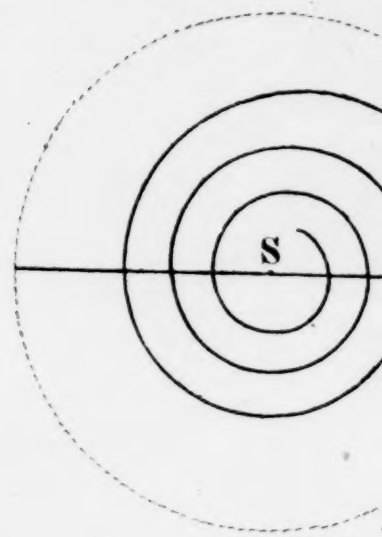
5.



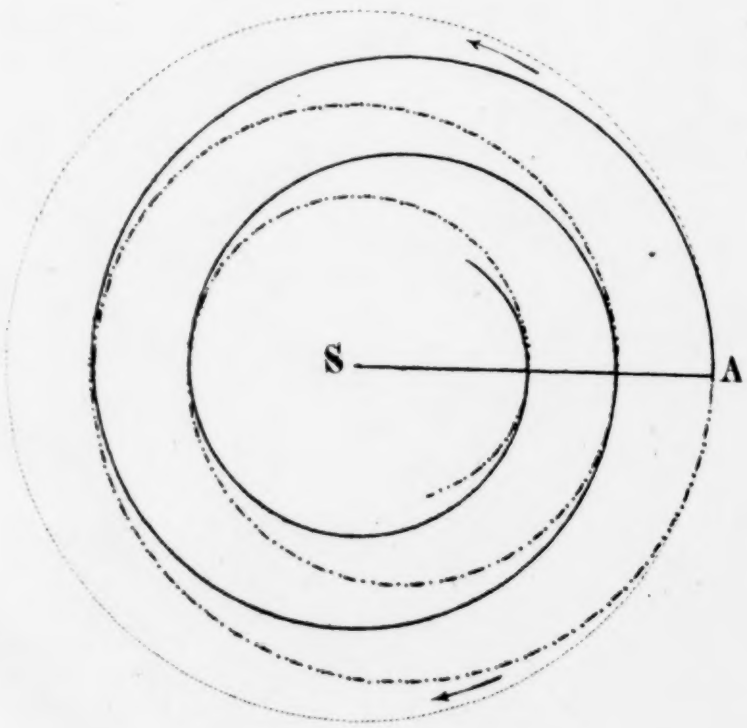
1.



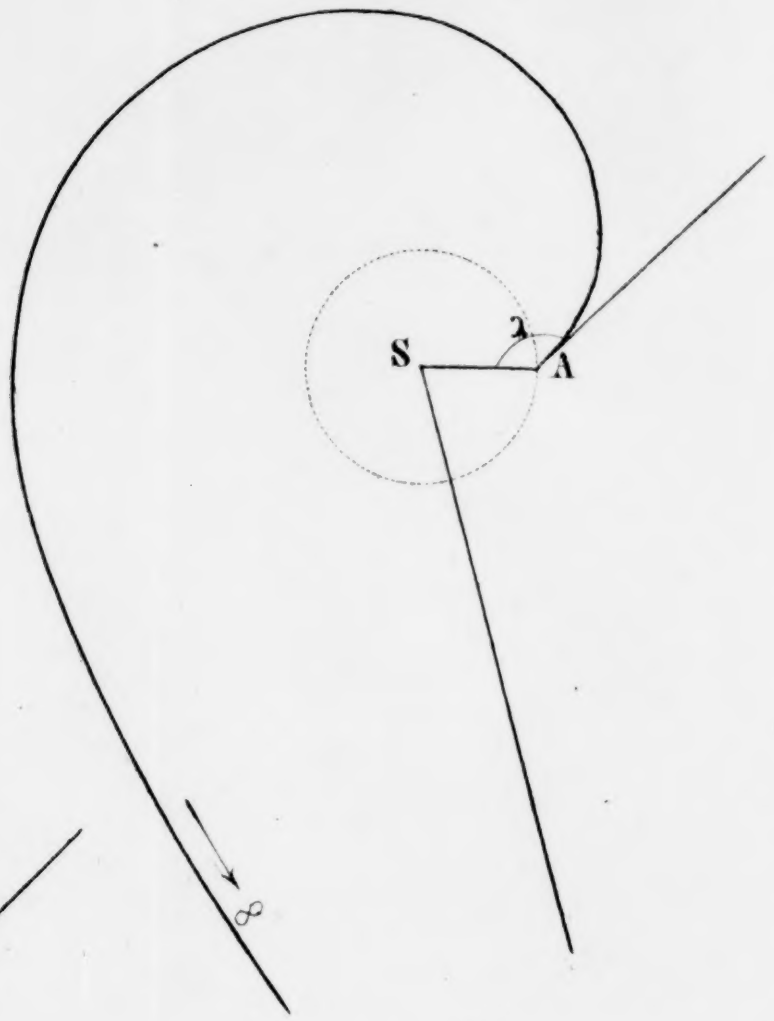
2.

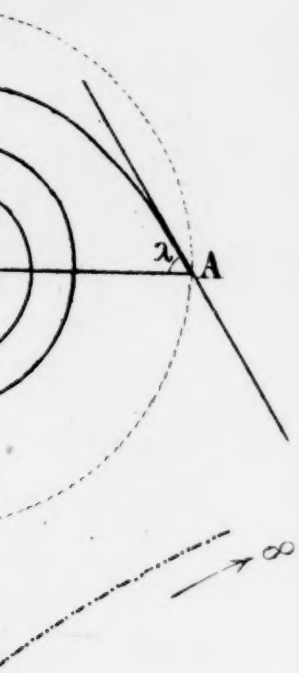


4.

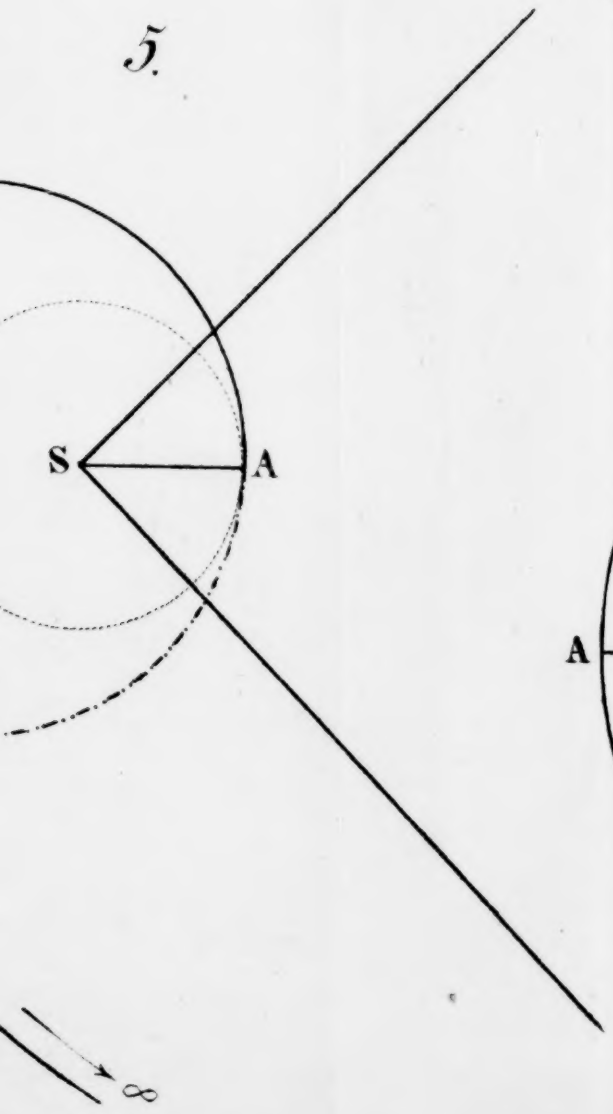


3.

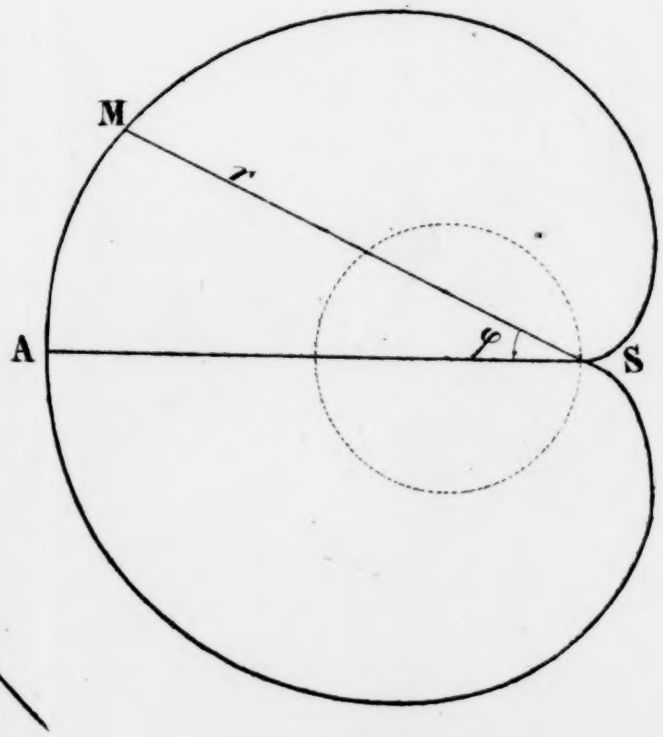




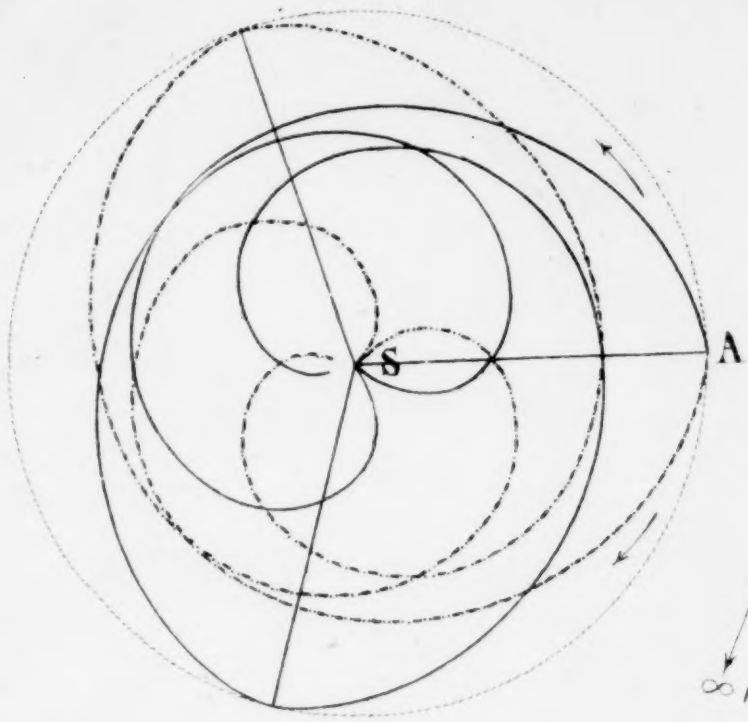
5.



6.

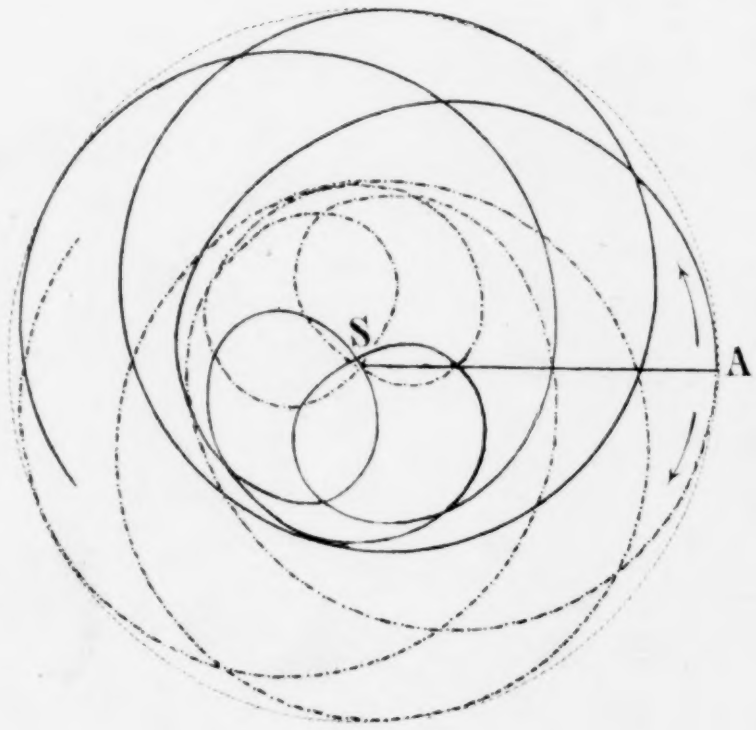


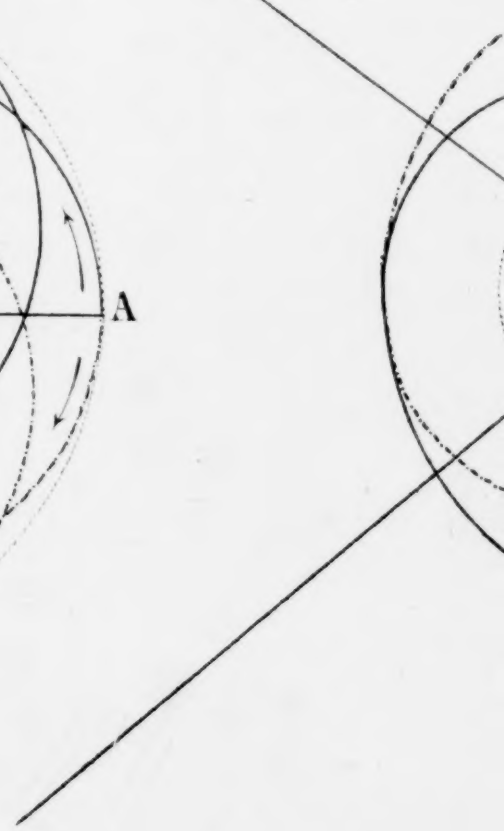
7.

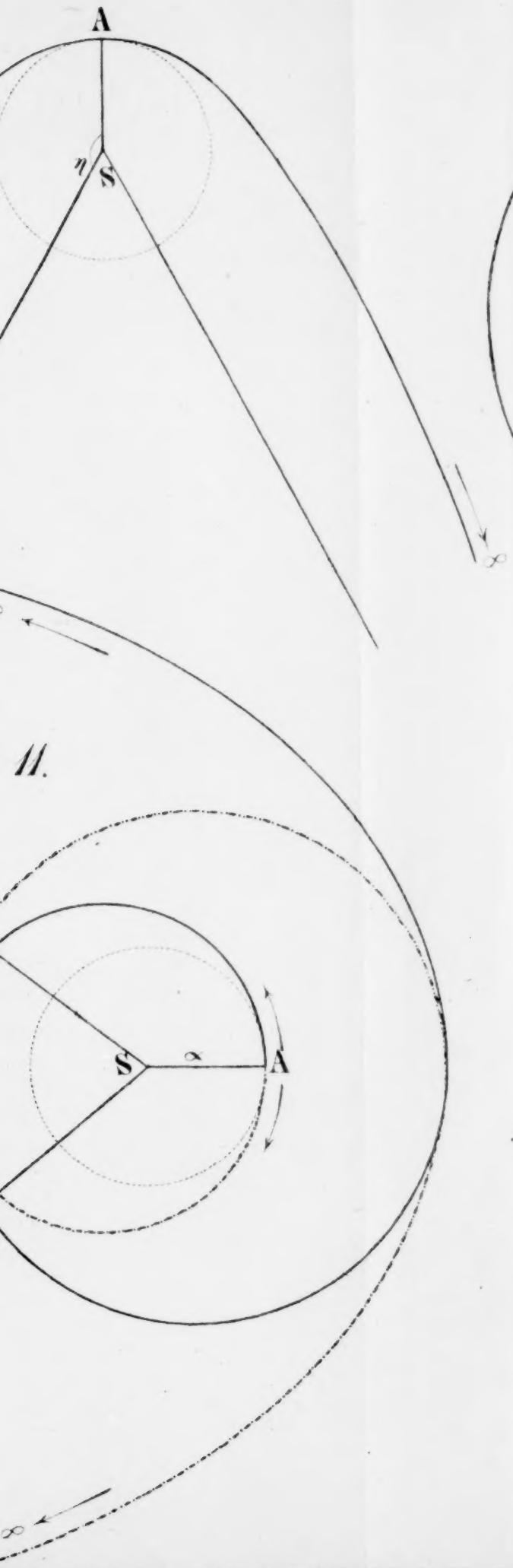


8.

10.

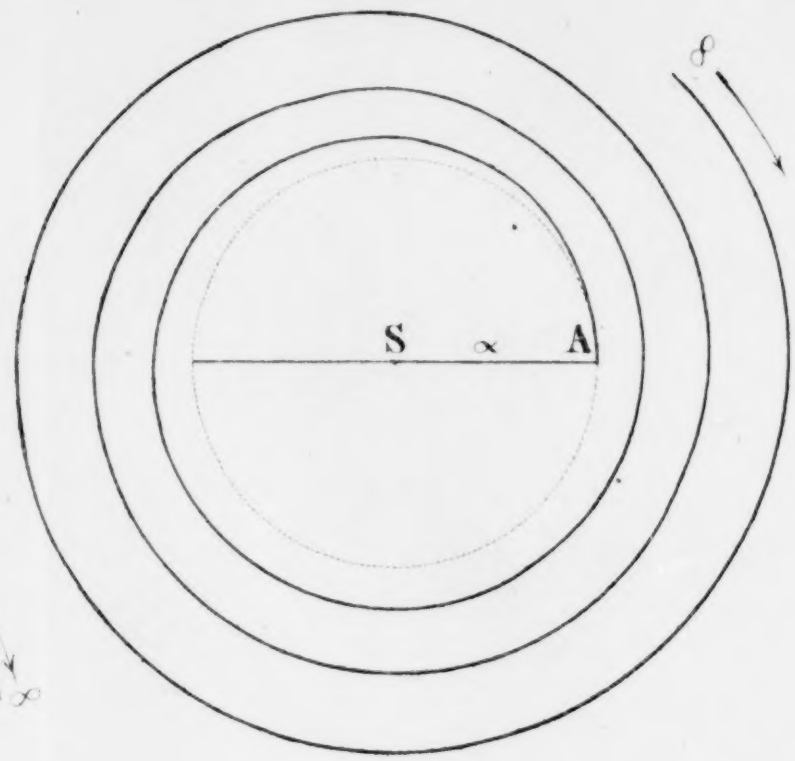




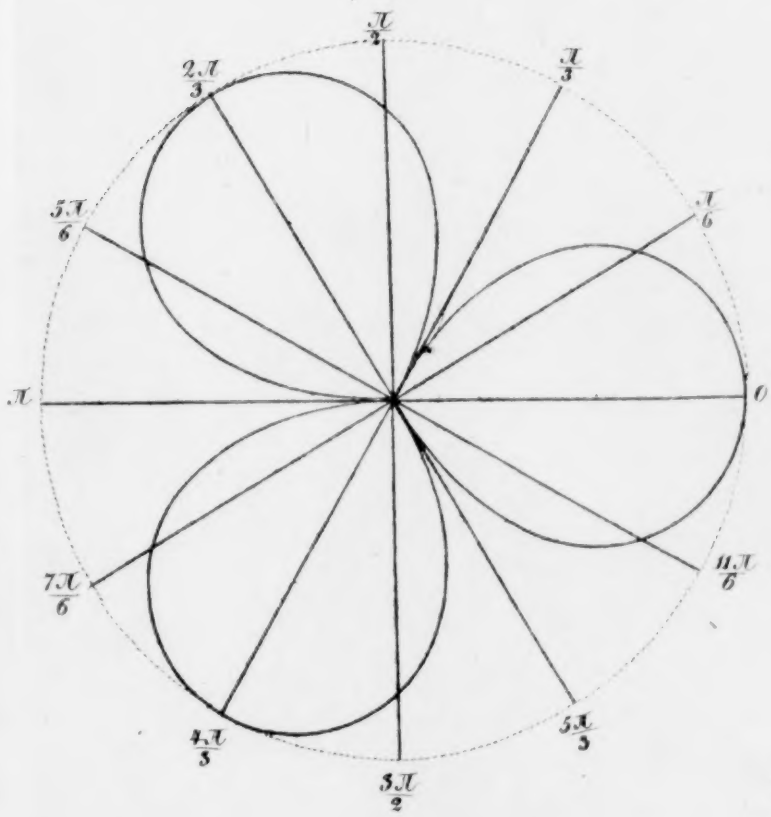


11.

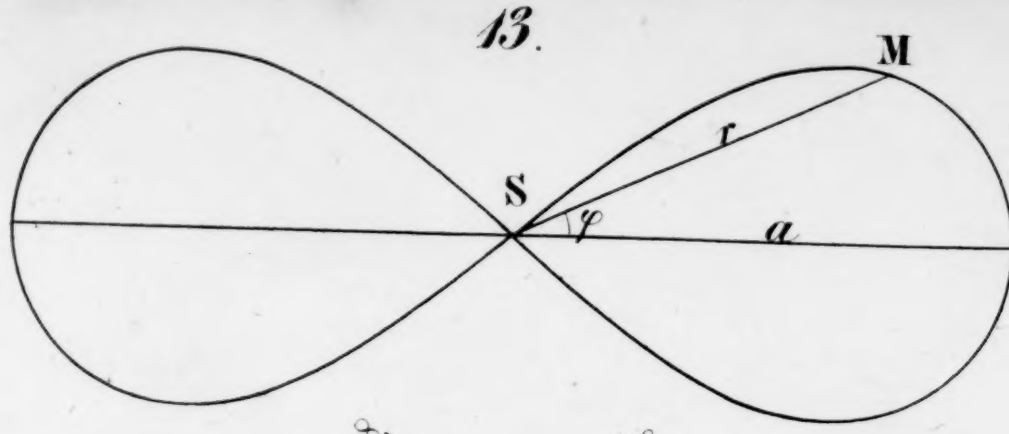
9.



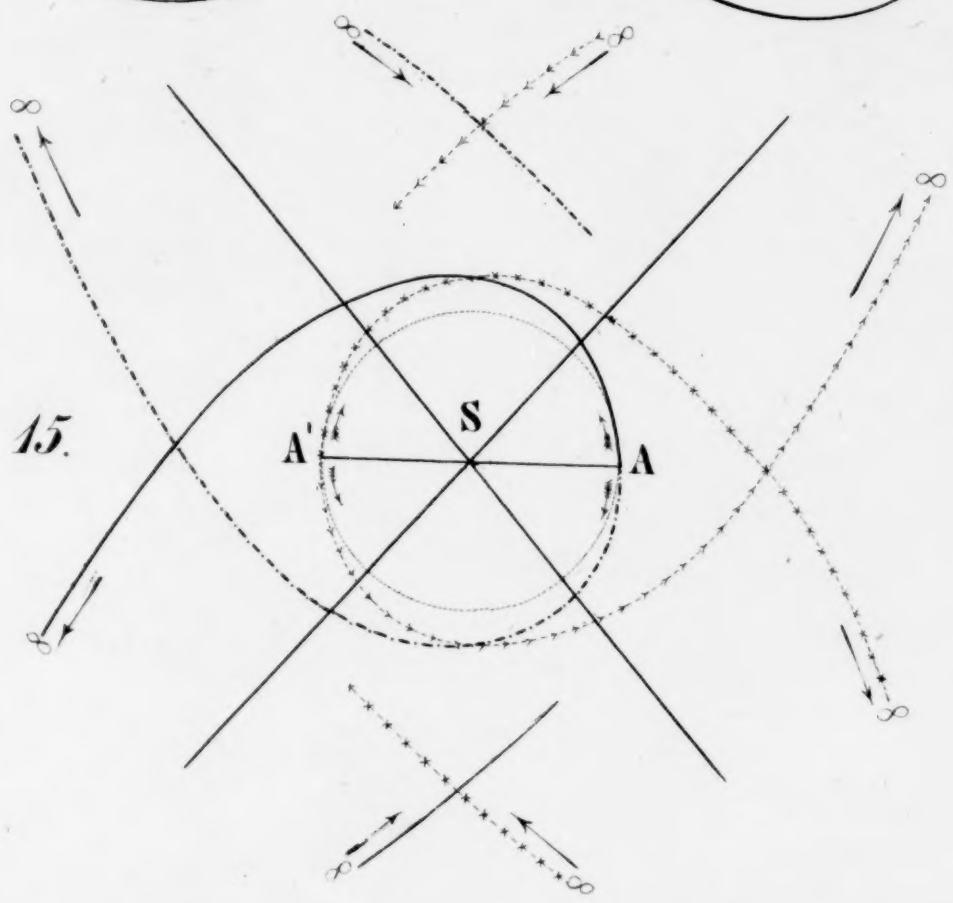
12.



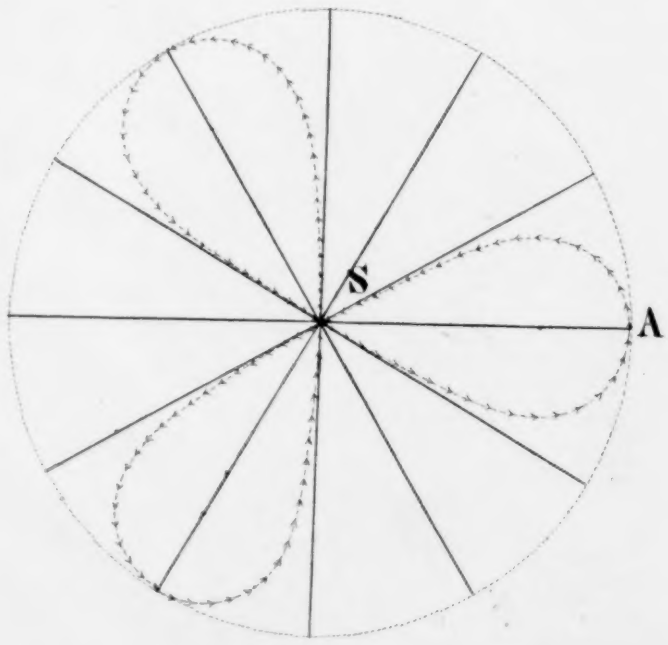
13.



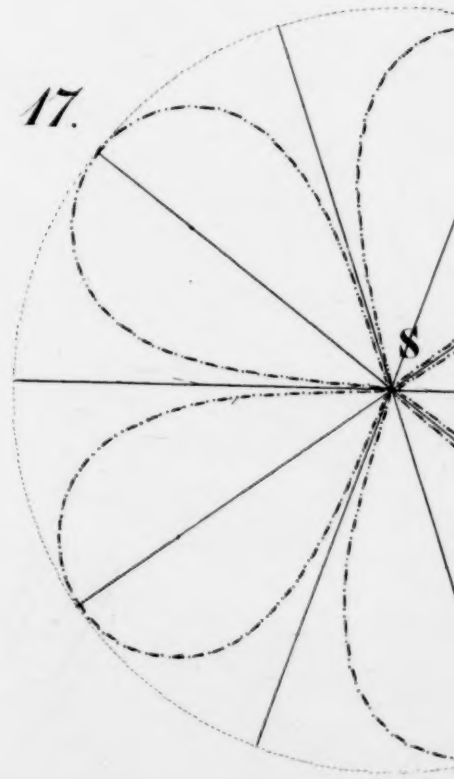
15.



16.

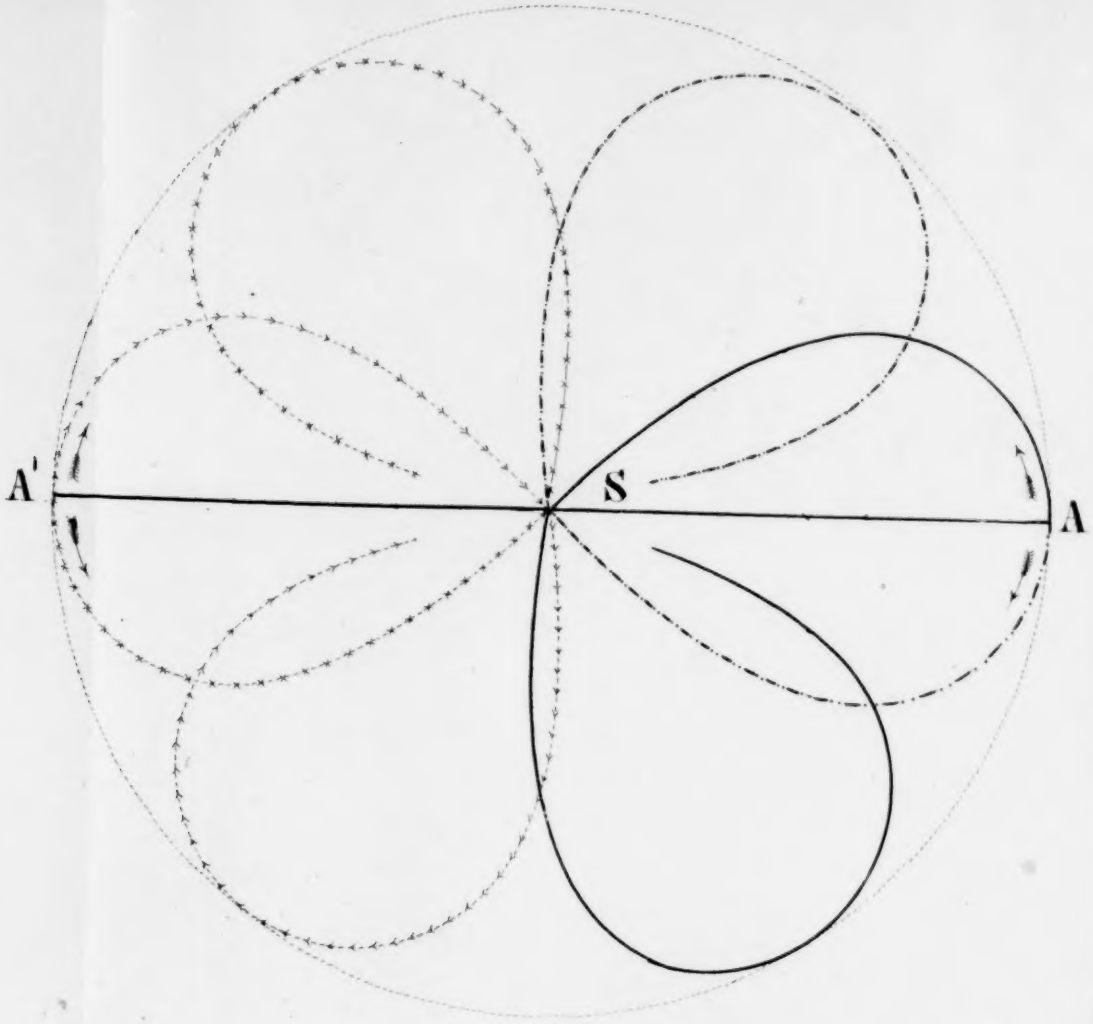


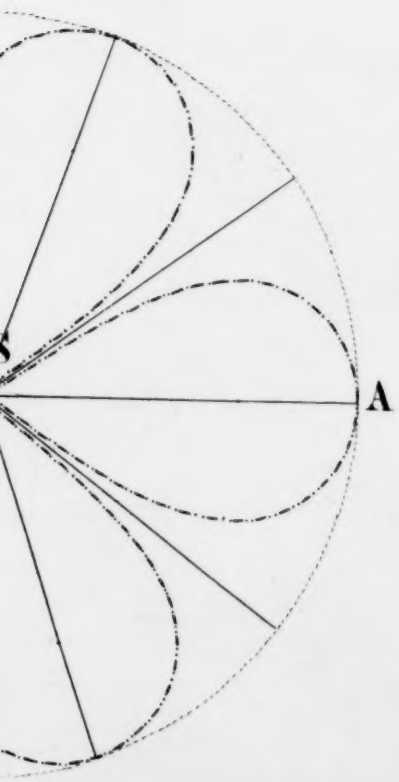
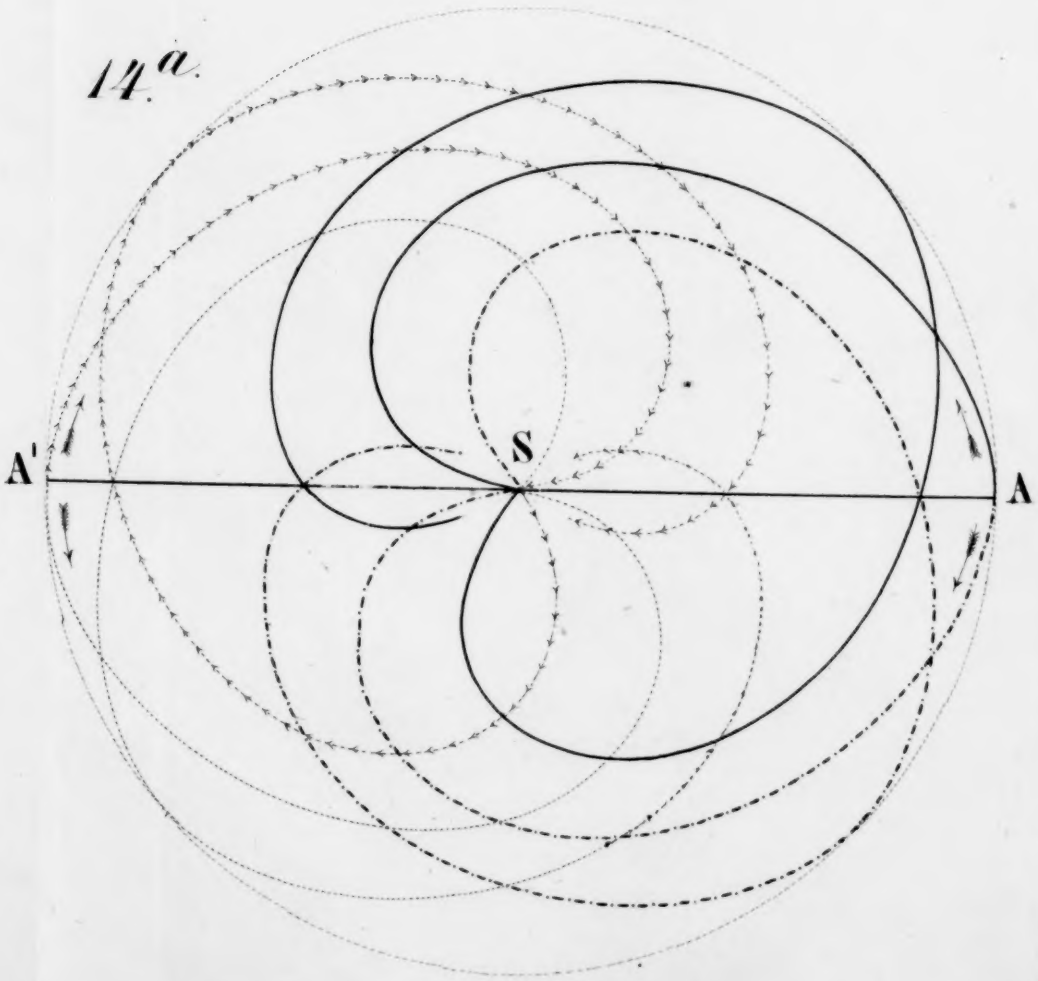
17.



A

14.b





14.a